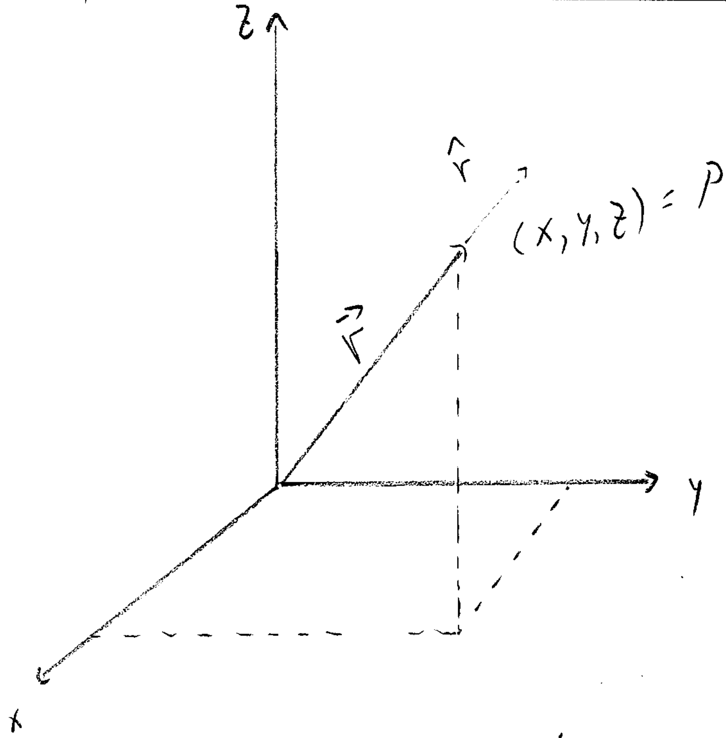
1) Vetores Posição, deslocamento e separação



A localização de um ponto em três dimensões pode ser descrita listando-se suas coordenadas cartesianas (x, y, z).
O vetor que vai da origem até o ponto $P(x,y,z)$ é chamado de vetor posição.

$$\vec{r} = x\,\hat{x} + y\,\hat{y} + z\,\hat{z}$$

A magnitude (módulo) de $\vec{r}$, que será a distância a partir da origem é dada por

$$|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

O vetor unitário que aponta na direção radial será

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

um deslocamento infinitesimal de (x, y, z) para $(x+dx, y+dy, z+dz)$ será $d\vec{l}$

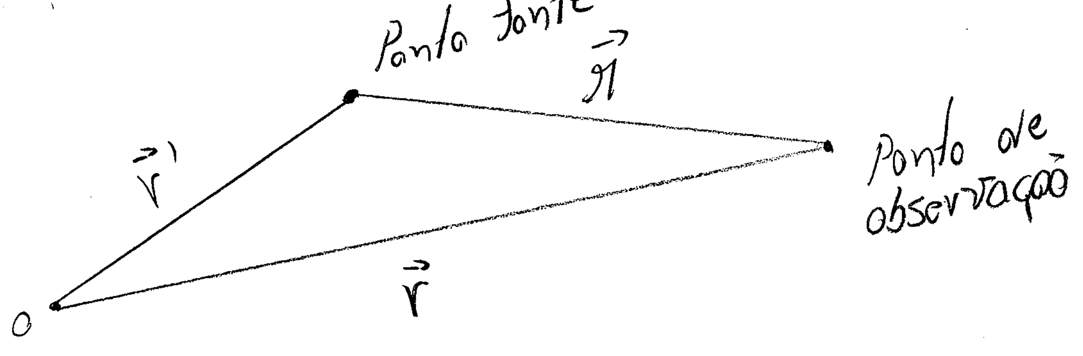
$$d\vec{l} = dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y} + dz\,\hat{z}.$$

Importante

Em eletrodinâmica, frequentemente encontramos problemas que envolvem dois pontos - tipicamente um ponto fonte $\vec{r}\,'$ onde a carga elétrica está localizada, e um ponto de observação $\vec{r}$ no qual será calculado o campo elétrico ou magnético.

Para simplificar nossa notação, vamos adotar uma notação abreviada para o vetor separação entre o ponto fonte e o ponto de observação, vamos utilizar a letra $\vec{\mathscr{r}}$ (R cursiva)

$$\vec{\mathscr{r}} = \vec{r} - \vec{r}\,'$$



a magnitude de $\vec{\mathscr{r}}$ é

$$\mathscr{r} = |\vec{r} - \vec{r}\,'|$$

Em coordenadas cartesianas

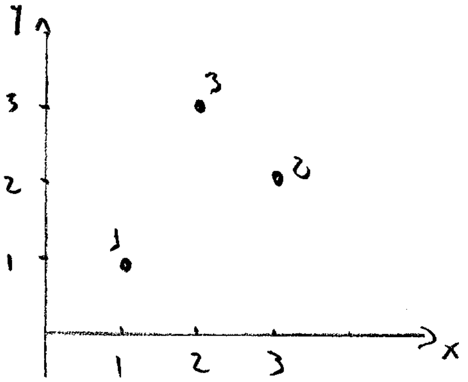
$$\vec{r} = (x-x')\hat{x} + (y-y')\hat{y} + (z-z')\hat{z}$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{(x-x')\hat{x} + (y-y')\hat{y} + (z-z')\hat{z}}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}$$

Conceito de um escalar

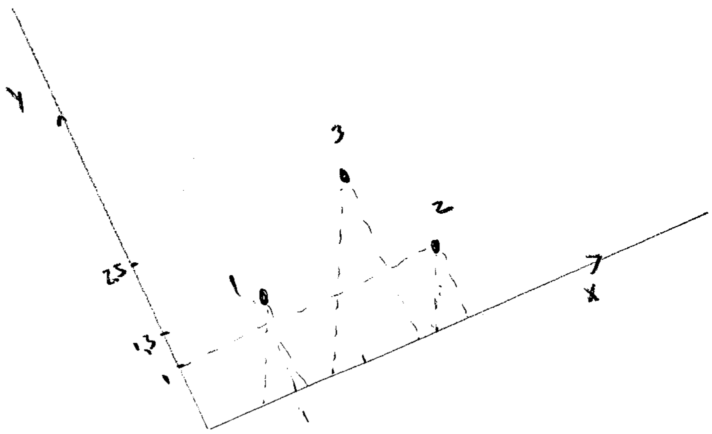
Consideremos um conjunto de partículas definidas a partir de suas massas



$M_1(x, y) = M_1(x=1, y=1) = 2\ Kg$

$M_2(x,y) = M_2(3,2) = 4\ Kg$

$M_3(x,y) = M_3(2,3) = 1\ Kg$



$M_1(x', y') = M_1(1,1, 1,4) = 2\ Kg$

$M_2(x', y') = M_2(3,8, 1,0) = 4\ Kg$

$M_3(x', y') = M_3(3, 2,5) = 1\ Kg$

de forma geral temos que

$$M(x,y) = M(x',y')$$

porque a massa de uma partícula não é afetada por uma mudança dos eixos de coordenadas.

Então, podemos definir:

Quantidades que são invariantes sob uma transformação de coordenadas são chamadas de <u>escalares</u>.

Gradiente

Suponha uma função de três variáveis - ex. temperatura

$T(x,y,z)$

$$\nabla T(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x} T(x,y,z)\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} T(x,y,z)\hat{y} + \frac{\partial T}{\partial z}(x,y,z)\hat{z}$$

o gradiente é um vetor que aponta na direção da variação máxima da função T.

A magnitude $|\nabla T|$ fornece a inclinação (taxa de aumento) ao longo da direção de máxima variação de $T(x,y,z)$

Divergente

A partir da definição do "operador del" (∇) podemos atuar em uma função vetorial

$$\nabla \cdot \vec{v} = \left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z} \right)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial}{\partial x} v_x + \frac{\partial}{\partial y} v_y + \frac{\partial}{\partial z} v_z$$

observe que o divergente de uma função vetorial $\vec{v}$ é um escalar

Interpretação geométrica: o $\nabla \cdot \vec{v}$ é a medida de quanto o vetor $\vec{v}$ brota (diverge) do ponto em questão. um ponto de divergente positivo é uma fonte; um ponto de divergente negativo é um sumidouro (ralo)

Rotacional

A partir do operador ∇ podemos construir o rotacional

$$\nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

solução do determinante por cofator

$$(-1)^{i+j} M_{ij} =$$

ex:

$$(-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_y & v_z \end{vmatrix} \hat{x}$$

$$\nabla \times \vec{v} = \hat{x}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) + \hat{y}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$$

note que $\nabla \times \vec{v}$ é um vetor.

Interpretação do rotacional: o rotacional $\nabla \times \vec{v}$ é uma medida de quanto um campo vetorial $\vec{v}$ gira em torno de um ponto em questão.

Integrais de linha, superfície e volume

Em eletrodinâmica, encontramos vários tipos de integrais, entre os quais os mais importantes são os integrais de linha (ou de caminho) os integrais de superfície (ou fluxo) e os integrais de volume.

I) Integrais de linha: É uma expressão com a forma

$$\int_a^b \vec{v} \cdot d\vec{l}$$

onde $\vec{v}$ é uma função vetorial e $d\vec{l}$ é o vetor deslocamento infinitesimal. A integral é feita ao longo do caminho c, entre o ponto "a" e o ponto "b". Se o caminho em questão é fechado, $a=b$ utiliza-se a notação

$$\oint \vec{v} \cdot d\vec{l}$$

A cada ponto do caminho, fazemos o produto escalar de $\vec{v}$ com o deslocamento $d\vec{l}$ até o próximo ponto do caminho.

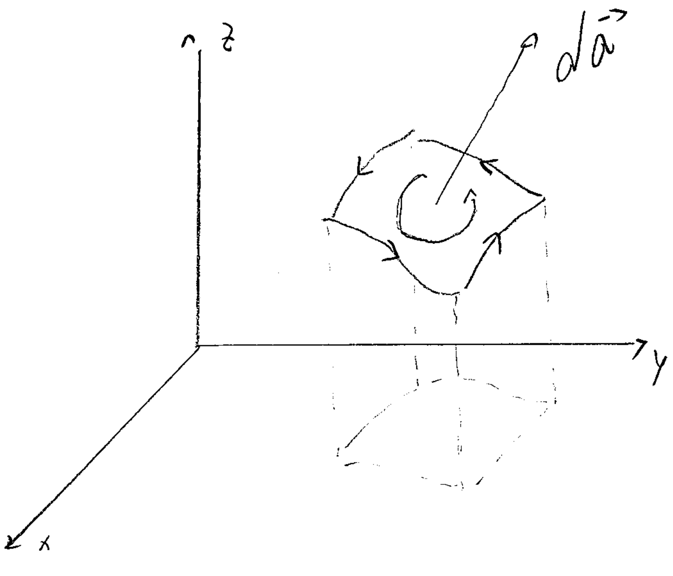
II) Integrais de superfície (ou de fluxo) É uma expressão na forma

$$\int_S \vec{v} \cdot d\vec{a}$$

onde $\vec{v}$ é uma função vetorial e $d\vec{a}$ é um trecho infinitesimal da área, com direção perpendicular à superfície. Se a superfície for fechada, utilizamos

$$\oint_S \vec{v} \cdot d\vec{a}$$

O sinal de $d\vec{a}$: o sinal de $d\vec{a}$ é determinado seguindo a regra da mão direita (teorema de Stokes)



III) Integrais de Volume: É uma expressão na forma

$$\int_V T \, d\tau$$

onde T é uma função escalar e $d\tau$ é um elemento de volume infinitesimal. Em coordenadas cartesianas

$$d\tau = dx\,dy\,dz$$

se T é a densidade de uma substância, então a integral do volume daria a massa total.

Ocasionalmente, encontramos integrais de volume de funções vetoriais

$$\int \vec{v}\, d\tau = \int (v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z})\, d\tau$$

$$= \hat{x}\int v_x\, d\tau + \hat{y}\int v_y\, d\tau + \hat{z}\int v_z\, d\tau$$

Como os vetores unitários $\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{z}$ são constantes, eles saem da integral

Teorema do divergente (teorema de Gauss)

O teorema do divergente diz que

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{v})\, d\tau = \oint_S \vec{v} \cdot d\vec{a}$$

$$\int_V \left(\frac{\partial}{\partial x} v_x + \frac{\partial}{\partial y} v_y + \frac{\partial}{\partial z} v_z\right) d\tau = \oint_S \vec{v} \cdot d\vec{a}$$

Teorema de Green

$$\int (\phi \nabla^2 \psi + \nabla\phi \cdot \nabla\psi)\, d\tau = \oint (\phi \nabla \psi) \cdot \hat{n}\, da$$

se $\vec{v} = \phi \nabla \psi$

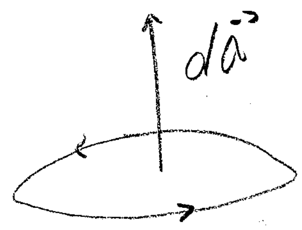
$$\int (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi)\, d\tau = \oint (\phi \nabla \psi - \cancel{\psi \nabla \phi}) \cdot \hat{n}\, da$$

Interpretação: A integral do divergente de uma função vetorial sobre um volume é igual a integral dessa função em uma superfície que envolve este volume.

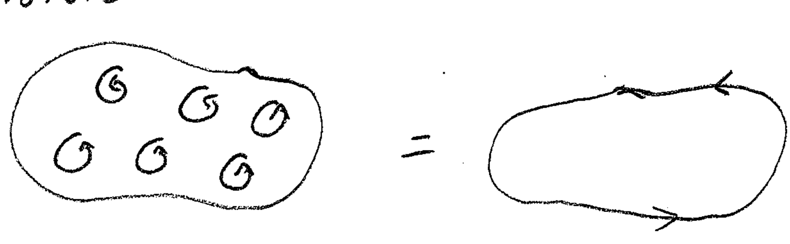
Teorema de Stokes (teorema fundamental p/ rotacionais)

O teorema de Stokes diz que

$$\int_S (\nabla \times \vec{v}) \cdot d\vec{a} = \oint_P \vec{v} \cdot d\vec{l}$$



Interpretação física ⇒ A integral do rotacional sobre uma superfície é igual a integral do contorno que circunda esta superfície



Corolário $\Rightarrow$

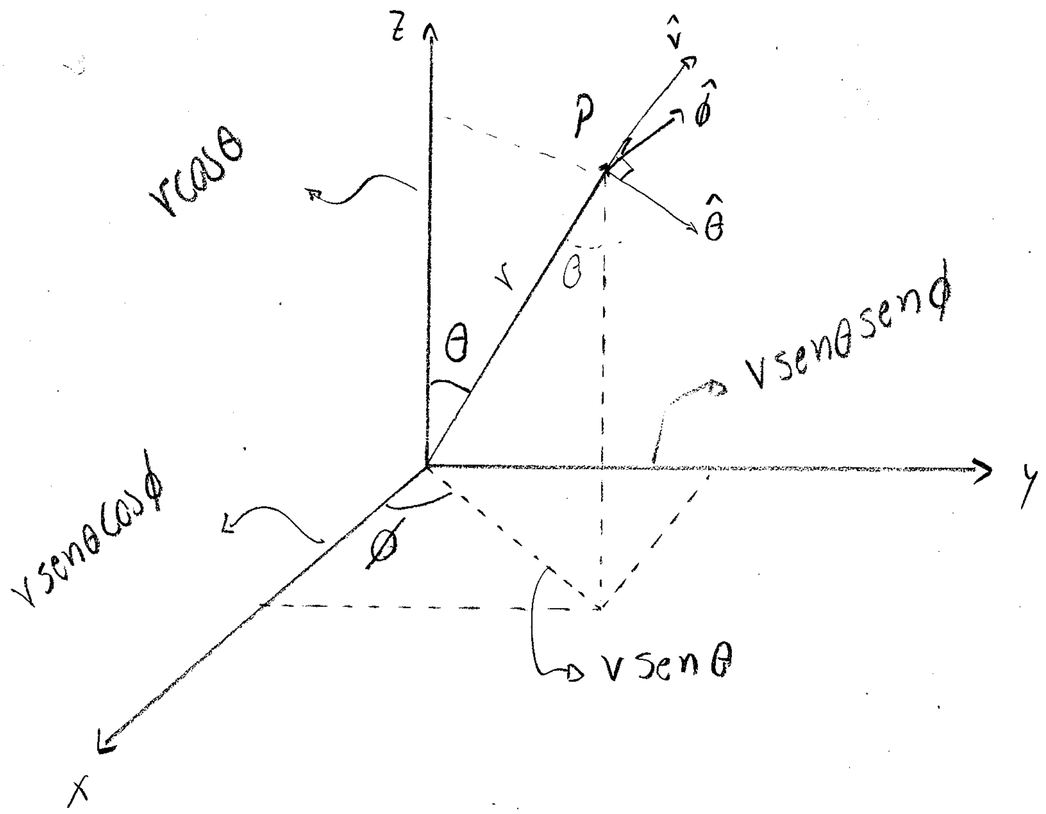
$\int (\nabla \times \vec{v}) \cdot d\vec{a}$ depende somente da linha de contorno e não da superfície

$\oint (\nabla \times \vec{v}) \cdot d\vec{a} = 0$ para qualquer superfície fechada

Coordenadas curvilíneas

Coordenadas polares e esféricas

As coordenadas polares esféricas (r, θ, ϕ) de um ponto P são definidas a partir da figura.



r é a distância ao ponto P a partir da origem

θ é o ângulo polar, formado com o eixo z

ϕ é o ângulo azimutal, formado com o eixo x

A relação com as coordenadas cartesianas (x, y, z) é obtida a partir da projeção de r nos eixos x, y, z.

$$x = r \operatorname{sen}\theta \cos\phi \; ; \quad y = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi \; , \quad z = r\cos\theta$$

A figura também mostra os três vetores unitários $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}$ que apontam na direção da variação das coordenadas correspondentes.

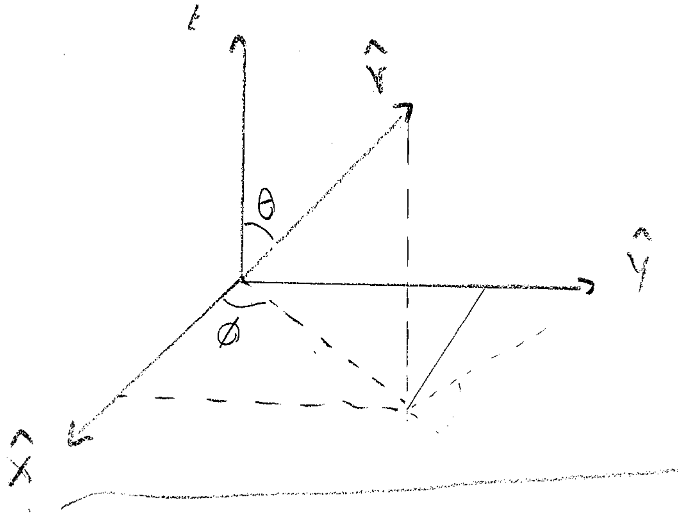
Qualquer vetor $\vec{A}$ pode ser expresso em termos desses vetores unitários

$$\vec{A} = A_r \hat{r} + A_\theta \hat{\theta} + A_\phi \hat{\phi}$$

onde A_r, A_θ e A_ϕ são as componentes radial, polar e azimutal de $\vec{A}$

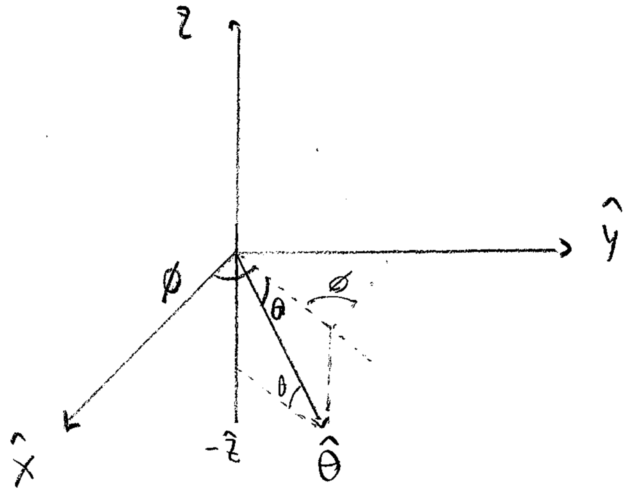
Em termos dos vetores unitários cartesianos, podemos escrever para a direção $\hat{r}$:

tomemos a projeção dos versores $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ na direção de $\hat{r}$



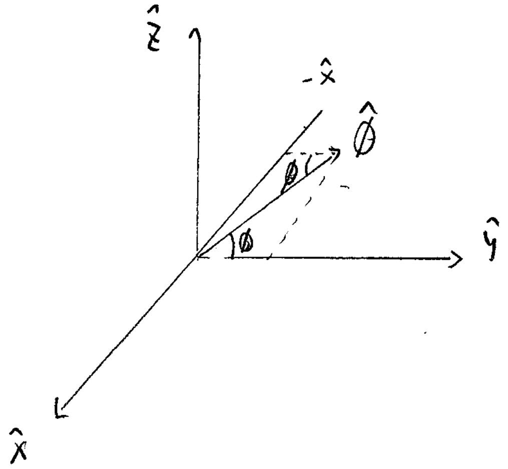
$$\boxed{\hat{r} = \cos\phi \,\mathrm{sen}\,\theta\, \hat{x} + \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi\, \hat{y} + \cos\theta\, \hat{z}}$$

tomamos a projeção dos versores $\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{z}$ na direção $\hat{\theta}$



$$\boxed{\hat{\theta} = \cos\theta\cos\phi\, \hat{x} + \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi\, \hat{y} - \mathrm{sen}\,\theta\, \hat{z}}$$

tomamos a projeção dos versores $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$ na direção $\hat{\phi}$

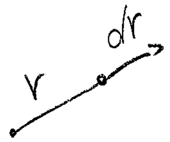


$$\boxed{\hat{\phi} = -\mathrm{sen}\,\phi\, \hat{x} + \cos\phi\, \hat{y}}$$

Obs: $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ e $\hat{\phi}$ estão associados a um ponto específico P. eles mudam de direção à medida que P se movimenta. Tome cuidado ao diferenciar vetores em coordenadas esféricas, já que $\hat{r}(\theta,\phi)$, $\hat{\theta}(\theta,\phi)$, $\hat{\phi}(\theta,\phi)$ são funções da posição, $\frac{\partial \hat{r}}{\partial \theta} = \hat{\theta}$, portanto não retire $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ e $\hat{\phi}$ de uma integral como fazemos com $\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{z}$.

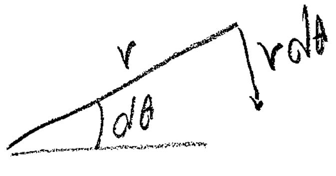
Um deslocamento infinitesimal na direção $\hat{r}$ é dr, de forma que podemos definir

$$dl_r = dr$$



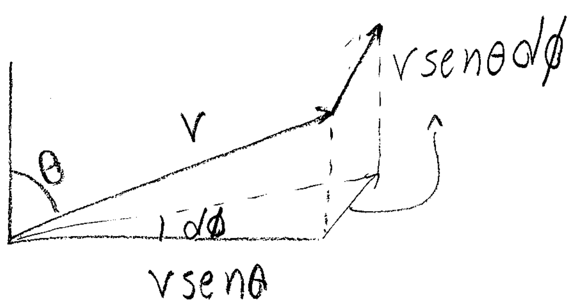
Por outro lado, um deslocamento infinitesimal de comprimento na direção $\hat{\theta}$ não é apenas $d\theta$ (não tem unidade de comprimento), assim

$$dl_\theta = r\,d\theta$$



Da mesma forma, um elemento infinitesimal na direção $\hat{\phi}$ será

$$dl_\phi = r\,\mathrm{sen}\,\theta\, d\phi$$



o deslocamento infinitesimal $d\vec{l}$ será

$$d\vec{l} = dl_r\,\hat{r} + dl_\theta\,\hat{\theta} + dl_\phi\,\hat{\phi}$$

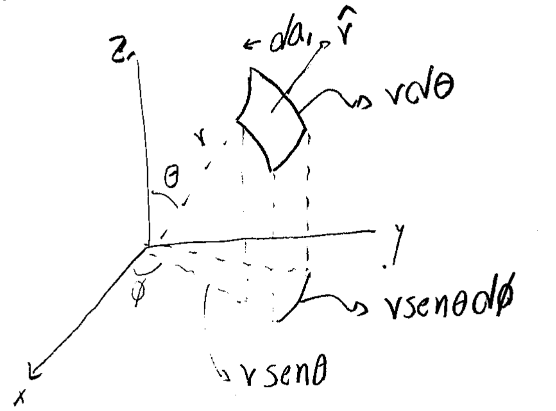
$$d\vec{l} = dr\,\hat{r} + r d\theta\,\hat{\theta} + r \operatorname{sen}\theta d\phi\,\hat{\phi}$$

o elemento de volume $d\tau$ em coordenadas esféricas

$$d\tau = dl_r\, dl_\theta\, dl_\phi = r^2 \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$$

o elemento de superfície da casca de uma esfera de raio r const.

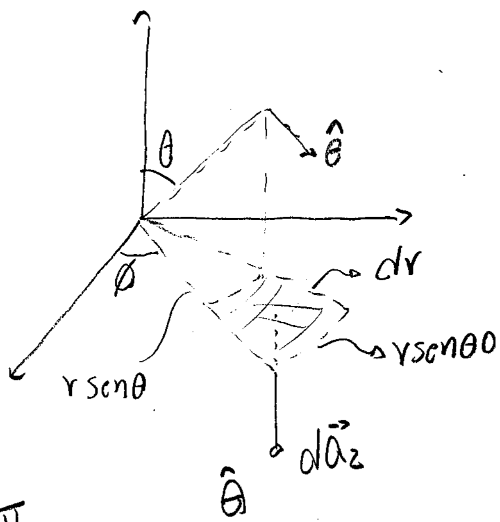
$$d\vec{a}_1 = dl_\theta\, dl_\phi\,\hat{r} = r^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi$$



um elemento de área no plano XY, com θ const. $(\theta = \frac{\pi}{2})$

$$d\vec{a}_2 = dl_r\, dl_\phi\,\hat{\theta} = dr\, r\operatorname{sen}(\tfrac{\pi}{2}) d\phi\,\hat{\theta}$$

$$d\vec{a}_2 = r\, dr\, d\phi\,\hat{\theta}$$



obs. r varia de $0 \to \infty$; ϕ varia de $0 \to 2\pi$

e θ de $0 \to \pi$