



## Encontro Gaúcho de Educação Matemática

A Educação Matemática do presente e do futuro:  
resistências e perspectivas

21 a 23 de julho de 2021 - UFPel (Edição Virtual)

### MATEMÁTICA E ARTE NA COMPREENSÃO DE CONCEITOS

Marcelio Adriano Diogo<sup>1</sup>

Marlise Geller<sup>2</sup>

**Eixo:** 4 – Educação Matemática: Tecnologias Digitais e Educação a Distância

**Modalidade:** Relato de Experiência

**Categoria:** Professor de Educação Técnica e Tecnológica

#### Resumo

Este trabalho tem como objetivo apresentar uma proposta de intervenção no estudo do conteúdo de inequações e representações de curvas no plano vistas no Ensino Médio. Tem como fundamentação a teoria dos registros de representação semiótica, de Raymond Duval, que aponta que não existe conhecimento matemático que possa ser mobilizado sem o auxílio de uma representação e enfatiza a importância da etapa da conversão entre diversos tipos de registros. Como uma inequação determina uma região do plano, é utilizado o *software* Geogebra para reproduzir uma imagem a partir de sistemas de inequações. Os alunos escolhem uma figura e com os conhecimentos desenvolvidos previamente, determinam com auxílio do *software* as equações das curvas que modelam as diversas regiões que formam a imagem. O estudo do conteúdo a partir dessa abordagem proporcionou melhora de compreensão em comparação com o sistema usual de apresentação desse tópico nas aulas, sendo o uso da tecnologia importante pela rapidez com que mostra os resultados das inequações escolhidas pelo estudante, permitindo verificações instantâneas do acerto ou erro na construção.

**Palavras-chave:** inequações; registros; semiótica; modelagem; Geogebra

#### Introdução e referencial teórico

O conceito de função constitui-se numa ideia importante que os estudantes se deparam logo na chegada ao Ensino Médio. A representação da relação entre duas grandezas que variam pode ser feita de diversos modos, seja no formato de tabelas ou de um texto, por meio de uma lei matemática, por pares ordenados ou por um gráfico, e é fundamental para a adequada apropriação do conceito envolvido.

---

<sup>1</sup> Universidade Luterana do Brasil, m.celo1974@gmail.com

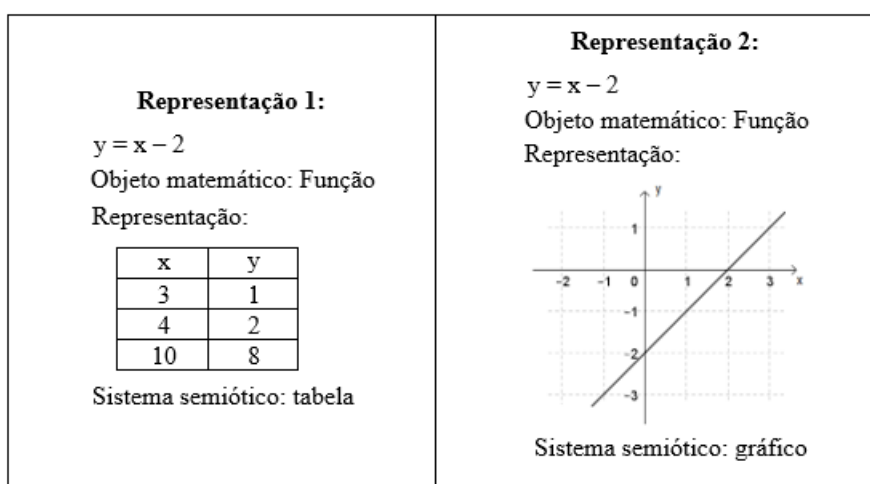
<sup>2</sup> Universidade Luterana do Brasil, marlise.geller@gmail.com

Mesmo no Ensino Superior, em especial nas disciplinas de Cálculo, a percepção de que uma curva no plano mostra justamente essa relação não é trivial e precisa ser bem explorada para ser melhor compreendida. A lei de uma função, representada por uma igualdade que associa de algum modo as duas grandezas envolvidas, gera um gráfico que aponta essa dependência. Por exemplo, a função  $y = x - 2$  permite a associação de pontos no plano cartesiano que geram uma reta, mas essa relação também poderia ser expressa por uma infinidade de pares ordenados, entre eles  $(3, 1)$ ,  $(5, 3)$  ou  $(10, 8)$ .

Um conteúdo pouco explorado no Ensino Médio é a representação no plano de uma inequação com duas variáveis, como, por exemplo,  $y < x + 3$ . É necessário que o estudante se aproprie desse significado e o amplie para se dar conta que esse modelo representa uma região do plano, que é limitada pela reta  $y = x + 3$ .

Segundo Duval (2009), os registros de representações constituem modos de representar um objeto matemático e o sistema em que podemos representá-lo é o registro semiótico. Esses constituem-se num sistema de comunicação próprio e possibilitam a organização de informações a respeito do objeto representado.

Vamos analisar os sistemas semióticos envolvidos na representação de  $y = x - 2$  e registrar as soluções segundo duas visões (representações) diferentes (figura 1):



**Figura 1** – Registro de representação semiótica  
Fonte: O autor

Os dois sistemas de representação se constituem em etapas do desenvolvimento matemático. A tabela requer basicamente uma testagem na função para produzir os dados ao passo que o gráfico necessita da compreensão que diante de uma infinidade de soluções é



possível expressá-las por uma linha que associa em cada ponto dela um par que verifica a expressão. Damm afirma que “sem as representações semióticas torna-se impossível a construção do conhecimento pelo sujeito que aprende. É por meio das representações semióticas que se torna possível efetuar certas funções cognitivas essenciais ao pensamento humano” (DAMM, 2002, p. 143).

Duval (2009) nos leva a pensar sobre com qual esquema organizar uma sequência de atividades que favoreça a aquisição de um novo conhecimento matemático e como passar de atividades práticas que mobilizem esse conhecimento para sua formulação matemática. Neste contexto,

A questão exige a referência a um esquema teórico para a organização de sequência de atividades que conduza progressivamente a passarem do que elas já conhecem para a aquisição de um novo conceito introduzido, ou do novo procedimento matemático. Mas a descrição dessa progressão local não se limita ao ponto de vista matemático, mas também de outros pontos de vista como o ponto de vista pedagógico e o ponto de vista cognitivo. O ponto de vista pedagógico concerne à organização do trabalho individual ou em grupo, a condução das trocas entre os alunos. O ponto de vista cognitivo diz respeito ao processo de compreensão e aquisição de conhecimentos. (FREITAS; RESENDE, 2013, p. 19)

Para compreender como ocorre a aquisição dos conceitos, é necessário ter clareza sobre as duas atividades cognitivas envolvidas na mobilização e coordenação dos registros: o tratamento e a conversão. O tratamento de uma representação é a transformação dessa representação no mesmo registro onde ela foi inicialmente formada, ou seja, é uma transformação estritamente interna a um registro. A conversão de uma representação, por sua vez, é uma transformação desta em uma representação em um outro registro, conservando a referência do objeto matemático, sendo a etapa responsável pela construção do conhecimento. Ao término de uma sequência de atividades, a aquisição deve resultar em um saber fazer que o aluno poderá utilizar para resolver outros problemas práticos ou matemáticos.

A representação gráfica de inequações é um assunto pouco explorado e o modo de apresentação da solução é geralmente desprovido de aprofundamento. Sob o ponto de vista dos registros semióticos, sua representação algébrica e gráfica são transformações semióticas completamente diferentes.

O objetivo desse trabalho, portanto, é oferecer uma alternativa embasada pela teoria dos registros de representação semiótica para o aluno se apropriar do significado da representação gráfica de inequações. Assim, a proposta é apresentar o conteúdo de inequações a partir de uma

atividade que possibilite ao aluno ir testando suas escolhas com o uso de um *software* gráfico e se apropriando da teoria e dos conceitos envolvidos. Para isso, o aluno não parte do recebimento de uma representação, mas recebe uma imagem e tem o desafio de reproduzir as diversas partes da figura a partir do uso de equações e inequações matemáticas, fazendo uso do *software* Geogebra.

## Metodologia

A proposta do trabalho foi aplicada numa turma de 1º ano do Ensino Médio-Técnico no Instituto Federal Sul-rio-grandense (IFSul), em 2019, após o estudo de funções, e suas respectivas representações gráficas, e da resolução algébrica de inequações. A compreensão de que a lei matemática da função leva a um registro de representação gráfica possibilitou a conversão do conhecimento e o estabelecimento de conclusões importantes no desenvolvimento dessa atividade.

Inicialmente, a turma recebeu a figura de uma bandeira de um país para determinar as equações das curvas que compõem a imagem. O uso da bandeira é particularmente ideal na primeira fase do trabalho, pois as linhas que a representam são segmentos de reta ou círculos, o que facilita a associação da curva com sua equação algébrica.

Na imagem da bandeira (figura 2) é estabelecido um sistema de eixos coordenados que permitem a criação de pontos no plano e a associação de uma lei matemática que representa uma curva. As regiões que formam a bandeira são definidas, então, por um sistema de inequações.

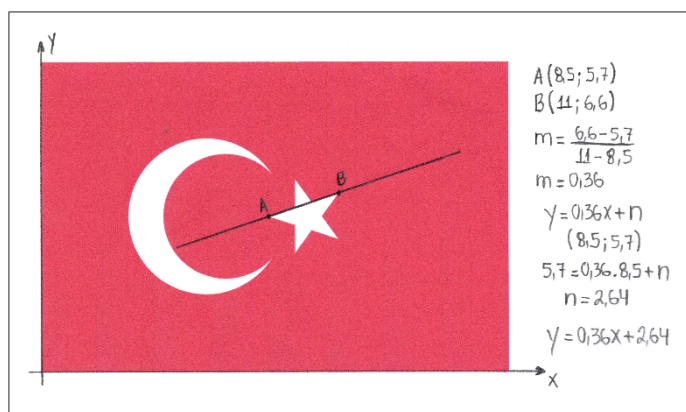


Figura 2 – Bandeira da Turquia com determinação de curvas

Fonte: O autor

Esperava-se, aqui, a associação entre a representação algébrica e a geométrica, permitindo ao estudante que se estabeleça a conversão entre os dois registros de representação semiótica, pois Duval (2009) afirma que é a atividade de conversão que aparece como atividade fundamental de transformação representacional, e, por isso, aquela que conduz aos mecanismos da compreensão.

A etapa seguinte, do uso das inequações propriamente dito para gerar as regiões, é explicitada ao longo de 2 períodos letivos, com apresentação detalhada do conteúdo e a problematização do significado. Nessa atividade, as curvas são determinadas manualmente, com uso de régua para a determinação dos pontos e o cálculo da expressão algébrica das retas e circunferências. Esse momento dá sustentação teórica para a atividade fim e consiste na explicação e determinação conjunta das regiões da imagem, sendo que ao final o professor realiza em tempo real a inserção no Geogebra das inequações obtidas pelo grupo, projetando a construção parte a parte da bandeira na sala de aula.

A partir da apropriação desse conhecimento, propõe-se ao estudante participar da segunda fase do trabalho, que consiste na distribuição de uma obra com o desafio de representá-la apenas com equações e inequações matemáticas. Nessa etapa, emprega-se o *software* Geogebra para maximizar o tempo de determinação das equações das curvas a fim de gerar as inequações que irão dando forma ao trabalho.

A seguir podem ser verificadas diferentes etapas para obtenção do resultado final da atividade a partir de um quadro do artista Romero Britto. A figura 3 mostra a incorporação da imagem na tela do Geogebra.

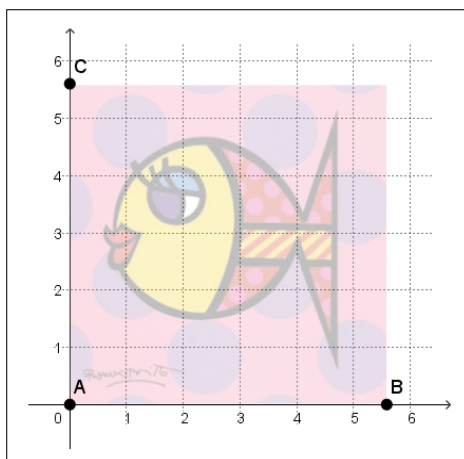


Figura 3 – Imagem da obra incorporada ao Geogebra

Fonte: O autor

O Geogebra é um *software* que associa a parte geométrica com a algébrica, de modo que um traçado ou construção na Janela de Visualização ocasiona a respectiva representação na Janela de Álgebra. Na sala de aula, o professor, com uso do projetor multimídia, mostra a imagem e apresenta as ferramentas do *software* que serão utilizadas, a saber, reta definida por dois pontos, circunferência definida por três pontos e elipse definida por 5 pontos. O professor indica a ferramenta Ampliação para aumentar a exatidão das determinações e destaca a Janela de Álgebra com as equações geradas. A figura 4 mostra diversas equações representando retas e circunferências.

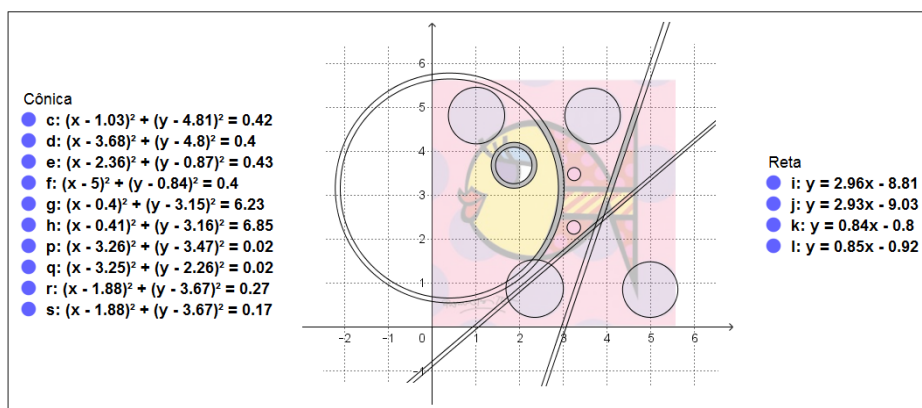


Figura 4 – Determinação de equações no Geogebra

Fonte: O autor

Durante um período de aula, as regiões vão sendo construídas com o uso de sistemas de inequações, utilizando o conectivo lógico E, simbolizado pelo sinal  $\wedge$ , que é obtido no próprio *software*. É necessário usar as inequações para progressivamente ir dando forma à obra escolhida, ou, dito de outro modo, ir desenhando com linguagem matemática o que um artista realizou com tinta e pincel. A figura 5 mostra essa evolução realizada pelo professor.

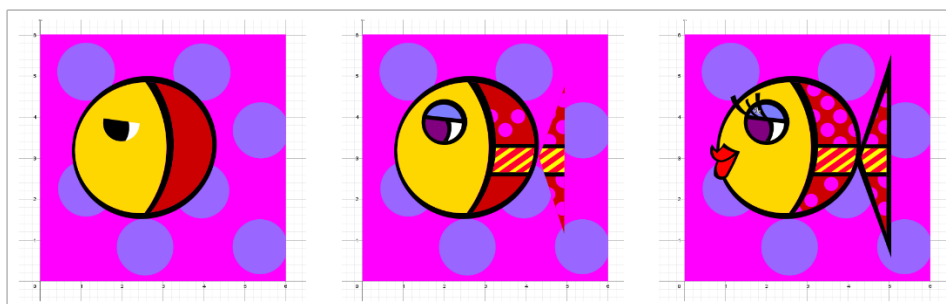


Figura 5 – Fases da reprodução por inequações no Geogebra

Fonte: O autor



Por conta da primeira experiência com a bandeira, o estudante já se apropriou do conhecimento sobre o efeito que tem a representação no plano de uma inequação com duas variáveis. Nessa etapa, salienta-se o processo de modelagem matemática necessário para dar conta do problema. É possível observar que as formas envolvidas nem sempre se constituem em polígonos ou partes com regularidades (vide a boca do peixe), o que ocasiona a necessidade o uso de aproximações simplificadoras representadas em termos matemáticos. Segundo Bean (2001), para configurar a modelagem, é essencial duas características que a definem: formulação de hipóteses e aproximações simplificadoras na proposta de solução. Assim, o modelador, ao fazer modelagem, simplifica ou reduz o objeto para facilitar a aplicação da matemática.

O tempo total de preparação que antecede a atividade final é de quatro períodos de 45 minutos. Desse tempo, um período é destinado ao aprendizado básico das funções do *software* Geogebra e o restante usado na modelação de algumas regiões da figura utilizada.

## Resultados e discussão

A atividade final é facultativa e consiste na escolha livre de obras para serem reproduzidas a partir dos conhecimentos desenvolvidos. O grau de dificuldade do projeto é escolhido pelo estudante e determina a avaliação mais ou menos criteriosa do resultado alcançado. Assim, a reprodução de uma imagem com regiões de contornos não regulares tem uma avaliação que considera essa dificuldade e valoriza o trabalho, embora a utilização de figuras mais simples seja incentivado para que todos possam realizar a tarefa.

O uso de aproximações simplificadoras é fundamental para obter as partes que compõem a obra. O professor, em aula anterior, já proporcionou a visualização dessa etapa, a da modelagem por hipóteses que vão modelando o que se deseja, usando o Geogebra para determinação das curvas e geração das regiões.

O estudante no desenvolvimento desse trabalho explora fundamentalmente dois tipos de registros de representação semiótica de regiões no plano – a gráfica e a algébrica. Essa transformação não é simples e o professor passa a ser o sujeito mediador dessa conversão, oferecendo suporte constante ao longo da atividade. A figura 6 mostra o resultado alcançado por uma discente (imagem central) em comparação com a obra original (imagem à direita) do artista Romero Brito. À esquerda, é possível visualizar parte das inequações usadas para gerar a representação.

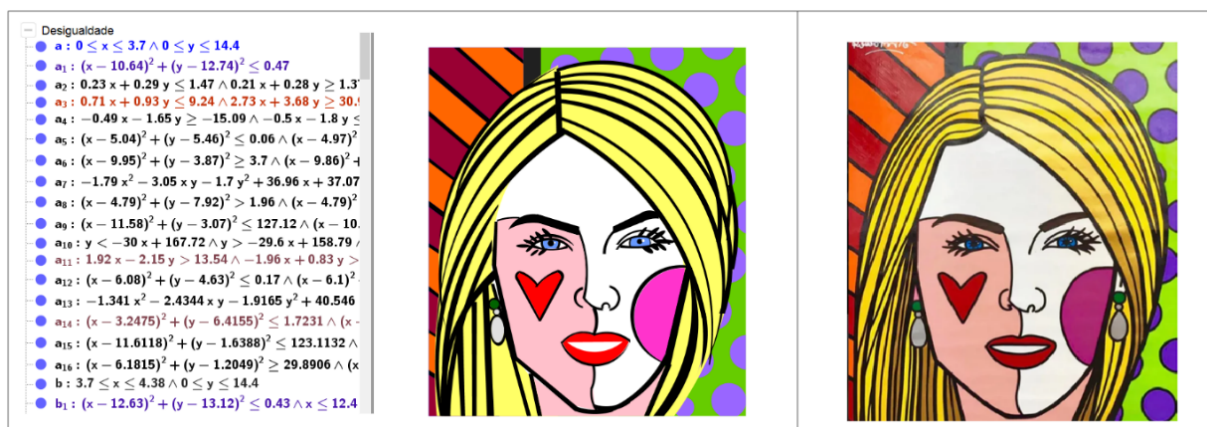


Figura 6 – Reprodução de imagem no Geogebra  
Fonte: O autor

Esse resultado foi alcançado ao fim do prazo de um mês dado para a realização do projeto. Ao longo desse período, dada a complexidade da figura escolhida, vários sistemas de apoio foram oferecidos, como reforço no contraturno escolar e assistência por mensagens de texto com uso de imagens. As dificuldades encontradas nessa reprodução foram comuns a várias outras e ocorreram tanto na etapa de conversão como na de tratamento da representação semiótica, cujo domínio, segundo Duval (2009), é fundamental para a aprendizagem.

Na fase da conversão, ou seja, na transformação da imagem em uma representação no registro de estrutura algébrica, os estudantes se depararam com a dificuldade da escolha de qual desigualdade usar no sistema de inequações. Para exemplificar, tomemos uma região que é representada por  $-0.49x - 1.65y \geq -15.09 \wedge -0.5x - 1.8y \leq -15.64 \wedge y \leq 7.9 \wedge 4.23 \leq x \leq 5.88$ . Usar ‘maior igual’ ou ‘menor igual’ tem implicações diretas na reprodução da região e o entendimento de qual conjunto dessa simbologia utilizar para obter a porção da obra que se deseja reproduzir constitui-se num obstáculo a ser transposto. Apesar do uso do *software*, que mostra instantaneamente a região, o método tentativa e erro não é eficiente dada as dimensões do trabalho, sendo a compreensão dessa etapa condição necessária para o sucesso na atividade.

O recorte de uma porção da obra para reproduzir, a ser modelado por curvas distintas, também se constituía num desafio, pois várias porções exigiam vários modelos e a consequente estruturação deles em sistemas de inequações. Neste contexto, também houve dificuldade e necessidade de apoio do professor para reforçar a teoria desenvolvida na fase inicial de reprodução da bandeira na sala de aula. Conforme Damm (2002), a coordenação entre esses vários registros de representação é o que garante a apreensão do objeto matemático e a sua



correta conceitualização, o que justificava a mediação do professor, principalmente na fase inicial do trabalho até o estudante desenvolver sua autonomia.

A construção contínua dessa obra, e de outra, pode ser acompanhada nos seguintes endereços, mostrando o trabalho realizado quando o estudante está devidamente envolvido com a atividade:

- Hickmann: <https://www.geogebra.org/m/m56pdqfq> e <https://youtu.be/W5gZu8yEI1g>
- Abraço: <https://www.geogebra.org/m/fpgss39e> e <https://youtu.be/A9X9XQaeciI>

Para ilustrar escolhas de obras com grau de dificuldade menor, a figura 8 mostra trabalhos desenvolvidos no mesmo projeto. O tempo destinado a entrega das atividades, estas sendo realizadas em momentos fora da sala de aula, foi de 30 dias e, além das sessões de reforço, o professor oferecia auxílios nas aulas para resolver problemas pontuais que surgiam.



**Figura 8** – Reprodução de imagem no Geogebra  
Fonte: O autor

O traçado de curvas no plano originadas a partir de funções ou no estudo de Geometria Analítica costumeiramente provoca incompreensões e dúvidas persistentes. Encontrar alternativas que produzam melhores resultados nesse aprendizado é função do professor e de um sistema educativo preocupado com a aprendizagem dos estudantes.

### Considerações finais

O trabalho aqui descrito envolve uma proposta voltada ao processo de aprendizagem, aliando tecnologias digitais com a modelação matemática onde a criatividade tem papel central na busca de soluções com o característica de os resultados obtidos poderem ser testados instantaneamente, favorecendo a retenção e a compreensão do assunto estudado.



Ao propor um sistema de inequações para a determinação de uma região do plano, imediatamente há o retorno se a escolha foi acertada e, caso contrário, a necessidade de análise por parte do estudante das equações escolhidas promove nítido aprendizado, já que somente a partir da descoberta do erro se evolui no trabalho. O projeto permite, portanto, a associação de habilidades importantes na Matemática, quais sejam a busca de soluções a partir de problemas surgidos e o uso consciente da teoria matemática na busca de alternativas para a resolução desses problemas.

Como consequência do projeto, citam-se dois resultados consistentes: em primeiro lugar, a atividade introdutória, da bandeira, com determinação manual das equações, principalmente de retas, proporcionou melhora nos acertos em questões de determinar leis de funções afins a partir do gráfico ou de dois pontos fornecidos; num segundo momento, a associação da inequação como uma região do plano levou a aprendizados efetivos testados com questões em avaliações que se seguiram onde eram oferecidas regiões determinadas por curvas dadas e solicitadas o sistema de inequações correspondente.

Um ponto que merece reflexão é a necessidade do uso de computadores ou afins para que o projeto possa ser desenvolvido. Tal uso de fato é necessário, mas não obrigatoriamente em um laboratório de informática na escola. Toda a atividade pode ser conduzida inicialmente na sala de aula e as instruções referentes ao Geogebra podem ser oferecidas em tutoriais e vídeo aulas produzidas pelo próprio professor e assistidas em casa. Não é motivo, portanto, para não se investir na proposta.

## Referências

BEAN, Dale. O que é modelagem matemática? In: **Educação Matemática**, São Paulo-SP, v.8, n. 9/10, p.49-61, 2001.

DAMM, R. F. Registros de representação. In: MACHADO, S. D. (Org.). **Educação matemática: uma introdução**. São Paulo: SEDUC, 2002, p.135-153.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano**: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais. Trad. Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

FREITAS, J. L. M.; REZENDE, V. Entrevista: Raymond Duval e a teoria dos registros de Representação Semiótica. **Revista Paranaense de Educação Matemática**. Campo Mourão, v.2, n.3, jul./dez. 2013.