Encontro Gaúcho de Educação Matemática
A Educação Matemática do presente e do futuro: resistências e perspectivas
21 a 23 de julho de 2021 - UFPel (Edição Virtual)

CONSTITUIÇÃO DOS NÚMEROS INTEIROS: UM MOVIMENTO HISTÓRICO

Thanize Bortolini Scalabrin[1]

Anemari Roesler Luersen Vieira Lopes[2]

Simone Pozebon[3]

Eixo: 03 – Cultura, Etnomatemática, História da Matemática e da Educação Matemática

Modalidade: Comunicação Científica

Categoria: Alunos de Pós-Graduação

Este artigo constituiu-se a partir de um recorte de uma pesquisa de doutorado que está sendo desenvolvida no Programa de Pós-Graduação em Educação, na linha de pesquisa Docência, Saberes e Desenvolvimento profissional, na Universidade Federal de Santa Maria (UFSM) no âmbito do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática (GEPEMat). Seu principal objetivo foi apresentar uma discussão sobre o movimento de constituição dos conceitos que envolvem os números inteiros. O respaldo teórico utilizado foi a Teoria Histórico Cultural (THC). Para atingir esse objetivo foram analisados livros de história da matemática, que trazem informações sobre a sistematização desse conteúdo matemático. A partir da constituição histórica dos números inteiros, constatou-se que os movimentos quantitativos da natureza, a mão única numérica, a mão dupla, direção das quantidades, noção de reta e a ideia de posição, são nexos conceituais constitutivos de sua organização e, portanto, cruciais para a aprendizagem escolar sobre esses números. Além disso, temos também alguns apontamentos sobre indícios de como matemáticos usavam um conjunto de regras para operar com essas quantidades.

Palavras-chave: Teoria Histórico-Cultural; números inteiros; pesquisa teórica; aprendizagem matemática.

Considerações iniciais

O processo de ensino e aprendizagem dos números inteiros ainda hoje é cercado por dificuldades, tanto no que se refere a organização do ensino por parte do professor de forma

[1] Doutoranda no Programa de Pós-Graduação em Educação da UFSM. E-mail: thanize_bortolini@hotmail.com
[2] Docente do Centro de Educação da Universidade Federal de Santa Maria; do Programa de Pós-Graduação em Educação e Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e ensino de Física. E-mail: anemari.lopes@gmail.com
[3] Docente da Faculdade de Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. E-mail: spozebon@gmail.com

intencional, de modo com que os alunos consigam se apropriar dos nexos conceituais que envolvem esse conceito, como as dificuldades que os alunos enfrentam no processo de aprendizagem. Nesse contexto, muitas vezes, os estudantes, não conseguem compreender o significado das quantidades negativas, reconhecer a existência de números em dois sentidos na reta numérica, a partir do zero, bem como entender a lógica desses números.

A partir do reconhecimento desses possíveis problemas que os alunos podem vir a se deparar no processo de educação escolar, começamos a refletir se estes não estariam ocorrendo pela ênfase que normalmente é dada às regras de sinais e a não compreensão dos nexos conceituais que envolvem esse conteúdo. Nessa direção, esse artigo tem como objetivo apresentar uma discussão sobre o movimento de constituição dos conceitos que envolvem os números inteiros, a partir do que nos apontam livros de história da matemática. Inicialmente apresentamos, os pressupostos teóricos que norteiam esse estudo e a metodologia utilizada. Posteriormente trazemos uma sistematização de nexos conceituais importantes e delineadores da constituição do conceito de número inteiro, finalizando com algumas considerações sobre o estudo.

Alguns pressupostos orientadores

Amparadas na Teoria Histórico-Cultural, pautada nos estudos de Vigotski (2007), entendemos que o homem se difere dos animais porque é um ser de natureza social, que se desenvolve em sociedade, e esse desenvolvimento é resultado da cultura em que ele está inserido. Mas também compartilha da mesma natureza biológica dos animais, aquela que carrega características da espécie, as quais não são construídas por ele.

O ser humano é produto dessas duas naturezas e, de acordo com Leontiev (1978, p. 262), "diferentemente do desenvolvimento dos animais, estava e está submetido não às leis biológicas, mas a leis sócio-históricas". Então, quando estas passam a agir sobre a natureza, realizando mudanças intencionais, marca o início de um processo de desenvolvimento, de humanização, ou seja, marca a passagem a vida em sociedade, a qual está organizada com base no trabalho. É pelo trabalho, que o homem se desenvolve e se humaniza, pois ele permite a superação da natureza biológica em direção a uma natureza adquirida, a qual o ser humano atua sobre ela e a modifica – natureza cultural.

Fazendo relação com a temática desse artigo, ao se deparar, por exemplo, com problemas que envolvem quantidades negativas que surgem em sua vida em sociedade, o homem sente a necessidade de buscar modos de resolvê-los. Para isso, historicamente foi estabelecendo relações com outros indivíduos, levando à produções coletivas relativas ao desenvolvimento dos nexos conceituais que estruturam o que hoje conhecemos como conjunto dos números inteiros.

A organização da pesquisa

A partir do referencial teórico, brevemente apresentado anteriormente, analisamos o que os livros de história da matemática trazem sobre o movimento de constituição dos conceitos que envolvem os números inteiros. Para isso, nos aproximaremos do seu movimento lógico-histórico buscando trazer reflexões relativas aos modos de sistematização organizados no contexto escolar.

> Trata-se, assim, de investigar a relação entre o movimento lógico-histórico do conceito (explicitando a dimensão teórica da prática social que pôde ser objetiva nas diferentes esferas da vida) e os modos de ação possíveis e necessários para a apropriação de tais conceitos por cada sujeito singular. Essas relações essenciais da atividade pedagógica expressam-se e realizam-se com base na unidade entre a atividade de ensino e a atividade de estudo. (ARAUJO E MORAES, 2017, p. 54)

Ao partirmos do pressuposto de que para que os seres humanos consigam desenvolver suas máximas capacidades torna-se fundamental a apropriação de conhecimentos teóricos, defendemos a relevância de estudar o movimento lógico-histórico dos conceitos, ou seja, todo percurso que a humanidade fez para desenvolvê-los, bem como os modos de ação que as novas gerações vão elaborando para conseguir se apropriar deles. Por isso, no próximo item do artigo, sintetizaremos esse movimento, derivado de nossa investigação teórica.

Movimento de constituição histórica dos números inteiros

Ao pensarmos nos nexos conceituais relativos aos números inteiros, que são os elementos essenciais no processo de constituição do conceito de números inteiros, buscaremos compreender a necessidade histórica que levou o homem a criá-los. Nos enganamos quando pensarmos que tudo ocorreu de forma cronológica, que primeiro surgem os números naturais e depois os números negativos. O que podemos afirmar é que com a formalização do conjunto dos números naturais, ficou mais fácil conceber que os números negativos são seus simétricos, em relação ao zero.

Há muitos anos, os povos primitivos pensavam apenas em *mão única*, sem oposição. Aqui eles dependiam da natureza e “ao invés de dominar os diversos movimentos quantitativos, eram por eles dominados” (LIMA E MOISES, 1998, p. 7). Surge a ideia que o universo é harmônico, “que tudo existe sem oposição, sem contrário, numa mão única” (p. 7). Heráclito descobriu, segundo Lima e Moisés (1998, p. 10), que o princípio universal da natureza é a fluência, “a compreensão de que o mundo está em permanente evolução, que todas as coisas, a todo momento, se transformam, tudo flui, tudo devem, que tudo pode e deve ser compreendido como movimento”.

A ideia de que tudo flui e se transforma, faz com que o homem vá conhecendo melhor os movimentos quantitativos e descubra que nesses existem contrários, e “é a luta entre os contrários que determina a existência do movimento” (LIMA E MOISÉS, 1998, p. 11). Então, como nos colocam os autores, para Heráclito, universo harmônico é a ideia de que tudo existe em mão dupla, como luta dos contrários.

A civilização Chinesa, foi uma das primeiras, que teve como necessidade adotar a harmonia da luta dos contrários, para lidar com o fenômeno climático das monções, que consiste na alternância entre fortes chuvas e longas secas durante diferentes períodos do ano. Com a finalidade de obter uma harmonia universal, os chineses tinham uma visão de mundo denominada Taoismo, criada por Lao Tsé no século IV a.C., a qual centra-se no princípio dos contrários yang e yin, em todos os aspectos da vida. Para representar esses contrários, eles utilizavam um círculo, divido em duas partes, em que o yang é representado pelo branco, é o princípio da luz, e o yin pelo preto, é a escuridão, “constituem os contrários que compõem a harmonia e o equilíbrio da totalidade” (LIMA E MOISÉS, 1998, p. 15).

Assim como a civilização chinesa foi uma das primeiras a adotar a harmonia da luta dos contrários, também foi a primeira a escrever os contrários. Para isso, utilizavam um sistema de numerais em barras, que consistia em duas coleções, sendo uma vermelha para representar os acréscimos, coeficientes positivos e uma preta para os seus contrários, negativos.

Já na Índia antiga, encontramos alguns registros que evidenciam as contribuições de Brahmagupta, que viveu em 628 d.C. Diferentemente dos chineses que não acreditavam que um número negativo poderia ser solução de uma equação, Brahmagupta encontrou soluções gerais de equações quadráticas, mesmo quando uma delas é negativa.

Os árabes rejeitavam as raízes negativas e grandezas negativas, no entanto, eles faziam uso de regras semelhantes ao que hoje conhecemos como regra de sinais. Já os gregos conheciam as grandezas negativas através dos seus teoremas geométricos. Segundo, Boyer e Merzbach (2015) foram os hindus que as converteram em regras numéricas sobre números negativos e positivos.

A partir do século X, com a crise do feudalismo e o aumento da população na Europa, não havia alimento para todos e o povo começou a se mudar para as cidades. A produção não é mais somente para seu sustento, mas sim, para troca de mercado, ocorrendo a passagem da economia de subsistência para a economia mercantil.

Possivelmente o comerciante inicialmente registra esse movimento através de palavras, no entanto, com o aumento dos seus clientes e consequentemente de suas vendas, esse método torna-se ineficiente, e ele precisa encontrar uma maneira mais rápida de fazer esse registro. Dessa forma, como Lima e Moisés (1998, p. 28) destacam, ao movimentar dinheiro e estoques de produção, o homem passa a lidar, com a mão dupla. Assim, quanto mais os seres humanos atuam nos *movimentos quantitativos da natureza* e se desenvolvem, mais eles percebem as *limitações* de utilizar a *mão única numérica* e mais aumenta a necessidade de criação do número com *mão dupla*.

Além disso, este também foi um período de grandes descobertas matemáticas e as primeiras viagens marítimas ao redor do mundo. Começam a surgir os primeiros sinais para representar as operações matemáticas, com os comerciantes italianos e ingleses. Até esse momento os números indicavam apenas quantidades de objetos em uma coleção, mas agora com os números com sinais, eles passaram a indicar também *a direção dessa quantidade*, ou seja, se há excesso representamos com o sinal de mais (+) e se há falta com o sinal de menos (-).

Ainda no renascimento, em 1489, Johann Widman publicou um livro de aritmética comercial. Este é considerado o mais antigo livro em que os sinais de + e - aparecem impressos, os quais eram "usados inicialmente para indicar excesso e deficiência em medidas em armazéns, mais tarde tornaram-se símbolos para as operações aritméticas familiares". (BOYER e MERZBACH, 2015, p. 199).

Até então, muitas vezes quando um indivíduo, ao resolver alguma situação problema, chegasse em um número negativo, ele a deixava de lado, chamando esse resultado de um número absurdo ou fictício. Não que isso não tenha acontecido após a época do renascimento, mas aqui temos um marco histórico para a aceitação desses números e para que eles fossem melhores vistos, já que estavam sendo muito utilizados no comércio. Na Europa Ocidental, os matemáticos passam a representar os números com sinais por pontos em uma reta, a direita do zero ficava os números com sinais positivos e a esquerda os números com sinais negativos

Na metade do século XVI, surgiram alguns livros alemães de álgebra, dentre os quais pode ser destacado o *Arithmetica Integra* (1544) de Michael Stifel, a qual trouxe como contribuição mais importante para a época o

> tratamento dos números negativos, radicais e potencias. Usando coeficientes negativos em equações, Stifel pôde reduzir a multiplicidade de casos de equações quadráticas ao que aparecia como uma única forma; mas teve explicar, por uma regra especial, quando usar + e quando -. (BOYER e MERZBACH, 2015, p. 199).

Aqui não temos como saber qual regra especial foi essa, se era ou não baseada nas que os Hindus já conheciam. Mas, assim como os Chineses, Stifel se recusou a admitir que uma equação poderia ter raízes com números negativos, apesar de ser um dos muitos autores alemães que difundiu os símbolos de + e – e que conhecia muito bem as propriedades dos números negativos, os quais chamavam de numeri absurdi.

Na sua obra *Ars magna*, de Gerônimo Cardano, avançou em relação a Stifel, que só trazia em seu livro as equações quadráticas. Gerônimo apresentou não só a resolução de equações cúbicas, como quárticas. No entanto, os números negativos causaram certa dificuldade para ele, "porque não são aproximáveis por números positivos, mas a noção de sentido sobre uma reta tornou-os plausíveis" (BOYER, 1996, p. 197). Aí vem a *noção de reta* para auxiliar nessa questão, então ele usou os números negativos, mas os chamou de numeri ficti.

Uma curiosidade interessante, que este mesmo autor citado traz, é que se um algebrista desejava negar a existência dos números negativos, eles diziam, assim como os gregos antigos faziam, que as equações $x^2 = 2$ e $x + 2 = 0$, *não são resolúveis*. Aqui podemos perceber que como os povos antigos não conheciam os números negativos ou até conheciam, mas achavam difícil compreendê-los, muitas vezes sua existência foi negada ao longo da história e os problemas que deles dependiam, acabavam ficando sem resolução.

Thomas Harriot, foi um importante matemático na Inglaterra, porém, só teve seus estudos publicados 10 anos após sua morte, em 1621. A ele atribui-se a descoberta de duas notações: > maior que e < menor que, as quais foram utilizadas para substituir as palavras menor e maior, quando quisessem comparar dois números positivos e negativos. Ainda, segundo Guelli (2000, p. 14), nesse momento da história "observe também que qualquer número da reta dos números – positivo, negativo ou zero – é maior que qualquer outro colocado à sua esquerda e menor que qualquer outro à sua direita". Harriot, utilizou a ideia do matemático inglês Robert Record, de desenhar duas retas paralelas para indicar quantidades iguais, com uma pequena modificação, diminuiu um pouco esse sinal, utilizando "=" (igual) e passou a usá-los nas equações de Viète no lugar de "é igual a".

O matemático Descartes, em sua última obra da trilogia *La géométrie*, resolve muitas questões que geravam dúvidas no passado por parte de outras civilizações, ou somente de matemáticos, e provavelmente tenha iniciado essas obras em 1628.

> Diz como descobrir raízes racionais, se existem, como abaixar o grau da equação quando se conhece uma raiz, como aumentar ou diminuir as raízes de uma equação de qualquer quantidade, ou multiplicá-las ou dividi-las por um número, como eliminar o segundo termo, como determinar o número de possíveis raízes "verdadeiras ou "falsas" (isto é, positivas e negativas) pela bem conhecida "regra dos sinais de Descartes" e como achar a solução algébrica de equações cúbicas ou quárticas. (BOYER, 1996, p. 237).

Com isso percebemos que as equações consideradas por muitos povos e matemáticos como não resolúveis por conta de apresentarem soluções não possíveis com números naturais, mas sim, com números negativos, recebem notoriedade nessa obra. Provavelmente, essas descobertas feitas por Descartes, partiram de outros avanços que outros matemáticos já tinham feito, dos quais ele se apropriou e foi para além, trazendo novas descobertas e soluções para problemas antes ignorados. Moura (s.d., p.7), traz fundamentos para essa afirmação.

> Consideramos que o desenvolvimento da necessidade do conhecimento matemático está ligado à capacidade do sujeito relacionar-se com o conhecimento reflexivamente. E isto é o mesmo que adquirir a capacidade de olhar para o que já foi produzido de forma indagadora em busca de otimizar o que já parece bom. (MOURA, s.d., p. 7).

Todo esse processo que perpassam tanto aqueles que se dedicam ao estudo da matemática quanto os que lidam com seus problemas cotidianos, para tentar atender suas necessidades imediatas, faz parte de um movimento de produção de conhecimento a partir do que já foi produzido e vivenciado por gerações anteriores, dúvidas, frustração e também pela generalização de novas soluções para um mesmo problema. Por isso, a necessidade de se relacionar reflexivamente com a consolidação e síntese histórica dos números inteiros, pois tudo pode ser aperfeiçoado, inclusive as soluções de problemas.

Além desses avanços, que vão desde os movimentos quantitativos da natureza, a mão única numérica, a mão dupla, a direção das quantidades e a noção de reta, foi possível observar na Inglaterra a aceitação das grandezas negativas. Newton em 1707, publicou um livro com suas *Lições sobre Arithmetica Universalis*, em que considerou as grandezas negativas como conceitos legítimos da matemática.

Não muito distante dessa época, no século XVIII, mais precisamente no ano de 1750, segundo Roque (2012) difundiu-se na França um intenso debate que chegou até a Inglaterra, sobre as quantidades negativas. Para Fontenelle as quantidades negativas não poderiam ser entendidas somente como subtratativas, ou seja, aquelas que devem ser retiradas de outras, mas sim em dois aspectos: um quantitativo, o qual era admitido com maior frequência, e outro qualitativo, relacionado a *ideia de oposição*. Clairaut assim como Fontenelle, admitiu soluções negativas para equações. Já d'Alembert, criticou em Encyclopédie, os números negativos de maneira bem equivocada, ele aceitava a regra dos sinais nas operações, mas considerava incorreta a ideia de quantidades negativas menores que zero.

No século XIX, houve muitas discussões na França, frente às ideias de d'Alembert sobre os números negativos. Com isso, temos uma grande proliferação dos métodos algébricos e consequentemente a expansão das operações. Também temos a figura de outro matemático, Euler, que defendia que todas as grandezas podiam ser expressas por números e operações.

> Para Euler, o modo de se obter os números negativos era similar ao modo de se obter os positivos. No caso destes, somamos continuamente a unidade para obter os números naturais (assim denominados por ele): 0, +1, +2, ... Se, ao invés de continuar esse processo com adições sucessivas continuássemos na direção oposta, subtraindo unidades, obteríamos a série dos números negativos: 0, -1, -2, ... Esses números fossem positivos ou negativos, deveriam, segundo ele, ser chamados de "números inteiros". (ROQUE, 2012, p. 442)

Vemos uma primeira definição para o conjunto dos números inteiros, tal como temos hoje. No entanto, toda sua influência com relação aos números negativos, não teve grande repercussão na França. A partir dessas descobertas, muitas pessoas passaram a publicar trabalhos sobre a representação geométrica dos números negativos.

Ainda segundo Roque (2012, p. 443), o padre Adrien-Quentin Buée

> [..] usava a distinção entre os aspectos quantitativos e qualitativos dos números negativos proposta por Fontenelle, esclarecendo que os sinais de mais e de menos tem dois significados distintos que é preciso interpretar. O primeiro designa uma operação aritmética que, quando aplicada a um segmento de reta, define seu comprimento; já o segundo pode ser visto como uma operação geométrica que remete à ideia de direção.

Percebemos que ele levou em consideração as contribuições de Fontenelle e trouxe outras, como a ideia de direção. Além desse, temos Jean-Robert Argand que publicou em 1813 um artigo denominado *Ensaio sobre uma maneira de representar as quantidades imaginárias nas construções geométricas*, no qual "ele começa por tratar das quantidades negativas, afirmando que estas não podiam ser rejeitadas, sob o risco de se ter de questionar diversos resultados algébricos importantes" (ROQUE, 2012, p. 443). Temos aqui uma interessante contribuição, pois se ignorarmos os números negativos, não seria possível chegar a muitas soluções de problemas matemáticos.

Muitas foram as dificuldades, conflitos, avanços e retrocessos quando pensamos no conceito de números inteiros. O espaço deste artigo não nos permite apresentar todas, contudo, a partir do que trouxemos é possível identificar que existe um movimento histórico importante a ser levado em consideração, em especial, quando pensamos no processo de ensino e aprendizagem.

Algumas considerações

Ao fazermos uma reflexão sobre o movimento de constituição dos conceitos que envolvem os números inteiros, fomos percebendo as mudanças ocorridas ao longo da história da matemática, desde as antigas civilizações até as mais atuais. Processo este, que foi bastante longo e que desencadeou muitas discussões, talvez seja por isso que até hoje operar com esses números seja um desafio, tanto para o professor que organiza o ensino, como para o aluno que está em processo de aprendizagem.

Pensando no processo de ensino e aprendizagem e na importância da sistematização dos nexos conceituais relacionados a números inteiros em sua totalidade, destacamos alguns pontos que consideramos importantes ao longo desse artigo, que foram: os movimentos quantitativos da natureza, a mão única numérica, a mão dupla, direção das quantidades, noção de reta e a ideia de posição. Além disso, temos também alguns indícios que para operar com esses números, os matemáticos usavam um conjunto de regras, as quais podemos dizer que eram a síntese de longos processos de estudo e comprovações. Resta-nos, a partir deste estudo, pensar em como possibilitar aos estudantes da escola de hoje situações que os coloquem no movimento de apropriação dos números inteiros, levando em consideração o movimento histórico de sua constituição, na perspectiva de que isto lhes oportunize sua aprendizagem.

Agradecimentos

Agradecemos a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) ao financiamento concedido, o qual contribuiu para o desenvolvimento desse trabalho.

Referências

ARAUJO, E. S.; MORAES, S. P. G. de. Dos princípios da pesquisa em educação como atividade. In: MOURA, M. O. (Org.) **Educação escolar e pesquisa na teoria histórico-cultural**. São Paulo: Edições Loyola, 2017. Cap. 2, p. 47-70.

BOYER, C. B. **História da matemática**. São Paulo: Edgard Blücher LTDA, 1996.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da matemática**. São Paulo: Blucher, 2015.

GUELLI, N. **Contando a História da Matemátic**a: Números com sinais uma grande invenção. São Paulo: Editora Afiliada, 2000.

LEONTIEV. A. N. **O desenvolvimento do psiquismo**. Lisboa: Horizonte Universitáario, 1978.

LIMA, L.; MOISÉS, R. **O número inteiro:** numerando quantidades contrárias. São Paulo: Ciarte, 1998.

MOURA, M. O. **Educar com a Matemática:** saber específico e saber pedagógico. Universidade de São Paulo, São Paulo, s/d.

ROQUE, T. **História da matemática:** uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

VIGOTSKI, L. S. **A formação social da mente:** o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. São Paulo: Martins Fontes, 2007.