XIV EGEM
Encontro Gaúcho de Educação Matemática
A Educação Matemática do presente e do futuro: resistências e perspectivas
21 a 23 de julho de 2021 - UFPel (Edição Virtual)

DESIGN DE PROBLEMAS: UMA CONTRIBUIÇÃO AO ENSINO DE PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Thalia Leiria Pinto[1]
Eleni Bisognin[2]

Eixo: 02 – Formação de professores que ensinam Matemática

Modalidade: Comunicação Científica

Categoria: Aluno de Pós-Graduação

Resumo
Neste trabalho são relatados resultados de uma pesquisa realizada com estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática, com o objetivo de investigar as contribuições do *Design* de Problemas e da metodologia de Resolução de Problemas para a construção de conhecimentos matemáticos para o ensino de Progressão Geométrica. Foram propostos aos participantes da pesquisa dez problemas sobre o conteúdo de Progressão Aritmética e Progressão Geométrica os quais foram trabalhados de modo remoto. Os dados foram obtidos por meio das respostas escritas das atividades realizadas pelos alunos e das gravações das conversas realizadas por meio de vídeo conferências. Nesse artigo apresentamos a análise de uma das atividades relativas às Progressões Geométricas. Das análises realizadas concluiu-se que os alunos estão pouco familiarizados com a reformulação ou *redesign* de problemas, pois em suas respostas apareceram poucas modificações nos enunciados propostos. Em relação à construção de conhecimentos matemáticos para o ensino referentes às Progressões Geométricas, constatou-se que há indícios da construção de tais conhecimentos pelos licenciandos, embora a maioria das resoluções ainda sejam baseadas em aplicações de fórmulas.

Palavras-chave: Ensino de Matemática; Formação Inicial de Professores; *Design* de Problemas.

Introdução

A introdução de problemas matemáticos envolvendo o cotidiano propicia que os estudantes se sintam estimulados no processo de aprender. Desse modo, para propor problemas instigantes para os alunos, é possível utilizar o *Design* de Problemas, o qual é uma abordagem que possibilita que os problemas sejam reformulados de acordo com o contexto que os estudantes estão inseridos (FIGUEIREDO; GROENWALD, 2019).

No entanto, para que os problemas matemáticos colaborem efetivamente na aprendizagem dos alunos, o docente deve tanto saber o conteúdo matemático quanto saber

[1] Universidade Franciscana thalia.leiriap@gmail.com.
[2] Universidade Franciscana eleni@ufn.edu.br.

ensiná-lo. Neste contexto, Ball, Thames e Phelps (2008), baseados nos estudos de Shulman (1986; 1987), elaboraram categorias e subcategorias de conhecimentos primordiais para um professor ensinar Matemática. Tais categorias serão explanadas ao longo deste trabalho.

Esse trabalho apresenta um recorte de uma pesquisa de mestrado realizada no âmbito de um Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática que teve como objetivo investigar as contribuições do *Design* de Problemas para a construção de conhecimentos matemáticos para o ensino de Progressões Aritméticas e Geométricas por alunos de um curso de Licenciatura em Matemática.

Para o desenvolvimento da pesquisa foram propostos dez problemas envolvendo o conteúdo de progressões, porém, nesse trabalho, devido a limitação, é descrita uma das questões sobre Progressão Geométrica. Nessa questão é analisada a relevância de um *redesign* do problema proposto pelos alunos e o conhecimento matemático para o ensino dos futuros professores que emerge dessa análise.

Fundamentação Teórica

Figueiredo (2017, p. 89) traz a definição de *Design* como "uma atividade cujo planejamento, desenvolvimento e implementação envolve a tomada de decisões, a utilização de recursos e a criatividade do(s) *designer*(*es*)", tendo como intuito obter um resultado, o qual demonstre os objetivos iniciais pretendidos. Dessa maneira, por meio do *design*, se faz possível utilizar o *Design* de Problemas, o qual favorece a formulação e reformulação de problemas matemáticos (FIGUEIREDO; GROENWALD, 2019). A formulação ou reformulação faz com que o problema se torne mais claro e atrativo, aliando-se com a vivência dos alunos.

Os autores Stoyanova e Ellerton (1996) categorizam os problemas em três tipos: livres, semiestruturados e estruturados. Os livres são problemas baseados em uma situação que pode surgir naturalmente, havendo ou não uma orientação sobre o tema escolhido; os semiestruturados se baseiam na formulação de um problema a partir da exploração de uma situação aberta, englobando conhecimentos, capacidades, conceitos ou relações e; os estruturados se referem à formulação de problemas a partir de um problema bem definido (STOYANOVA; ELLERTON, 1996). O problema aqui abordado é do tipo estruturado, pois partiu de conceitos definidos pela pesquisadora.

Ainda, para que o professor realize a reformulação adequada dos problemas, é necessário que ele possua conhecimento sólido do conteúdo e conhecimento do conteúdo para o ensino. Shulman (1987) desenvolveu uma base do conhecimento para o ensino, a qual elencou sete conhecimentos necessários para um professor. Apoiados nos estudos de Shulman (1987), Deborah Ball e seus colaboradores aprofundaram suas pesquisas em relação ao ensino de Matemática, construindo categorias acompanhadas de subcategorias para os conhecimentos necessários a um professor de Matemática. A seguir têm-se a explanação sobre as categorias e subcategorias de acordo com Ball, Thames e Phelps (2008).

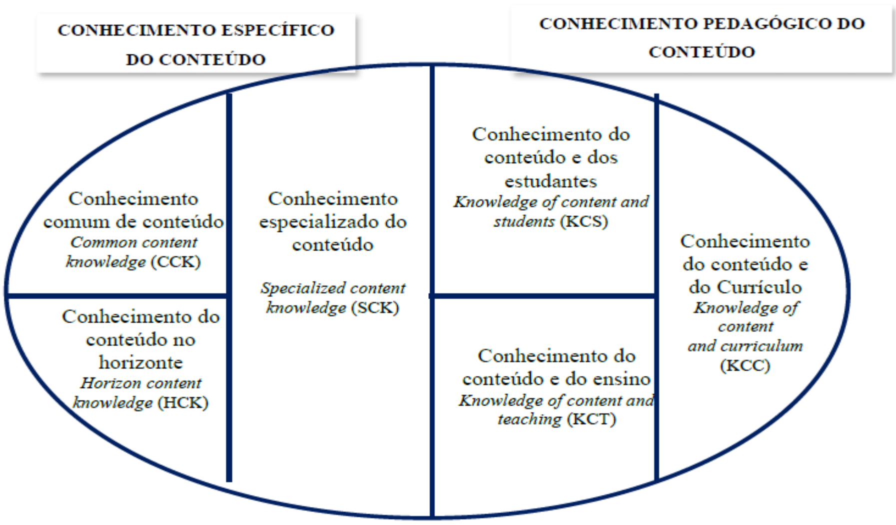

Figura 1 – Conhecimento de Matemática para o Ensino.
Fonte: Ball, Thames e Phelps (2008, p. 403).

Com base na Figura 1 acima, foi utilizada, neste trabalho a subcategoria "Conhecimento Especializado do Conteúdo (Specialized Content Knowledge (SCK)", a qual faz parte da categoria "Conhecimento Específico do Conteúdo". De acordo com Ball; Thames; Phelps (2008, p. 400) essa subcategoria baseia-se em habilidades e conhecimentos matemáticos específicos do ensino. Essa subcategoria possibilita observar o potencial dos futuros professores em desenvolver os conteúdos matemáticos de forma clara e compreensível para seus futuros alunos.

Sendo assim, no presente trabalho analisou-se somente o Conhecimento Especializado do Conteúdo, tendo o intuito de perceber a maneira como os licenciandos utilizam seus conhecimentos matemáticos para solucionar os problemas.

Aspectos Metodológicos

Essa pesquisa foi desenvolvida com seis alunos de um curso de Licenciatura em Matemática de um Instituto Federal Farroupilha, localizado no Rio Grande do Sul. Com o intuito de preservar as identidades dos licenciandos, eles foram denominados por P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 e P_6. Vale ressaltar que todos assinaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido.

Devido à pandemia, causada pela COVID-19, a aplicação da pesquisa ocorreu de forma remota. Assim, os participantes da pesquisa retornaram suas respostas por e-mail, enviando para a pesquisadora seus registros, tanto via arquivo de texto, quanto escritos a mão. Após a devolutiva dos problemas pelos licenciandos, a pesquisadora propôs encontros virtuais, via salas de vídeo no *Facebook*, a fim de promover discussões e reflexões sobre as respostas dos futuros professores.

É válido destacar que a pesquisadora realizou o processo de *Design* e *Redesign* nos dez problemas sobre os conteúdos de Progressões Aritméticas e Geométricas, para posteriormente, aplicá-los com licenciandos em Matemática.

Ainda, as respostas dos licenciandos foram analisadas de acordo com uma categoria de análise, contendo alguns indicadores, conforme mostra o Quadro 1.

Quadro 1 – Categoria e Indicadores para análise de dados

Categoria	Indicadores
Conhecimento Especializado do Conteúdo	Uso adequado de símbolos matemáticos.
	Uso adequado da linguagem Matemática.
	Resolução correta do problema proposto.

Fonte: Próprio autor.

Além disso, analisou-se como foi realizada a reformulação ou *redesign* do problema, tendo em vista a reformulação adequada do seu enunciado, a partir do problema proposto inicialmente em língua natural, seguindo da resolução adequada a partir do *redesign*.

Em relação à resolução do problema proposto foram levadas em consideração as fases da metodologia de Resolução de Problemas, propostas por Polya (1978), a saber: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e o retrospecto. No Quadro 2 abaixo são descritas as fases e suas respectivas definições.

Quadro 2 – Quatro fases para resolver um problema de acordo com Polya (1978)

Fases	Definição
1) Compreensão do problema	Fundamental para o aluno compreender o problema. O enunciado verbal precisa ficar bem entendido assim como o problema escolhido não poderá ser muito fácil, nem muito difícil. É importante fazer perguntas.
2) Estabelecimento de um plano	Para estabelecer um plano, é importante descobrir conexões entre os dados e a incógnita; considerar problemas auxiliares ou particulares caso uma conexão não seja encontrada no tempo estabelecido.
3) Execução do plano	Para conseguir fazer isso, é importante que o aluno tenha conhecimento prévio e concentração para alcançar o objetivo proposto; paciência para verificar cada passo do plano.
4) Retrospecto	Ao fazer o retrospecto, poderá verificar os resultados obtidos e os argumentos utilizados corrigindo-os e aperfeiçoando-os se necessário.

Fonte: (POLYA, 1978, p. 4-10)

Sendo assim, tais fases foram observadas nas respostas sobre os itens que demandavam resolução por parte dos licenciandos. Cabe destacar que somente o retrospecto que ocorreu de forma diferenciada, pois foi realizado nos encontros virtuais propostos pela pesquisadora.

Descrição e Análise dos Dados

A seguir, é trazido o enunciado do problema proposto para os licenciandos, envolvendo o conteúdo de Progressão Geométrica.

Quadro 3 – Enunciado do Problema 1

1) Alfredo comprou um automóvel e irá pagá-lo em sete prestações com valor crescente, de modo que a primeira prestação seja de R$100,00 e, o valor de cada uma das seguintes parcelas seja o dobro do valor da anterior.

a) Determine qual é o preço do automóvel.
b) Como você melhoraria o enunciado deste problema?
c) Utilizando a mesma ideia do problema acima, construa um novo enunciado, seguido de sua resolução.

Fonte: Adaptado de Dante (2013).

O Problema 1 explana que Alfredo comprou um automóvel e irá pagá-lo em sete prestações com valor crescente, sendo a primeira prestação de R$100,00 e as seguintes prestações sempre serão o dobro da prestação anterior. À vista disso, na letra *a* solicitou-se que fosse determinado o preço do automóvel pelos licenciandos, assim, foi observado que eles conseguiram encontrá-lo corretamente. Na Figura 2 é trazida a resposta do licenciando P_6.

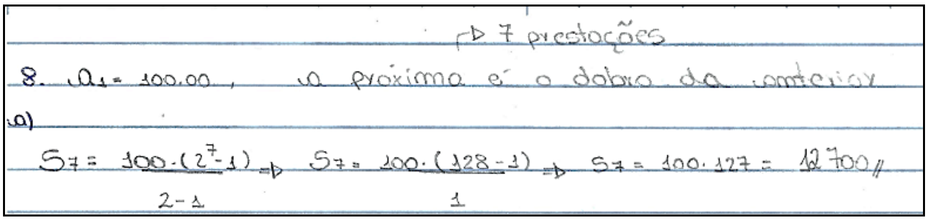

Figura 2 – Resposta do licenciando P_6 na letra a do Problema 1.
Fonte: Dados da Pesquisa.

Percebeu-se que todos os licenciandos utilizaram corretamente os símbolos e linguagem matemática, seguidos de uma resolução. Todavia, não se pode ter certeza, de maneira direta, que o conhecimento que eles possuem é realmente consolidado, pois nas respostas há presença de aplicações de fórmulas, sem muitas justificativas.

Ainda, tem-se que os licenciandos seguiram as fases da Resolução de Problemas propostas por Polya (1978), pois compreenderam o problema, traçaram o plano de resolução através do uso da Soma da Progressão Geométrica, executando o plano ao substituir os dados retirados do problema. Na fase do retrospecto, os licenciandos puderam verificar se suas respostas estavam corretas por meio dos encontros virtuais propostos pela pesquisadora.

Na letra *b* foi questionado sobre como poderia ser melhorado o enunciado do problema. Sendo assim, os licenciandos P_1, P_2, P_3, P_5 e P_6 relataram que não modificariam o enunciado, pois ele estava de fácil compreensão. Somente o licenciando P_4 explanou o seguinte "*Poderia ser melhorado de forma que explicasse ao aluno como essas prestações são crescentes, sendo assim, posto em formato de uma sequência:* $(100, 200, 400, \ldots, a_7)$*"*. Sendo assim, a maioria dos licenciandos mostrou uma boa compreensão sobre o enunciado do problema, mostrando que não precisaria de um *redesign*.

Por fim, na letra *c*, foi proposto que os licenciandos utilizassem a ideia que o Problema 1 ofertava e construíssem um novo problema, bem como apresentassem suas resoluções. No Quadro 4 tem-se as respostas deles.

Quadro 4 – Respostas dos licenciandos na letra b do Problema 1

Licenciandos	**Enunciados construídos e a resolução**
P_1	João está se programando para comprar um Ps4 que custa R$ 2000,00 e fez um trato com sua mãe, disse a ela que durante 10 meses gostaria que pagasse sua mesada de modo crescente, sempre o dobro do valor anterior, sendo o valor inicial do primeiro mês R$2,00. Quanto João ganhará de mesada? Resolução.

	$$S_{10} = \frac{2(2^{10}-1)}{2-1}$$ $$S_{10} = \frac{2(1023)}{1}$$ $$S_{10} = 2046$$ João ganhará R$2046,00 de mesada.
P_2	Marcos comprou um celular e parcelou o aparelho em 8 prestações, sendo a primeira de R$10,00, sendo o valor das seguintes prestações sempre o dobro do valor da anterior. Quanto Marcos pagará pelo celular? Resolução. $$S_8 = \frac{10(1-2^8)}{1-2}$$ $$S_8 = \frac{10(-255)}{-1}$$ $$S_8 = \frac{-2550}{-1}$$ $$S_8 = 2550$$ Marcos pagará R$2550,00 pelo celular.
P_3	Raissa confecciona cestas de palha para vender, seu objetivo é dobrar o número de cestas confeccionadas a cada mês. Sabendo que em Janeiro sua produção foi de 2 cestas, quantas cestas Raissa espera confeccionar até o final de Dezembro? Resolução. $$S_{12} = \frac{2(2^{12}-1)}{2-1}$$ $$S_{12} = \frac{2(4096-1)}{1}$$ $$S_{12} = \frac{2(4095)}{1}$$ $$S_{12} = 8190$$ Raissa irá confeccionar 8190 cestas.
P_4	Carol comprou alguns móveis em uma loja, sendo que parcelou essas compras em 10 vezes, sem juros. A primeira parcela é do valor de R$500,00, sendo que as próximas aumentam o dobro da anterior. Calcule o valor total dos móveis. Resolução. $$S_{10} = \frac{500(2^{10}-1)}{2-1}$$ $$S_{10} = \frac{500(1023)}{1}$$ $$S_{10} = 511500$$ O valor total das parcelas será R$511500,00.
P_5	Julia financiou uma casa e irá pagá-la em 12 prestações com valor crescente, de modo que a primeira prestação seja de R$200,00 e o valor de cada uma das seguintes seja o dobro do valor da anterior. Determine quanto custará a casa. Resolução. $$S_{12} = \frac{200 \cdot (2^{12}-1)}{1} = 819.000$$ A casa custará R$819.000,00
P_6	Na primeira semana após abrir uma sapataria, Pedro consertou quatro pares de sapatos. Sabendo que precisaria aumentar a demanda de consertos, ele expandiu sua divulgação, de modo que a cada semana que se passava, ele e sua equipe reparavam duas vezes mais pares de calçados, que a semana anterior. Sabendo que esse aumento durou até a sexta semana, quantos calçados Pedro e seus funcionários repararam da primeira à sexta semana? Resolução.

	$S_6 = \frac{4(2^6 - 1)}{2 - 1}$ $S_6 = \frac{4(64 - 1)}{1}$ $S_6 = 4 . 63$ $S_6 = 252\ calçados.$ Pedro e seus funcionários repararam da primeira à sexta semana, 252 calçados.

Fonte: Dados da Pesquisa.

Por meio dos enunciados seguidos de suas resoluções foi observado que os licenciandos seguiram a ideia proposta no problema inicial. Todos, em seus diferentes contextos, utilizaram a Soma de uma Progressão Geométrica para responder seu enunciado. Também, percebeu-se que alguns foram mais diretos em suas resoluções e outros mais detalhistas, isso evidencia as diferenças de escrita de cada um. Em um contexto geral, todos os licenciandos realizaram com êxito à sua reformulação ou *redesign*, acompanhado das resoluções corretas. Em consonância a isso, Vale, Pimentel e Barbosa ressaltam que:

> Os contextos em que os alunos tenham a oportunidade de resolver problemas, usando diferentes estratégias, mas também [de] formular problemas, permite que se envolvam diretamente nos processos, aumentem os níveis de motivação, sendo encorajados a investigar, tomar decisões, procurar padrões, estabelecer conexões, generalizar, comunicar, discutir ideias e identificar alternativas (VALE; PIMENTEL; BARBOSA, 2015, p. 47).

Com base nos autores supracitados, tem-se que o engajamento com a resolução e a formulação ou reformulação de problemas só tende a trazer melhorias na aprendizagem dos alunos, haja vista que essas abordagens podem desenvolver diferentes habilidades. Neste sentido, o professor é visto como o principal responsável para que tais benefícios ocorram, pois seu papel é imprescindível na proposta de atividades diferenciadas, as quais tornem os estudantes dispostos a construir novas experiências e conhecimentos na disciplina de Matemática.

A partir dos enunciados construídos, pode-se perceber que os licenciandos utilizaram as fases da Resolução de Problemas propostas por Polya (1978), visto que além de compreender o novo problema, todos eles estabeleceram os planos de resolver por meio da Soma da Progressão Geométrica, executando o plano por meio da substituição e manipulações algébricas. Após isso, a última fase da Resolução de Problemas, o retrospecto, foi realizado no encontro virtual.

Considerações Finais

A partir da análise das respostas dos licenciandos, percebeu-se que eles utilizaram de maneira correta o *redesign* de problemas para elaborar seus enunciados. Todavia, foi observado que eles estão pouco habituados com o uso desta abordagem, visto que em seus novos enunciados eles não modificaram os conceitos que foram apresentados pela pesquisadora, buscaram alterar somente o contexto do problema.

No que se refere aos conhecimentos matemáticos para o ensino sobre as Progressões Geométricas, pode-se inferir que o Conhecimento Especializado do Conteúdo nos licenciandos aparece de maneira tímida, pois embora eles utilizem corretamente as fórmulas, focaram somente em aplicações algébricas, sem explicações concisas. Sendo assim, por se tratar de futuros professores, acredita-se que as suas resoluções ainda precisam ser repensadas, de forma que contenham justificativas sobre as aplicações das fórmulas.

Ainda, é válido ressaltar a importância dos conteúdos de Progressões Aritméticas e Geométricas no Ensino de Matemática, pois os mesmos possibilitam a proposta de problemas contextualizados. Corroborando a isso, Maia (2011) explana que o ensino das Progressões, por meio de questões que envolvem o cotidiano dos estudantes, pode potencializar a aprendizagem e mostrar a aplicabilidade da Matemática em diversas realidades.

Por conseguinte, a partir dos resultados da pesquisa pode-se concluir que o objetivo proposto foi atingido, uma vez que, por meio das respostas dos licenciandos, foi possível investigar as contribuições do *Design* de Problemas para a construção de conhecimentos matemáticos para o ensino de Progressão Geométrica por alunos de um curso de Licenciatura em Matemática.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Referências

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: What makes it special?. **Journal of teacher education**, v. 59, n. 5, p. 389-407, 2008.

DANTE, L. R. **Matemática**: contexto & aplicações. 2. ed. São Paulo: Ática, 2013.

FIGUEIREDO, F. F. **Design de problemas com a utilização das tecnologias digitais na formação inicial de professores de Matemática**. 2017. 275 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Luterana do Brasil, Canoas, 2017.

FIGUEIREDO, F. F; GROENWALD, C. L. O. Design de problemas matemáticos com o uso de Tecnologias Digitais sob o enfoque da formulação de problemas subsidiários. **Educação, Ciência e Cultura**, v. 24, n. 1, p. 221-234, 2019.

MAIA, R. J. D. **Progressões Aritméticas e Geométricas**. 2011. 32 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura Plena em Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Paraíba, 2011.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas.** Rio de Janeiro: Interciência, v. 2, 1978.

SHULMAN, L. S. Those who understand: Knowledge growth in the teaching. **Educational Researcher**, Washington, US, v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986.

SHULMAN, L. S. Knowledge and teaching: foundations of a new reform. **Harvard Educational Review**, Harvard, v. 57, n. 1, p. 1-22, 1987.

VALE, I.; PIMENTEL, T.; BARBOSA, A. Ensinar matemática com resolução de problemas. **Quadrante**, v. 24, n. 2, p. 39-60, 2015.

STOYANOVA, E.; ELLERTON, N. F. A framework for research into student's problem posing in school mathematics. Technology in mathematics education. In: **Proceedings of the 19th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia (MERGA)**. 1996.