



## **Encontro Gaúcho de Educação Matemática**

A Educação Matemática do presente e do futuro:  
resistências e perspectivas

21 a 23 de julho de 2021 - UFPel (Edição Virtual)

### **ANÁLISE DAS HABILIDADES ALGÉBRICAS ESTIMULADAS POR DIFERENTES MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES QUADRÁTICAS**

**Daiane Carl<sup>1</sup>**

**Heloísa Gabriela Paterno<sup>2</sup>**

**Eixo:** 01 – Ensino e aprendizagem na e da Educação Matemática

**Modalidade:** Comunicação Científica

**Categoria:** Alunos de Graduação

#### **Resumo**

O ensino de equações quadráticas deve objetivar, além de que o aluno saiba resolver uma equação em formato familiar, que este adquira as habilidades de abstração e capacidades algébricas que lhe serão úteis no futuro. Dessa forma, apesar de a Fórmula de Bhaskara ser um dos métodos mais simples, rápidos e práticos para resolver equações quadráticas, ela pouco contribui para o desenvolvimento do aluno a longo prazo. Para tal, apresenta-se neste trabalho uma revisão bibliográfica sobre a aplicação e ensino dos diferentes métodos de resolução de equações de segundo grau e faz-se uma análise das habilidades que são estimuladas ao longo do seu processo de aprendizagem, a fim de discutir tais métodos como alternativas à Fórmula de Bhaskara. Conclui-se que tais métodos, como o de completar o quadrado e a fatoração, podem contribuir mais profundamente com a educação do aluno e pensamento matemático, estimulando o uso da lógica e manipulação das equações mais do que a memorização de regras e métodos pré-determinados. Assim, ensiná-los em sala de aula pode ser mais desafiador e demorado, mas contribui para a formação do aluno de forma mais completa e melhor o prepara para a matemática algébrica do Ensino Médio.

**Palavras-chave:** Álgebra; Fórmula de Bhaskara; Equações quadráticas.

#### **Introdução**

As primeiras ideias, procedimentos e práticas matemáticas surgiram na Babilônia por volta do ano 3000 a.C. quando desenvolveu-se o sistema de numeração de base sexagesimal (ROSA; OREY, 2013). A contar desse período, nota-se um grande avanço da complexidade dos

---

<sup>1</sup> Acadêmica de Licenciatura em Matemática no IFC Rio do Sul, daianecarl@hotmail.com

<sup>2</sup> Acadêmica de Licenciatura em Matemática no IFC Rio do Sul, helopaterno@gmail.com



problemas envolvidos e a necessidade de novos meios de resolução de problemas abstratos, nesse contexto que surge a álgebra. A evolução das ideias algébricas permitiram que os babilônios resolvessem equações lineares e quadráticas, trabalhassem com números positivos, com sistemas de duas equações com duas variáveis e com equações de graus mais elevados.

No início do século IX matemáticos árabes já usavam da álgebra e geometria dos gregos para encontrar resoluções para equações de segundo grau. No entanto, foi somente por volta do século XVI que surge uma fórmula geral para obter raízes de uma equação de segundo grau (CELESTINO; PACHECO, 2010).

O ensino da álgebra foi introduzido no ensino secundário brasileiro no início do século XIX e, segundo Araújo (2008), desde então o ensino tinha caráter reprodutivo. No Brasil, em decorrência do Movimento da Matemática Moderna, o ensino da álgebra recebeu um maior rigor e assumiu uma acentuada preocupação com os aspectos lógico-estruturais dos conteúdos e a precisão da linguagem (BORTOLETTI, 2015), e, ainda hoje,

[...] o método de resolução de problemas não permite que os estudantes desenvolvam o conhecimento matemático, mas apenas memorizem a fórmula geral para resolver equação quadrática, além de reproduzir a maneira como os professores de matemática ensinam o estudante em resolver um exemplo de cálculo algébrico ou exercício (BRANCO; BRITO; BRITO, 2019, p. 16).

No entanto, segundo a Base Nacional Comum Curricular (2018), os conhecimentos algébricos são essenciais na compreensão, representação e análises das estruturas matemáticas que utilizam letras e símbolos em sua construção. Nesse contexto, o objetivo deste trabalho é mostrar diferentes métodos de resolução de equações quadráticas, explorar sua abordagem em sala de aula e discutir a eficiência que têm para o ensino de competências algébricas.

Para tal, realizou-se um levantamento bibliográfico sobre o ensino da álgebra em sala de aula com os diferentes métodos de resolução de equações quadráticas. A partir de pesquisas qualitativas e quantitativas sobre o desempenho dos alunos após o ensino de equações quadráticas, foram analisados os métodos de resolução considerando as diferentes habilidades desenvolvidas e estimuladas por cada um deles.

### **As habilidades algébricas e o conceito de sentido de estrutura**

De acordo com Hoch e Dreyfus (2005) “a maior parte da literatura sobre técnicas algébricas se refere a aprender a utilizá-las, e não sobre como os alunos as utilizam no futuro” (tradução livre). É necessário considerar a necessidade de uso futuro das habilidades que são construídas durante a formação matemática dos alunos, de modo a entender o que precisa ser ensinado e de



que forma. Nesta perspectiva, um conceito importante é o de “sentido de estrutura” como uma “coleção de habilidades [...] que permite aos estudantes fazer melhor uso das técnicas algébricas aprendidas anteriormente” (HOCH; DREYFUS, 2005).

No contexto da álgebra do ensino médio, os autores ainda definem sentido de estrutura como a capacidade de (a) lidar com um termo composto como se fosse uma única entidade, (b) reconhecer a equivalência de estruturas familiares, e (c) escolher as manipulações apropriadas para fazer melhor uso da estrutura. Na pesquisa conduzida por Hoch e Dreyfus, poucos estudantes foram capazes de resolver problemas em contextos não-familiares, mesmo tendo acesso à fórmula conhecida e familiar; dessa forma, demonstraram ter dificuldade com sentido de estrutura, ou seja, não eram capazes de utilizar suas habilidades algébricas quando os problemas dados não eram exatamente análogos aos problemas conhecidos.

No contexto do ensino de equações quadráticas, portanto, a capacidade de resolver um problema não pode ser tida como mais importante do que a construção das habilidades algébricas para que tal resolução seja possível, já que são as habilidades que permitem a construção dos conhecimentos futuros e a resolução de outros problemas, em contextos não-familiares. Dessa forma, faz-se necessário analisar os métodos de resolução ensinados aos alunos para que se busque compreender quais são as habilidades estimuladas por cada método, para que futuramente possa-se entender quais métodos são mais benéficos e construtivos para a formação matemática e algébrica dos estudantes.

### **Descrição dos métodos de resolução de equações quadráticas**

O método mais comum é o uso da equação conhecida como Fórmula de Bhaskara (PASSOS et al., 2015). A partir de uma equação  $ax^2 + bx + c = 0$ , com  $a \neq 0$ , tem-se que  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

. Por exemplo, para resolver a equação  $x^2 - x - 6 = 0$ , tem-se:



$$\begin{aligned}x^2 - x - 6 &= 0 \\x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\x &= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-6)}}{2(1)} \\x &= \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} \\x &= \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} \\x &= \frac{1 \pm 5}{2} \\x_1 &= \frac{1 + 5}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\x_2 &= \frac{1 - 5}{2} = \frac{-4}{2} = -2\end{aligned}$$

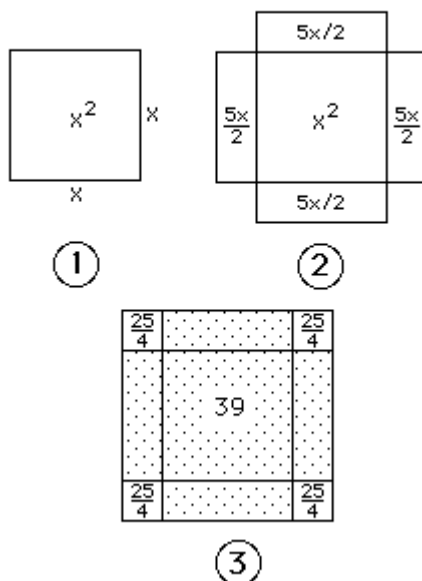
**Figura 1** – Resolução da equação  $x^2-x-6=0$  pela Fórmula de Bhaskara  
Fonte: Criação das autoras, 2020

O método de completar o quadrado consiste em manipular os dois lados da equação para que se encontre um quadrado da soma ou da diferença, e a partir disso se resolva a questão (PASSOS et al., 2015). Além disso, é desse método que deriva a Fórmula de Bhaskara. Na imagem abaixo tem-se a resolução da equação  $x^2 + 8x - 9 = 0$  utilizando o método exposto.

$$\begin{aligned}x^2 + 8x - 9 &= 0 \\(x + a)^2 &= x^2 + 2ax + a^2 \\2a &= 8 \rightarrow a = 4 \\x^2 + 8x - 9 &= 0 \\x^2 + 8x + 16 - 9 &= 0 + 16 \\(x + 4)^2 - 9 + 9 &= 16 + 9 \\(x + 4)^2 &= 25 \\x + 4 &= \pm 5 \\x_1 &= 5 - 4 = 1 \\x_2 &= -5 - 4 = -9\end{aligned}$$

**Figura 2** – Resolução da equação  $x^2+8x-9=0$  pelo método de completar o quadrado  
Fonte: Criação das autoras, 2020

Já o método de Al-Khwarizm corresponde à interpretação geométrica do método de completar o quadrado para a resolução de uma equação de segundo grau (CONNOR; ROBERTSON, 1999), como ilustrado pela imagem abaixo.



**Figura 3** – Resolução da equação  $x^2 + 10x = 39$  pelo método de Al-Khwarizmi  
 Fonte: CONNOR e ROBERTSON, 2009

Um outro método, utilizado historicamente por Viète, utiliza duas incógnitas auxiliares  $u$  e  $v$  que são inseridas numa a equação quadrática como  $x = u + v$  e permitem a manipulação da equação até encontrar o resultado de  $x$  (AMARAL, 1988).

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x = u + v$$

$$(u + v)^2 - 3(u + v) + 2 = 0$$

$$v^2 + (2u - 3)v + u^2 - 3u + 2 = 0$$

Escolhendo  $u$  para anular o coeficiente de  $v$ ,

$$u = \frac{3}{2}$$

$$v^2 + \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 2 = 0$$

$$v^2 - \frac{1}{4} = 0$$

$$v = \pm \frac{1}{2}$$

Logo,  $x = u + v$  e  $x = 1$  ou  $x = 2$ .

**Figura 4** – Resolução da equação  $x^2 - 3x + 2 = 0$  pelo método de Viète  
 Fonte: Criação das autoras, 2020

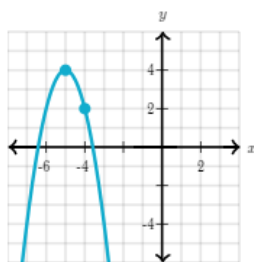
Outra forma de resolver uma equação quadrática é realizando a fatoração, quando possível. Para isto, é necessário manipular algebricamente a equação para que se obtenha um produto, como exemplificado na figura abaixo:

$$\begin{aligned}
 2x^2 - 3x - 20 &= x^2 + 34 \\
 x^2 - 3x - 54 &= 0 \\
 (x + 6)(x - 9) &= 0 \\
 x_1 &= -6 \\
 x_2 &= 9
 \end{aligned}$$

**Figura 5** – Resolução da equação  $2x^2-3x-20=x^2+34$  através da fatoração  
 Fonte: Criação das autoras, 2020

Por fim, a representação gráfica da equação pode auxiliar a imaginar qualquer função quadrática como uma transformação da curva  $y = x^2$  e a comparando com outros formatos de escrever funções quadráticas, como o ponto-vértice.

$$y = -2(x + 5)^2 + 4 \quad y = a(x - h)^2 + k$$



**Figura 6** – Resolução da equação  $-2(x+5)^2+4=0$  através da representação gráfica  
 Fonte: Acervo das autoras, 2020

### Panorama Atual do Ensino Algébrico e de Equações Quadráticas

Muito além de aprender a resolver determinado tipo de equação, o aluno necessita estimular o pensamento abstrato e compreender o uso da álgebra efetivamente para que, futuramente em sua educação, possa fazer uso de tais habilidades. Um exemplo disso dá-se nos conteúdos já do Ensino Médio, como funções e polinômios, que necessitam diretamente das habilidades algébricas do Ensino Fundamental.

Lima (2011) indica que os professores costumam ensinar aos alunos os métodos mais fáceis de se resolver um problema. No caso das equações quadráticas, este método é a Fórmula de Bhaskara, como evidenciado pelo estudo de Passos et al. (2015) intitulado “Análise da sequência de aplicação dos métodos de Bhaskara, Al-Khwarizm e Viète para o ensino-aprendizagem da equação do 2º grau no 9º ano do ensino fundamental”.

No entanto, saber resolver problemas pelas formas fáceis nem sempre é o mais benéfico para o aluno. De acordo com Thorpe (1989, apud LIMA, 2011), a fórmula de Bhaskara pode



apresentar valores para a incógnita que não tem significado para os alunos, e em geral os conceitos que cerceiam regras e fórmulas não são de claro entendimento para os alunos. Além disso, a própria ideia de existir uma fórmula pronta para resolver problemas pode ser prejudicial, especialmente por não existirem fórmulas correspondentes em outros casos matemáticos.

No estudo feito por Lima, apresentou-se uma equação quadrática na forma fatorada para os alunos. Constatou-se, então, que os alunos buscam recorrer à fórmula mesmo nessa situação em que a resposta poderia ser facilmente inferida utilizando os princípios matemáticos; e o uso da fórmula inibiu a criatividade para resolver a questão usando conceitos “já-encontrados”.

Naquela situação não-familiar,

[...] muitos dos alunos tiveram que usar a fórmula para terem certeza de quais eram as raízes da equação. Se eles tivessem a flexibilidade de lidar com símbolos, eles seriam capazes de buscar diferentes maneiras de abordar o problema, e, talvez, serem mais bem-sucedidos. Uma gama de já-encontrados provavelmente ampliaria a visão deles sobre a situação, e eles poderiam explorar características mais gerais de equação. (LIMA, 2011, p. 70).

Dessa forma, constatamos que as capacidades algébricas dos estudantes não são devidamente estimuladas quando estudando a resolução de equações pela Fórmula de Bhaskara. Ou seja, apesar de o método poder ter um maior índice de sucesso dentro do conteúdo, como mostrado no estudo de Passos et al. (2015), ele pouco contribui para a formação matemática para além deste conceito, e mesmo dentro do conceito quando este é apresentado de forma não-familiar. Diante disso, faz-se necessário analisar outros métodos que podem ser utilizados e ensinados no lugar da Fórmula de Bhaskara para garantir uma formação matemática abrangente, suficiente e satisfatória.

### **Análise dos Diferentes Métodos**

Talvez a primeira solução para este impasse seria reforçar o ensino da equação quadrática - e da álgebra como um todo - não como um problema a ser resolvido, mas sim como um conceito matemático a ser explorado. Nesta visão, o ensino das diferentes formas que a equação quadrática pode ter (vértice, foco-diretriz, fatorada...) traz mais uma habilidade para o arsenal do aluno e permite a compreensão plena disso que é trabalhado; além disso, permite a fácil detecção no caso de situações simples porém não-familiares, como o exemplo explorado da equação fatorada no estudo de Lima, e estimula o sentido de estrutura como descrito por Hoch e Deyfrus.



Correspondentemente, se trabalhados mais os conceitos algébricos incluindo a representação gráfica dos mesmos, os alunos podem imaginar uma equação quadrática como a transformação da curva  $y=x^2$ , auxiliando na concepção de mais uma habilidade por parte do aluno. Com isso, tanto a compreensão sobre este conceito quanto a capacidade de resolver as equações seriam estimuladas, além da capacidade visual sobre a álgebra que é, também, extremamente importante para estudos futuros de matemática, e da manipulação de tais conceitos com certa abstração.

Outro conceito relacionado que pode ser utilizado como método para resolver equações quadráticas (mas que não se limita a isso) é a fatoração. A maior vantagem deste método é que requer uma manipulação algébrica não convencional, o que apesar de tornar seu uso complicado contribui muito para a formação do aluno, com o desenvolvimento de habilidades que serão importantes no futuro e que contribuem para o pensamento algébrico a qualquer momento. Ainda, a fatoração utiliza-se de princípios matemáticos, como o do produto zero, que devem ser de ciência de todo aluno; por meio do ensino da fatoração de equações, portanto, pode-se ainda recuperar e garantir o aprendizado do aluno em tais tópicos.

Similarmente, o método de completar do quadrado também exige forte manipulação da equação e pensamento abstrato, e também reforça conteúdos anteriores de produtos notáveis - ou seja, o aluno aprende a reconhecer padrões, mais uma habilidade matemática necessária e fundamental tanto dentro como fora da álgebra. Há, ainda, a interpretação geométrica grega do método, também conhecida como método de Al-Khwarizm, que permite uma representação visual da álgebra e do problema em questão e auxilia os alunos a relacionarem o pensamento abstrato com sua realidade e auxilia no processo de ensino-aprendizagem.

Por fim, há também o Método de Viète, que trabalha muito com abstração e é a base intuitiva para a Fórmula de Bhaskara. “Os alunos podem chegar à solução de uma equação completa do 2º grau sem que seja necessário utilizar a fórmula de maneira decorada como tantas vezes acontece” (AMARAL, 1988). Sua eficiência em sala de aula, no entanto, é discutível; segundo os estudos de Passos et al. (2015), uma porcentagem significativamente menor de estudantes teve sucesso em resolver questões usando esse método, comparado ao método de completar o quadrado e à fórmula de Bhaskara. No entanto, tal dificuldade e complexidade do método mostra o quanto ele tem para ensinar aos alunos e a lógica por trás da Fórmula de Bhaskara ainda não é de pleno domínio dos estudantes.





Outros métodos menos ortodoxos também são interessantes para engajar o aluno e apresentar mais uma perspectiva nas equações quadráticas. Um exemplo é o método geométrico, que explora as construções geométricas e promove a conexão entre as diferentes áreas da matemática; no entanto, a complexidade deste método torna-o demorado e pouco útil para a prática, apesar de fornecer aplicações ainda mais importantes na geometria. Por motivos como este, tais métodos não serão desenvolvidos no presente trabalho, mantendo o foco em métodos de resolução que têm potencial para serem mais amplamente ensinados e, possivelmente, substituir o ensino da Fórmula de Bhaskara como elemento principal das aulas de matemática sobre este assunto.

### **Considerações Finais**

De acordo com Hoch e Dreyfus (2005), a maior parte da literatura em técnicas algébricas diz respeito a aprender a utilizá-las, e não sobre como os alunos usam essas técnicas no futuro. No entanto, as pesquisas que já são feitas sobre o assunto indicam que é necessário estimular mais a criatividade e compreensão dos conteúdos e que a simples memorização e mecanização não é suficiente para que o aluno adquira as habilidades necessárias.

Apesar de a Fórmula de Bhaskara ser um método simples de ser ensinado e memorizado pelos alunos, e relativamente rápido de usar para resolver uma equação, é necessário considerar suas repercussões do ensino em toda a trajetória escolar de um aluno. Os demais métodos, como completar quadrados e fatoração, podem não ser tão rápidos, simples e práticos quanto a fórmula de Bhaskara, tanto para ensinar quanto para aprender e usar, mas podem ser muito mais benéficos se considerados a longo prazo por conta do mais forte ensino e estímulo a capacidades algébricas.

Diante do exposto, podemos concluir que o ensino da álgebra necessita ser repensado. Para que um avanço ocorra, é preciso que se contemple além dos aspectos formais, a construção do pensamento algébrico. No caso das equações quadráticas, é importante e necessário que os docentes apresentem aos estudantes diferentes métodos de resolução de equações de segundo grau e que reforcem mesmo os mais difíceis e complexos, para que as competências algébricas se desenvolvam e se concretizem desde a fase inicial do seu estudo.

### **Referências**



AMARAL, João Tomas do. **Método de Viète para Resolução de Equações do 2.º Grau.** Revista do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, n. 13, 1988. Disponível em <http://www.rpm.org.br/cdrpm/13/4.htm>. Acesso em 27 jun. 2020.

ARAÚJO, Elizabeth Adorno de. **Ensino de Álgebra e formação de professores.** São Paulo, 2008

BRANCO, Maurício Neves; BRITO, Ramon Gabriel Santos de; BRITO, Estela Márcia de. **Dificuldade de estudante em resolver equação quadrática no ensino médio: uma pesquisa quantitativa.** Macapá, 2019

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília, 2018.

BORTOLETTI, Anderson de Abreu. **O Ensino de Álgebra: Uma visão em dois momentos distintos da trajetória da matemática nos currículos escolares.** Porto Alegre, 2015.

CELESTINO, Kamila Gonçalves; PACHECO Edilson Roberto. **Bhaskara: Algumas Evidências.** Paraná: Unicentro, 2010.

CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Abu Ja'far Muhammad ibn Musa Al-Khwarizmi.** Biografia. University of St Andrews, Escócia, 1999. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Al-Khwarizmi/>. Acesso em 10 abr. 2021.

HOCH, Maureen; DREYFUS, Tommy. **Students' Difficulties With Applying a Familiar Formula in an Unfamiliar Context.** In: CHICK, H. L.; VINCENT, J. L. (Ed). Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Melbourne, v. 3. p. 145-152, 2005. ISSN 0771-100X.

LIMA, Rosana Nogueira de. **Equações quadráticas e a fórmula de Bhaskara: Sucesso garantido?** In: Revista Iberoamericana de Educación Matemática. España, n.25, p.63-72, 2011. ISSN 1815-0640. Disponível em <https://pdfs.semanticscholar.org/ed19/ba3f3f5e70d01e673fecca9ab9b7ff420b47.pdf>. Acesso em 30 jul. 2020.

PASSOS, Homailson Lopes et al. **Análise da sequência de aplicação dos métodos de Bhaskara, Al-Khwarizm e Viète para o ensino-aprendizagem da equação do 2º grau no 9º ano do ensino fundamental.** In: I Congresso Internacional Salesiano de Educação. Lorena, 2015. Disponível em [lo.unisal.br/sistemas/conise2015/anais/38\\_13500232\\_ID.pdf](http://lo.unisal.br/sistemas/conise2015/anais/38_13500232_ID.pdf). Acesso em 28 jul. 2020.

ROSA, Milton; OREY, Daniel Clark. **Etnomatemática e modelagem: a análise de um problema retórico babilônio.** Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 2013.