UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA
CURSO DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS

SÉRIE CADERNOS ECONÔMICOS

O LEMA DE SHEPHARD

Texto didático n.4

Autores: Gabrielito Menezes
Rodrigo Fernandez
André Carraro

PELOTAS
Abril 2012

O Lema de Shephard

Gabrielito Menezes *
Rodrigo Nobre Fernandez †
André Carraro‡

29 de abril de 2012

1 Introdução

Lema de Shephard é um resultado importante na microeconomia, pois tem aplicações na escolha do consumidor e da teoria da firma. Cabe ressaltar que o Lema de Shephard é uma das propriedades da função despesa e da função custo (VARIAN, 1992; JEHLE, RENY, 2000).

Este lema recebeu este nome, após Ronald Shepard provar através da utilização da fórmula de distância em um artigo publicado em 1953, embora esse já tenha sido utilizado por John Hicks (1939) e Paul Samuelson (1947).

2 Definição

Segundo Jehle e Reny (2000), o lema de Shephard possibilita uma formulação precisa para a demanda de cada bem no mercado com relação ao nível de utilidade e os preços: a derivada da função das despesas *(p, u)* com relação a esse preço. Mais claramente o Lema de Shephard diz: *e(p,u)* é diferençável em p com *p>>0* e

$$\frac{\partial e(p,u)}{\partial p_i} = x_i^h, \ i = 1, ..., n \tag{2.1}$$

*Doutorando em Economia Aplicada pela UFRGS.gabrielito.menezes@ufrgs.br.
†Doutorando em Economia Aplicada pela UFRGS.rodrigo.fernandez@ufrgs.br.
‡Doutor em Economia pela UFRGS. Prof. do PPGOM/UFPEL.andre.carraro@ufpel.edu.br.

3 Prova

Nesta seção prova-se o Lema de Shepard para n bens. Derive a função despesa em relação à p_i.

$$\text{Seja } e(p,u) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^h$$

Isto é:

$$e(p,u) = p_1 x_1^h + ... + p_n x_n^h$$

Derivando a equação acima em relação a um p_i qualquer:

$$\frac{\partial e(p,u)}{\partial p_i} = p_1 \frac{\partial x_1^h}{\partial p_i} + ... + x_i^h + p_i \frac{\partial x_i^h}{\partial p_i} + ... + p_n \frac{\partial x_n^h}{\partial p_i}$$

$$\frac{\partial e(p,u)}{\partial p_i} = x_i^h + \left[p_1 \frac{\partial x_1^h}{\partial p_i} + ... + p_n \frac{\partial x_n^h}{\partial p_i} \right] \tag{3.1}$$

Chamando essa última equação de (3.1) e utilizando as relações do problema de minimização de despesas temos:

$$\begin{gathered} Min \ \textstyle\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \\ \text{sujeita a} \\ \overline{u} = V(p,y) \end{gathered}$$

$$L(x,\mu) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i + \mu \left[\overline{u} - V(p,y) \right]$$

As condições de primeira ordem são:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \mu \frac{\partial v}{\partial x_i} = p_i, \ \forall i = 1, ..., n \tag{3.2}$$

Substituindo a equação (3.2) em (3.1):

$$\frac{\partial e(p,u)}{\partial p_i} = x_i^h + \mu \left[\frac{\partial v}{\partial x_1} \frac{\partial x_1^h}{\partial p_i} + ... + \frac{\partial v}{\partial x_n} \frac{\partial x_n^h}{\partial p_i} \right] \tag{3.3}$$

Utilizando a derivada do lagrangeano em relação a μ:

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = \overline{u} - V(p,y) = 0 \tag{3.4}$$

Derivando em relação a um p_i:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \mu \partial p_i} = \frac{\partial \overline{u}}{\partial p_i} = \frac{\partial V(p,y)}{\partial p_i} \tag{3.5}$$

Como estamos no ótimo podemos dizer que:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \mu \partial p_i} = \frac{\partial \overline{u}}{\partial p_i} = \frac{\partial V(p,\overline{u})}{\partial p_i}$$

e então

$$\frac{\partial V(p,\overline{u})}{\partial p_i} = \frac{\partial V}{\partial x_1^h}\frac{\partial x_1^h}{\partial p_i} + ... + \frac{\partial V}{\partial x_n^h}\frac{\partial x_n^h}{\partial p_i}$$

e sabemos que:

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial p_i} = 0$$

Portanto:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \mu \partial p_i} = \frac{\partial \overline{u}}{\partial p_i} = \frac{\partial V(p,\overline{u})}{\partial p_i} = \frac{\partial V}{\partial x_1^h}\frac{\partial x_1^h}{\partial p_i} + ... + \frac{\partial V}{\partial x_n^h}\frac{\partial x_n^h}{\partial p_i} = 0 \tag{3.6}$$

Inserindo a equação (3.6) na equação (3.3):

$$\frac{\partial e(p,u)}{\partial p_i} = x_i^h \tag{3.7}$$

$c.q.d$

4 Considerações Finais

O objetivo do trabalho apresentado foi fazer uma rápida contextualização da importância do Lema de Shephard para a teoria microeconômica, bem como, demonstrar a capacidade do aluno pós-graduando de provar um teorema (neste caso, foi provado o Lema de Shephard) de forma clara, simples e didaticamente acessível. Indiretamente com a prova do Lema de Shephard, prova-se a quarta propriedade da função despesa, ou seja, que ela é crescente no preço.

Para mais detalhessobre a função despesa e suas propriedades, recomenda-se ao leitor, consultar as obras mencionadas nas referências do presente trabalho..

5 Referências

JEHLE, G. A.; RENY, P. J. Advanced Microeconomics Theory. 3ed. The Addison-Welsey series in economics. 2011.

MAS-COLLEL, A.; WHINSTON, M. D. e GREEN, J.R., Microeconomic Theory, Oxford University Press, 1996.

SIMON, C. P. E.; BLUME, L; Mathematics for Economists. W.W. Norton e Company, Inc, 1994.

VARIAN, H. R. Microeconomic Analysis, 3ed. W.W. Norton e Company, 1992.