UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA
CURSO DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS

SÉRIE CADERNOS ECONÔMICOS

O TEOREMA DO ENVELOPE E SUA APLICAÇÃO NA MICROECONOMIA

Texto didático n.3

Autores: Rodrigo Fernandez
Gabrielito Menezes
André Carraro

PELOTAS
Abril 2012

O teorema do envelope e sua aplicação na microeconomia

Rodrigo Nobre Fernandez *
Gabrielito Menezes †
André Carraro‡

28 de abril de 2012

1 Introdução

Sabe-se que a função de utilidade indireta representa o valor máximo atingível pela função de utilidade a um dado conjunto de preços p e de renda y. Geometricamente ela representa o nível da mais alta curva de indiferença que o consumidor pode atingir dado o conjunto de preços p e renda y.

Tem-se uma função *U(x)* contínua e estritamente crescente e quase côncava em,$\mathbb{R}^n_+$ denominada *V(p,y)* e uma das propriedades desta função é a identidade de Roy. Esta identidade mostra que a razão da divisão da derivada da função V em relação a um qualquer sobre a derivada função V em relação a y é igual a demanda mashaliana para o mesmo p_i correspondente ao preço, no entanto este resultado tem o sinal negativo.

Logo, isto é muito importante para a teoria microeconomia. Para fazer a prova desta identidade, deve-se utilizar o teorema do envelope o qual possui extrema relevância para a ciência econômica, pois através do uso deste consegue-se "*envelopar*" todas as demandas marshalianas no ponto de máximo. A seguir mostrar-se-á a prova deste teorema.

*Doutorando em Economia Aplicada pela UFRGS.rodrigo.fernandez@ufrgs.br.
†Doutorando em Economia Aplicada pela UFRGS.gabrielito.menezes@ufrgs.br.
‡Doutor em Economia pela UFRGS. Prof. do PPGOM/UFPEL.andre.carraro@ufpel.edu.br.

2 Teorema do Envelope

Para chegar-se neste resultado utilizar-se-á a abordagem de Jehle e Reny (2000, p.505-507). Quando tenta-se maximizar uma função, geralmente depara-se com o seguinte problema:

$$Max\, f(x, a)$$
$$\text{sujeita a}$$
$$g(x, a) = 0 \text{ e } x \geqslant 0$$

Onde x é um vetor de escolha de variáveis e $a = (a_1, ..., a_n)$ é um vetor de parâmetros que pode estar na função objetivo, na restrição ou em ambos. Certamente, as soluções deste problema dependerão de alguma forma do vetor de parâmetros, a. Supõe-se que para cada vetor a, há uma única solução dada por *x(a)*. Dentro desta abordagem, supõe-se ainda que a função objetivo e a restrição do problema são continuamente diferenciáveis em *a*. Logo, para cada a, considere que *x(a)>>0* (estritamente maior que zero) resolve o problema de maximização e assume-se que *x(a)* também é continuamente diferenciável no parâmetro *a*.

Assim, o problema associado ao multiplicador de lagrange $L(x, a, \lambda)$ e considera-se $(x(a), \lambda(a))$ que estão de acordo com as condições propostas pelo teorema de Kuhn-Tucker[1].

Prova: Partir-se-á do problema dos multiplicadores de Lagrange:

$$L = f(x, a) + \lambda [g(x, a)] \tag{2.1}$$

Considerando-se as condições enunciadas acima pode-se deduzir o seguinte:

$$\frac{\partial f(x(a), a)}{\partial x_i} + \lambda(a) \frac{\partial g(x(a), a)}{\partial x_i} = 0,\ i = 1, ..., n \tag{2.2}$$

$$g(x(a), a) = 0 \tag{2.3}$$

Elas podem ser escritas como identidades, pois elas servem para definir soluções para $x(a)$ e $\lambda(a)$. A derivada parcial de L em relação a um parâmetro a_j é o seguinte:

[1] Veja Simon e Blume (1994, p. 439-442)

$$\frac{\partial L}{\partial a_j} = \frac{\partial f(x,a)}{\partial a_j} + \lambda \frac{\partial g(x,a)}{\partial a_j} \tag{2.4}$$

Ao valorar esta derivada no ponto $(x\,(a)\,, \lambda(a))$:

$$\frac{\partial L}{\partial a_j}\,|_{x(a),\lambda(a)} = \frac{\partial f(x(a),a)}{\partial a_j} + \lambda(a)\frac{\partial g(x(a),a)}{\partial a_j} \tag{2.5}$$

Ao mostrar que esta derivada parcial da função valor máximo em relação a a_j é igual ao lado direito da equação (2.5) chegar-se-á na prova do teorema. Pode-se começar diferenciando a função *M(a)* em relação a aj. Sabe-se que a_j afeta f direta e indiretamente, através da sua influência em cada variável $x_i(a)$, portanto na derivação deste problema será necessário usar a regra da cadeia, como segue:

$$\frac{\partial M(a)}{\partial a_j} = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial f(x(a),a)}{\partial x_i}\right] \frac{\partial x_i(a)}{\partial a_j} + \frac{\partial f(x(a),a)}{\partial a_j} \tag{2.6}$$

Retomando as condições de primeira ordem em (2.2) e apenas rearranjando a igualdade tem-se:

$$\frac{\partial f(x(a),a)}{\partial x_i} = -\lambda(a)\frac{\partial g(x(a),a)}{\partial x_i},\ i = 1,...,n \tag{2.7}$$

Substituindo (2.7) dentro dos termos em colchetes do somatório em (2.6), pode-se escrever a derivada parcial de *M(a)* como:

$$\frac{\partial M(a)}{\partial a_j} = \lambda(a)\sum_{i=1}^{n} \left[-\frac{\partial g(x(a),a)}{\partial x_i}\frac{\partial x_i(a)}{\partial a_j}\right] + \frac{\partial f(x(a),a)}{\partial a_j} \tag{2.8}$$

Para chegar-se ao resultado final deste teorema precisa-se retornar as condições de primeira ordem e observar-se a equação (2.3). Logo pode-se diferenciar ambos lados de (2.8) em relação a um a_j e o resultado será o mesmo do que (2.7), pois a derivada de uma constante é zero. Aplicando esta condição na equação do somatório:

$$\lambda(a)\sum_{i=1}^{n} \left[-\frac{\partial g(x(a),a)}{\partial x_i}\frac{\partial x_i(a)}{\partial a_j}\right] = -\frac{\partial f(x(a),a)}{\partial a_j}$$

$$\lambda(a)\sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{\partial g(x(a),a)}{\partial x_i}\frac{\partial x_i(a)}{\partial a_j}\right] = -\lambda(a)\frac{\partial g(x(a),a)}{\partial a_i}$$

E então:

$$\frac{\partial g(x(a),a)}{\partial a_i} = -\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial g(x(a),a)}{\partial x_i}\frac{\partial x_i(a)}{\partial a_j}\right] \tag{2.9}$$

Trazendo o sinal de menos para dentro dos colchetes, pode-se substituir o lado esquerdo de (2.9) em (2.8) para obter:

$$\frac{\partial M(a)}{\partial a_j} = \lambda(a)\frac{\partial g(x(a),a)}{\partial x_i} + \frac{\partial f(x(a),a)}{\partial a_j} \tag{2.10}$$

Assim, o lado direito desta equação é idêntico ao visto na equação (2.5), então:

$$\frac{\partial L}{\partial a_j}\ |_{x(a),\lambda(a)} = \frac{\partial M(a)}{\partial a_j} \tag{2.11}$$

c.q.d

3 Identidade de Roy

A identidade de Roy é uma das propriedades da função de utilidade indireta, esta relata que a demanda marshaliana[2] para o bem i é simplesmente a relação entre as derivadas parciais desta função em relação a p e y. Mostrar-se-á a prova desta relação utilizando o teorema do envelope.

$$\text{Seja } V(p,y) = [x_1(p,y), x_2(p,y), ..., x_n(p,y)]$$

Derivando esta função em relação a y:

$$\frac{\partial V(p,y)}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y} + ... + \frac{\partial U}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial y} \tag{3.1}$$

[2]Demanda do bem i no ponto de máximo.

Aqui utilizar-se-á o problema de maximização da utilidade pelos multiplicadores de Lagrange:

$$Max\, U(x)$$
$$\text{sujeita a}$$
$$y = \textstyle\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

$$L(x, \lambda) = U + \lambda \left[y - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \right]$$

As condições de primeira ordem são:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial U}{\partial x_i} = \lambda p_i,\ \forall i = 1, ..., n \tag{3.2}$$

Substituindo a equação (3.2) em (3.1):

$$\frac{\partial V(p, y)}{\partial y} = \lambda p_1 \frac{\partial x_1}{\partial y} + ... + \lambda p_n \frac{\partial x_n}{\partial y}$$

Isolando Lambda:

$$\frac{\partial V(p, y)}{\partial y} = \lambda \left[p_1 \frac{\partial x_1}{\partial y} + ... + p_n \frac{\partial x_n}{\partial y} \right] \tag{3.3}$$

Agora considera-se a lei de Walras, onde a soma dos preços vezes suas respectivas quantidades são iguais a renda:

$$y = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

Derivando em relação a y:

$$1 = p_1 \frac{\partial x_1}{\partial y} + ... + p_n \frac{\partial x_n}{\partial y}$$

Substituindo este resultado na equação (3.3):

$$\frac{\partial V(p, y)}{\partial y} = \lambda \tag{3.4}$$

O próximo passo é derivar-se a função de utilidade indireta em relação a um p_i qualquer:

$$\frac{\partial V(p,y)}{\partial p_i} = \frac{\partial U}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial p_i} + ... + \frac{\partial U}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial p_i} \tag{3.5}$$

Utilizando novamente a equação (3.2):

$$\frac{\partial V(p,y)}{\partial p_i} = \lambda \left[p_1 \frac{\partial x_1}{\partial p_i} + ... + p_n \frac{\partial x_n}{\partial p_i} \right] \tag{3.6}$$

Agora deriva-se a lei de Walras em relação a um p_i qualquer:

$$0 = p_1 \frac{\partial x_1}{\partial p_i} + ... + x_i + p_i \frac{\partial x_i}{\partial p_i} + ... + p_n \frac{\partial x_n}{\partial p_i}$$

$$-x_i = p_1 \frac{\partial x_1}{\partial p_i} + ... + p_n \frac{\partial x_n}{\partial p_i} \tag{3.7}$$

Inserindo a equação (3.7) na equação (3.6):

$$\frac{\partial V(p,y)}{\partial p_i} = -\lambda x_i \tag{3.8}$$

Logo, divide-se a derivada da função de utilidade indireta em relação ao um preço qualquer pela derivada da função de utilidade indireta em função da renda tem-se o seguinte:

$$-\left(\frac{\frac{\partial V(p,y)}{\partial p_i}}{\frac{\partial V(p,y)}{\partial y}} \right) = x_i(p,y) \tag{3.9}$$

c.q.d

4 Considerações Finais

Após verificar-se as demonstrações do teorema do envelope e da identidade de Roy, pode observar que elas são análogas. Na verdade, o teorema do envelope é utilizado para realizar a prova desta identidade. Quando se faz a substituição da solução do problema de maximização (3.1) em (3.2) consegue-se agrupar todas as derivadas das demandas marshalianas ótimas em relação a sua renda vezes o seu preço, depois faz-se outra substituição inserindo a lei de Walras chegando em (3.4). O mesmo procedimento é semelhante para chegar-se a (3.8).

Em suma, o teorema do envelope mostra o efeito total sobre o valor ótimo da função objetivo quando o parâmetro se altera (e por sua vez, precisaria ser otimizado novamente) pode ser deduzido simplesmente tomando parte do problema do dos multiplicadores de Lagrange em relação ao parâmetro que se modificou e então valorar a derivada em relação solução do problema de primeira ordem das condições de Kuhn-Tucker. Assim, este teorema permite “envelopar” as soluções ótimas, o que é muito útil para a ciência econômica e uma das contribuições deste teorema é a o uso desta ferramenta para a prova da identidade de Roy, como foi mostrado neste trabalho.

5 Referências

JEHLE, G. A.; RENY, P. J. Advanced Microeconomics Theory. 3ed. The Addison-Welsey series in economics. 2011.

MAS-COLLEL, A.; WHINSTON, M. D. e GREEN, J.R., Microeconomic Theory, Oxford University Press, 1996.

SIMON, C. P. E.; BLUME, L; Mathematics for Economists. W.W. Norton e Company, Inc, 1994.

VARIAN, H. R. Microeconomic Analysis, 3ed. W.W. Norton e Company, 1992.