UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA
CURSO DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS

SÉRIE CADERNOS ECONÔMICOS

DUOPÓLIOS E JOGOS

Texto didático n.2

Autores: André Carraro
Gabrielito Menezes
Rodrigo Fernandez

PELOTAS

Março 2010

DUOPÓLIOS E JOGOS

André Carraro[1]
Gabrielito Menezes[2]
Rodrigo Fernandez[3]

1. O uso da teoria dos jogos para o estudo do comportamento das firmas

O estudo do comportamento das firmas passou, nos últimos anos, por um importante processo de evolução, como sugere Siffert (1995, p.105), ao descontentamento com o instrumental oferecido pela microeconomia clássica na análise do comportamento e da estrutura industrial. Seguindo esta evolução, a organização industrial deixa de seu uma simples aplicação da teoria dos preços como colocada por Bain (1968), Stigler (1968) e Caves (1980) para passar a estudar o **comportamento estratégico** das firmas que compõem uma indústria, já que agora, estudando mercados imperfeitos, uma firma é capaz de afetar o comportamento de suas rivais.

Neste novo ambiente de competição, o termo comportamento estratégico surge como uns dos principais conceitos no estudo dos mercados e das estratégias das firmas. Já a teoria nos jogos não cooperativos é uma linguagem de **estratégia e equilíbrio**, ou seja, o objetivo da teoria dos jogos é representar o comportamento estratégico dos agentes num jogo, examinando as estratégias individuais, de tal forma que, alcançando o equilíbrio de Nash, nenhum jogador possui qualquer incentivo unilateral a mudar de estratégia.

Dessa forma, a teoria dos jogos surge como um importante instrumental a ser usado na análise da **interação estratégica** entre agentes econômicos[4] fornecendo a possibilidade de avanços teóricos na análise da atual organização dos mercados.

[1]Doutor em Economia pela UFRGS e Professor do Mestrado em Organizações e Mercados – PPGOM/UFPEL. E-mail: andre.carraro@gmail.com
[2] Mestrando em Organizações e Mercados – PPGOM/UFPEL. E-mail: gabrielitorm@gmail.com
[3] Mestrando em Organizações e Mercados – PPGOM/UFPEL E-mail: rodrigo@rodrigofernandez.com.br
[4] Neste trabalho os agentes econômicos serão representados pelas firmas.

2. O que é um jogo?

Para descrever a situação de interação estratégica por meio da um jogo nós necessitamos conhecer três coisas:

(1) Os jogados do jogo;

(2) As estratégias possíveis de serem escolhidas por cada jogador, conhecidas como espaço estratégico ou conjunto de estratégias;

(3) O ganho recebido por cada jogador de cada combinação de estratégias que poderia ser possível de ser escolhida pelos jogadores;

Os jogadores do jogo são os agentes econômicos que estão passando por uma situação de interação estratégica. Podem ser representados por firmas, consumidores ou por qualquer outro agente ou instituição econômica.

Já as estratégias possíveis de serem adotadas por cada jogador é formada pelo conjunto de todas as ações possíveis de serem escolhidas por cada jogador. Por exemplo, em um jogo disputado por firmas rivais, as possíveis ações a serem escolhidas por cada firma podem ser formadas por: preço alto ou preço baixo.

Finalmente, o ganho recebido por cada jogador de cada possível combinação de estratégias a serem escolhidas, nada mais é do que quanto cada jogador irá receber se adotarem uma combinação de estratégias qualquer. Utilizando o exemplo acima das firmas, como cada firma pose escolher entre estabelecer um preço alto ou preço baixo para seu produto, cada combinação possível de estratégias fornecerá um lucro (ganho) diferente para cada firma.

Agora que já foi caracterizado o jogo, podemos definir que: um jogo é a representação de uma situação na qual um número determinado de agentes interagem de forma estratégica. Isto é, o bem-estar de cada agente depende não somente das suas ações mas, também, das ações dos outros agentes envolvidos no jogo. Ou dito de outra forma, a melhor (no sentido de ótima) ação que cada jogador possa tomar depende do que este jogador espera que os outros façam.

Note que ao contrário da análise da concorrência perfeita, o ganho de cada jogador depende não somente das suas ações, mas também das ações dos seus concorrentes. Assim, a função de ganho de cada jogador depende da combinação de ações escolhidas por todos os jogadores.

Um jogo pode ser representado na forma normal ou na forma extensiva. A diferença básica está que na representação de um jogo sob forma extensiva dedica-se uma maior atenção ao tempo do jogo. Este tipo de representação fornece informações mais detalhadas sobre como os jogadores escolheram suas ações no passado. Já a representação de um jogo na sua forma normal é mais utilizado quando lidamos com jogos onde os jogadores escolhem suas ações de forma simultânea[5].

Conhecendo-se os jogadores que fazem parte do jogo, seu conjunto de estratégias e a função de ganho, um jogo pode ser representado na sua forma normal como no exemplo abaixo.

Exemplo 1:

Na forma norma de um jogo, cada jogador escolhe somente uma estratégia[6] escolhidas pelos jogadores determinará os ganhos de cada jogador.

Jogo da Moeda

	Jogador 2		
Jogador 1		Cara	Coroa
	Cara	1, -1	-1, 1
	Coroa	-1, 1	1, -1

Neste jogo existem dois jogadores, jogador 1 e o jogador 2, cada jogador possui duas estratégias possíveis: jogar cara ou jogar coroa. Cada jogador simultaneamente coloca uma moeda na posição cara ou coroa (ou seja, a face virada para cima ou virada para baixo) de tal forma que o seu oponente não saiba qual foi a sua estratégia adotada. Se ambos colocarem cada moeda na mesma posição (ambos cara, ou ambos coroa), o jogador 1 ganha R$1,00 e o jogador perde R$ 1,00, por outro, se a posição das moedas estiver (cara-coroa ou coroa-cara) o jogador 1 perde R$ 1,00 e o jogador 2 ganha r$ 1,00[7].

Os ganhos dos dois jogadores, quando uma determinada combinação de estratégias é escolhida, são dados na apropriada célula da matriz. Por convenção, o ganho do jogador linha,

[5] O leitor poderá observar nas seções seguintes que o Duopólio de Cournot e de Bertrand são exemplos da representação de um jogo na sua forma normal, enquanto que o Duopólio de Stackelberg é representado na forma extensiva.

[6] Por simplificação, neste trabalho não será abordado os casos onde os jogadores possuem alguma dívida sobre como o seu oponente irá agir. Para resolver-se um jogo nesta forma é necessário a utilização do conceito de estratégias mistas. Assim, neste trabalho é utilizado somente o conceito de estratégias puras. Para o leitor que estiver interessado no estudo destes casos, recomenda-se a leitura de Gibbons (1992).

[7] Este jogo é um exemplo de um jogo com soma zero, onde para um ganhar o outro necessariamente deve perder.

chamado neste jogo de jogador 1, é o primeiro ganho dado, seguido pelo ganho do jogador coluna (aqui, jogador).

Exemplo 2:

Jogo da Pedra-Papel-Tesoura

		Jogador 2		
		Pedra	Papel	Tesoura
Jogador 1	Pedra	0,0	-1,1	1,-1
	Papel	1,-1	0,0	-1,1
	Tesoura	-1,1	1,-1	0,0

Novamente há dois jogadores, 1 e 2, mas agora, cada jogador possui três estratégias possíveis de serem adotadas (Pedra, Papel e Tesoura). Este jogo é semelhante ao nostálgico "jogo do discordar". As regras do jogo são as seguinte: o papel domina a pedra, já que o papel pode embrulhar a pedra, a pedra domina a tesoura já que a pedra bate na tesoura e, a tesoura domina o papel, já que pode cortar o papel. Os ganhos da combinação de cada estrategia possível de ser escolhida está representando na matriz.

Note que cada jogo não necessariamente precisa contar com somente duas três estratégias distintas, nem é necessário que cada jogador possua a mesma quantidade de estratégias do seu oponente. Os exemplos apresentados neste texto somente possuem uma quantidade limitada de estratégias para facilitar a visualização do jogo.

3. Resolvendo um Jogo

Após a representação de um jogo na sua forma normal, o próximo passo é resolver o jogo. Primeiramente é introduzido o conceito de estratégias estritamente dominadas, baseado no argumente que jogadores racionais nunca escolherão uma estratégias que fornece ganhos sempre menores, não importando qual a estratégia adotada pelo oponente. Logo após é apresentado o conceito de equilíbrio de Nash para um jogo.

3.1 O Processo de Eliminação Seqüencial das Estratégias Estritamente Dominadas (PESEED)

Considere o jogo representado no exemplo 3 abaixo. Neste jogo os jogadores são uma empresa monopolista que deve decidir se produz um produto de alta qualidade ou um produto de baixa qualidade e o consumidor que deve decidir se está disposto a pagar um preço alto ou se está disposto a pagar um preço baixo.

Exemplo 3:

Problema na Determinação da Qualidade do Produto

		Consumidor	
Empresa		Preço Alto	Preço Baixo
	Qualidade Alta	16,8	1,10
	Qualidade Baixa	20,2	3,4

Neste jogo o consumidor terá um ganho maior (maior satisfação) pagando um preço baixo pelo produto e, a empresa terá um lucro maior produzindo um produto de baixa qualidade, já que neste caso o custo de produção é menor.

Qual é a solução para este jogo? Existe somente uma reposta correta. Uma forma de resolver este jogo é introduzindo o conceito do PESEED, na qual nenhum jogador jogará uma estratégia estritamente dominada.

No problema de determinação da qualidade do produto, apresentado no exemplo acima, se a empresa decidir produzir um produto de alta qualidade, o consumidor irá escolher pagar um preço baixo, já que o ganho proveniente da escolha desta estratégia é maior que o ganho proveniente da escolha de pagar um preço alto (10 > 8). Caso a empresa decida produzir um produto de baixa qualidade, a sua estratégia ótima a ser adotada é pagar um preço baixo (4>2). Ou seja, para o consumidor independente da estratégia adotada pela empresa, o ganho obtido por optar pagar sempre um preço baixo é maior do que se ele opta-se por pagar um preço alto. Logo, como o consumidor é um agente racional ele nunca irá jogar a estratégia "Preço Alto" e, desta forma, a estratégia "Preço Alto" está sendo estritamente dominada pela estratégia "Preço Baixo".

Olhando agora para a empresa. Como a empresa conhece os ganhos do jogo, e sendo ela capaz de resolver o problema do consumidor com a mesma habilidade que o consumidor possui, então a empresa monopolista sabe que a estratégia "Preço Baixo" domina a estratégia "Preço Alto" para o consumidor e logo, a empresa sabe que o consumidor somente está disposto a pagar um preço baixo tanto para um produto de baixa qualidade. Assim, a empresa compara seus ganhos obtidos por ambas estratégias possíveis de serem escolhidas e obta por produzir um produto de baixa qualidade (já que 3 > 1).

Logo a solução para este jogo é a empresa produzir um produto de baixa qualidade com o consumidor pagando um preço baixo.

O PESEED apesar de possuir a idéia de que jogadores racionais não jogam estratégias estritamente dominadas possui dois problemas. Primeiro, casa passo requer um novo pressuposto sobre o que os jogadores sabem de cada outro racionalmente. Se o objetivo for de aplicar o processo para um número arbitrário de passos, nós necessitamos que existe um "conhecimento comum". Isto é, torna-se necessário assumir que não somente todos os jogadores são racionais, mas também, que todos os jogadores sabem que todos os jogadores são racionais e que todos sabem que todos sabem que todos são racionais e assim por diante.

O segundo problema é que este processo produz freqüentemente muitas predições imprevistas sobre o resultado do jogo. No exemplo abaixo não há estratégias estritamente dominadas a serem eliminadas.

Exemplo 4:

Problema no PESEED

	Jogador 2			
Jogador 1		L	C	R
	T	0,4	4,0	5,3
	M	4,0	0,4	5,3
	B	3,5	3,5	6,6

Para resolver o problema de predição quando não há estratégia estritamente dominada a ser eliminada é usado o conceito de equilíbrio de Nash como solução do jogo, de tal forma que uma estratégia que é o equilíbrio de Nash passa pelo processo de eliminação das estratégias estritamente dominadas. Ou seja, se uma dada estratégia é solução do jogo fornecida pelo conceito de equilíbrio de Nash, então esta estratégia não é dominada por nenhuma outra estratégia. Contudo, o inverso não é verdade, nem toda a estratégia que sobrevive ao PESEED é um equilíbrio de Nash.

3.2 O Equilíbrio de Nash

Num equilíbrio de Nash cada estratégia escolhida por cada jogador é a melhor resposta possível de ser adotada, dadas as estratégias a serem adotadas pelos seus oponentes. Sendo a estratégia adotada a sua melhor resposta à ação de seu oponente, nenhum jogador possui qualquer estímulo para desviar de sua estratégia de Nash, logo o equilíbrio de Nash, logo o equilíbrio de Nash é estável.

Comparando os conceitos de PESEED e o equilíbrio de Nash, pode-se dizer que o primeiro o jogador está fazendo o melhor que pode, independente do que seu oponente esteja fazendo já no conceito de Nash cada jogador está fazendo o melhor que pode dado ação do seu oponente.

Considere o jogo simultâneo de dois jogadores apresentando no exemplo 5 abaixo. Este jogo clássico é conhecido como “Dilema dos Prisioneiros”.

Exemplo 5:

Dilema dos Prisioneiros

		Prisioneiro 2	
		Não Confessa	Confessa
Prisioneiro1	Não confessa	-1,-1	-9,0
	Confessa	0,-9	-6,-6

A descrição do jogo é a seguinte: dois prisioneiros foram acusados de terem cooperado entre si durante um crime praticado. Os cúmplices encontram-se aprisionados em salas distintas, não havendo comunicação entre eles.

No mesmo momento foi efetuada, para ambos os cúmplices, a seguinte proposta: se ambos os prisioneiros confessarem, não havendo colaboração entre eles, cada um receberá uma condenação de seis meses de prisão. Se nenhum dos dois confessarem, havendo colaboração entre eles, cada um receberá como condenação um mês de prisão. Por outro lado, se um dos prisioneiros confessar o crime mas o outro não, aquele que confessou sairá livre, enquanto o outro será condenado à nove meses de prisão. Se você fosse um dos prisioneiros, qual seria a sua opção? Confessar ou não Confessar?

A matriz de ganhos (anos de condenação) representa todas as possíveis combinações de estratégias entre o prisioneiro 1 e o prisioneiro 2. Note que o lucro negativo representa a condenação de cada um dos jogadores.

Como sugere o nome deste jogo, ambos os jogadores estão enfrentando um dilema. Se ambos prisioneiros pudessem entrar em acordo (formando um conluio) cada um passaria somente um mês na prisão. Entretanto, eles estão incomunicáveis; e ainda que a comunicação fosse possível, será que poderiam confiar um no outro?

Se o prisioneiro 1 não confessar, ele estará correndo o risco de beneficiar seu cúmplice às suas custas. Caso o prisioneiro 2, resolvendo o problema de maximização do prisioneiro 1, saiba que este irá adotar a estratégia não confessar, a sua melhor resposta seria jogar confessar, saindo livre no mesmo dia, enquanto que o seu companheiro pegaria uma condenação de 9 meses de prisão. Da mesma forma que o jogador 2 consegue resolver o problema do jogador 1, este também pode resolver o problema do jogador 2 com a mesma habilidade que o jogador 2 resolve o seu problema. Assim, ambos sabem que caso escolham, jogar a estratégia não confessar seu oponente irá, certamente, escolher a estratégia confessar. Para evitar ficar nove meses "vendo o sol nascendo quadrado" é que ambos irão jogar confessar e ambos serão condenados a seis meses de prisão.

Note que aqui surge um problema com o conceito de equilíbrio de Nash. Nem sempre o resultado fornecido pelo uso do conceito de equilíbrio de Nash será o Pareto Superior. No Dilema dos Prisioneiros, visivelmente a combinação das estratégias confessar – confessar fornece um resultado onde ambos os jogadores estariam numa situação melhor, já que um ano na prisão é estritamente preferível a seis anos. Neste jogo o resultado não confessar – não confessar é considerado um resultado Pareto Ótimo Inferior.

As empresas oligopolistas também enfrentam situações semelhantes ao Dilema dos Prisioneiros. Por exemplo, elas necessitam decidir se concorrerão agressivamente procurando ampliar sua participação no mercado, ou se irão "cooperar" com seus concorrentes coexistindo no mercado de forma pacífica. Caso isto aconteça ambas empresas manterão suas fatias de mercado inalteradas formando um cartel onde as quantidades ofertadas no mercado poderão ser limitadas e o preço mantido elevado, conseguindo assim maiores lucros. Porém, como veremos (na próxima seção), este resultado de conluio não é estável ao longo do tempo (da mesma forma que o Dilema dos Prisioneiros a cooperação não era uma estratégia sustentável), não sendo portanto, um equilíbrio de Nash.

A partir da próxima seção será analisado o comportamento estratégico das empresas num mercado duopolista onde as firmas comportam-se como descrito num duopólio de Cournot Bertrand e Stackelberg. O comportamento das firmas num dupólio de Cournot e Bertrand é representado por um jogo estático, onde as ações das firmas são tomadas de forma simultânea, como no Dilema do Prisioneiro.

4. A Aplicação da Teoria dos Jogos num Mercado Duopolista

O mercado duopolista é formado por duas empresas que estão competindo num mercado é um caso de interação estratégica, sendo a teoria dos jogos um ótimo instrumento para a análise deste mercado.

Como primeiro caso de aplicação da teoria dos jogos no estudo do comportamento das firmas em mercados oligopolistas, é apresentado o caso de competição estática, onde os movimentos das firmas são simultâneos (Duopólio de Cournot e Bertrand), e após será apresentado o caso de competição dinâmica, onde uma firma (conhecida como firma líder) age primeiro que a outra firma (seguidora)[6].

4.1 O Duopólio de Cournot[7]

No duopólio de Cournot duas firmas, a firma A e a firma B, produzem um produto homogêneo estando competindo pelos níveis de produção ou seja, neste mercado a variável de escolha é a quantidade a ser ofertada, q_A e q_B. Assim a oferta agregada do mercado é formada pela soma das quantidades ofertadas pelas duas firmas, $Q = q_A + q_B$. O preço associado com esta quantidade (função de demanda inversa) é tomada pela função $p(q_A, q_B) = a - b\,(q_A + q_B)$, onde $b>0$. A firma i possui uma função custo dada por, C_i: $c_i\ (y_i)$ para todo i = A, B, note que não há custo fixo e o custo marginal é constante.

Observe que neste jogo existem dois jogadores: a firma A e a firma B. O conjunto de estratégia é formado pela escolha das quantidades $qi = [\ 0, +\ \pi)$ e o ganho de cada firma é dado pela sua função lucro ($\pi_i = p_i \cdot q_i - c_i \cdot q_i$).

O problema de maximização da firma A é:

$$\text{Max } \pi_A\,(q_A, q_B) = p \cdot q_A - c_A \cdot q_A \qquad (1)$$

Substituindo “p” pela função preço na equação (1) temos:

[6] Dentre o conjunto formado pelos jogos simultâneos esta seção esta restrita para os jogos com informação completa. Isto é, cada função de ganho dos jogadores é de conhecimento comum de todos os jogadores.

[7] Este modelo foi pela primeira vez analisado pelo economista francês Augustin Cournot em 1838 na sua obra *Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie des Richesses.*

$$\text{Max } \pi_A (q_A, q_B) = [\ a - b\ (q_A\ + q_B\ )]\ q_A - c_A\ .\ q_A \qquad (2)$$

Resolvendo o problema acima de otimização não condicionada, obteremos a quantidade ótima para a firma A.

$$\partial\pi_A / \partial q_A = a - 2bq_A - bq_B - c_A = 0 \qquad (3)$$

isolando q_A na equação (3)

$$q_A^*(q_B) = \left(\frac{a - b\,q_B - c_A}{2b} \right) \qquad (4)$$

A equação (4) é conhecida como a **função de reação** da firma A. Esta função mostra como a firma A irá reagir a uma ação da firma B. Ou seja, a função de reação da firma A demonstrar qual a quantidade ótima a ser produzida pela firma A dado que a firma B adotou determinada estratégia de produção.

Note que a quantidade ótima (q_A^*) da firma A não depende somente das suas variáveis de escolha, mas depende também da quantidade q_B. Quanto maior for a quantidade ofertada pela firma B, menor será a quantidade ofertada pela firma A. Isto porque o preço do produto está negativamente relacionado com as quantidades. Como a quantidade ótima a ser ofertada pela firma A depende da quantidade a ser ofertada pela firma B, o lucro da firma A acaba sendo influenciado fortemente pela decisão a ser tomada pela firma B.

A firma B por sua vez, deverá resolver o seu problema de maximização dos lucros da seguinte forma:

$$\text{Max } \pi_B\ (q_A, q_B) = p\ .\ q_B - c_B\ .\ q_B \qquad (5)$$

Substituindo “p” pela função preço na equação (5) temos:

$$\text{Max } \pi_B\ (q_A, q_B) = [\ a - b\ (q_A + q_B)]\ q_B - c_B\ .\ q_B \qquad (6)$$

Resolvendo o problema acima, da mesma forma que foi feito para a firma A obteremos a quantidade ótima para a firma B.

$$\partial \pi_B / \partial q_B = a - 2bq_B - bq_A - c_B = 0 \qquad (7)$$

isolando q_B na equação (7),

$$q_B{}^*(q_A) = \left(\frac{a - b\, q_A - c_B}{2b} \right) \qquad (8)$$

A equação (8) representa a **função de reação** da firma B. Ou seja, qual é a melhor resposta da firma B quando a firma A escolher produzir q_A unidades do produto. Agora, pode-se observar que o lucro da firma B será influenciado não somente por suas ações, mas também pela ação da firma rival. A quantidade escolhida pela firma A entra na função da firma B influenciando-a de forma negativa.

Substituindo, na função de reação da firma A, "q_B" pela função de reação da firma B (q_B* (q_A)), obtêm-se a quantidade ótima a ser ofertada pela firma A. Tem-se então:

$$q_A{}^* = \lfloor a - b\left(a - b\, q_A - c_B / 2b\right) - c_A \rfloor / 2b \qquad (9)$$

e realizando as operações necessárias:

$$q_A{}^* = \left(\frac{a - 2c_A - c_B}{3b} \right) \qquad (10)$$

Fazendo o mesmo para a firma B obtemos que:

$$q_B{}^* = \left(\frac{a - 2c_B - c_A}{3b} \right) \qquad (11)$$

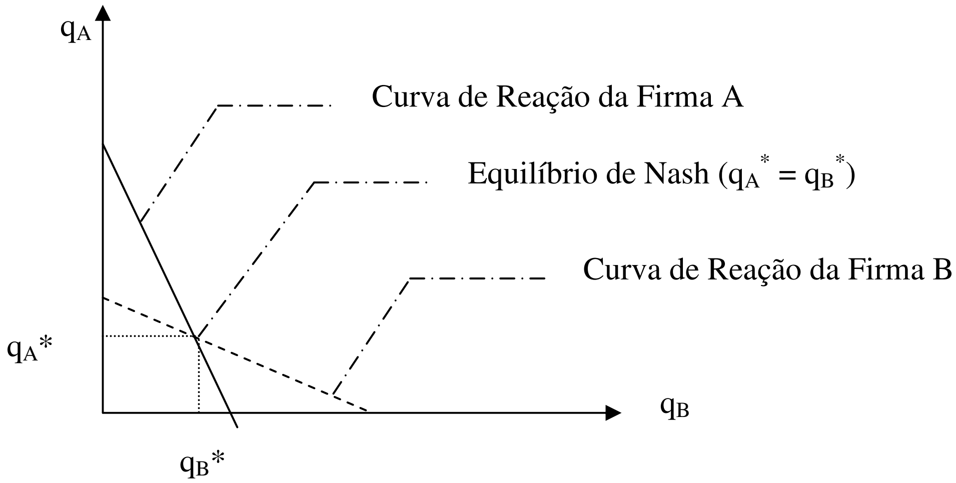
As quantidades (q_A^*; q_B^*) formam o Equilíbrio de Nash, já que neste ponto, como cada firma está fazendo o melhor que pode dado a ação de sua rival, nenhuma firma possui qualquer incentivo unilateral de desviar deste resultado final. A principal característica do

Duopólio de Cournot é que no ponto de equilíbrio cada firma obtém ⅓ do mercado, ficando ⅓ do mercado sem atendimento.

Podemos representar graficamente as funções de reação das firmas A e B da seguinte forma.

Figura 1

As curvas de Reação e o Equilíbrio de Nash



Agora que já foi apresentado a forma geral de resolução de um problema de Duopólio de Cournot, vamos resolver um exemplo prático, dando números aos coeficientes de tecnologia e de demanda.

<u>Exercício 1</u>: Considere duas firmas (firma 1 e a firma 2) disputando um mercado segundo o Duopólio de Cournot. A curva de demanda inversa é dada por: $p\ (q_1, q_2) = 50 - 2\ (q_1 + q_2)$. As funções de custo são respectivamente[9]:

$$c_1\ (q_1) = 0{,}5q_1^2$$

$$c_2\ (q_2) = 0{,}4q_2^2$$

Neste exercício vamos montar a matriz dos ganhos (lucros) e achar o equilíbrio de Nash. Para isto, devemos resolver o problema de maximização dos lucros para cada firma quando ambas disputam o mercado de forma acirrada (não cooperação), quando ambas formam um cartel (cooperação) e quando uma das firmas trai a outra desviando do resultado fornecido pelo cartel. Vamos, então, resolver este exercício em três partes distintas:

[9] Note que neste exemplo o custo marginal não é constante como foi assumido antes.

1ª Parte: Achando os lucros quando as firmas não cooperam:

Primeiro vamos montar o problema de maximização para a firma 1.

$$\pi_1 = p_1 \cdot q_1 - c_1 q_1 \qquad (12)$$

$$\pi_1 = [50 - 2(q_1 + q_2)]q_1 - 0{,}5 q_1^2 \qquad (13)$$

$$\partial \pi_1 / \partial q_1 = 50 - 4q_1 - 2q_2 - q_1 = 0 \qquad (14)$$

isolando q_1, temos

$$q_1 * (q_2) = \left(\frac{50 - q_2}{5} \right) \qquad (15)$$

A equação (15) é a função de reação da firma 1.

Agora, resolvendo o problema de maximização para a firma 2, temos que:

$$\pi_2 = p_2 \cdot q_2 - c_2 q_2 \qquad (16)$$

$$\pi_2 = [50 - 2(q_1 + q_2)]q_2 - 0{,}4 q_2^2 \qquad (17)$$

$$\partial \pi_2 / \partial q_2 = 50 - 4q_2 - 2q_1 - 0{,}8 q_2 = 0 \qquad (18)$$

isolando q_1, temos

$$q_2 * (q_1) = \left(\frac{50 - q_1}{4{,}8} \right) \qquad (19)$$

A equação (19) é a função de reação da firma 2.

Para acharmos as quantidades ótimas, vamos substituir a função de reação da firma 1 na função de reação da firma 2. Assim, a função de reação da firma 2 torna-se:

$$q_2 * (q_1) = \frac{50 - 2\left[\frac{50 - 2q_2}{5} \right]}{4{,}8} \qquad (20)$$

Resolvendo a equação (20) achamos que a quantidade ótima para a firma 2 é: $q_2^* = 7{,}5$.

Substituindo a quantidade ótima da firma 2 na função de reação da firma 1, obteremos a quantidade ótima da firma 1. Ou seja:

$$q_1^*(q_2) = \frac{50 - 2(7{,}5)}{5} \qquad (21)$$

Resolvendo a equação (21) achamos que a quantidade ótima para a firma é: $q_1^* = 7$.

Agora que já foi descoberto as quantidades ótimas de ambas as firmas, temos que o preço de equilíbrio do mercado será:

$$p(q_1, q_2) = 50 - 2\,(q_1^* + q_2^*)$$
$$p(q_1, q_2) = 50 - 2\,(7 + 7{,}5) = 21$$

Substituindo as quantidades ótimas descobertas nas funções lucros de ambas firmas, equações (13) e (17), obteremos o lucro obtido por cada firma. Respectivamente, $\pi_1 = 122{,}5$ e $\pi_2 = 135$.

2ª Parte: Achando os lucros quando as firmas cooperam.

Quando as duas firmas resolvem cooperar, formando um cartel, o objetivo passar a ser o de maximizar o lucro do cartel.

$$\text{Max } \pi_c = p(q_1 + q_2) * [q_1 + q_2] - c_1(q_1) - c_2(q_2) \qquad (22)$$

$$\text{Max } \pi_c = [50 - 2(q_1 + q_2)] * (q_1 + q_2) - 0{,}5q_1^2 - 0{,}4q_2^2 \qquad (23)$$

Derivando a função lucro do cartel em relação a quantidade de ambas firmas:

$$\partial \pi_c / \partial q_1 = 50 - 4q_1 - 4q_2 - q_1 = 0 \qquad (24)$$

$$q_1 = \left(\frac{50 - 4q_2}{5} \right) \qquad (25)$$

$$\partial \pi_c / \partial q_2 = 50 - 4q_1 - 4q_2 - 8q_2 = 0 \qquad (26)$$

$$q_2 = \left(\frac{50 - 4q_1}{4,8} \right) \qquad (27)$$

Novamente, substituindo q_1 na função de reação da firma 2, achamos a quantidade ótima para a firma 2 (q_2* = 6,25) e, substituindo q_2* na função de reação da firma 1, obteremos q_1* = 5,0.

Substituindo as quantidades na função preço obtemos o preço de equilíbrio quando as firmas ofertam as quantidades obtidas.

$$P(q_1, q_2) = 50 - 2(q_1 + q_2)$$

$$P(q_1, q_2) = 50 - 2(6,25 + 5) \text{ e, portanto, } P(q_1, q_2) = 27,50$$

Agora que já possuímos as quantidades ótimas a ser ofertadas por cada firma e o preço de equilíbrio do mercado, podemos obter o lucro de cada firma.

O lucro da firma 2 é dado por: $\pi_1 = p.q_1 - c_1q_1$

$\pi_1 = 27,5\ (5) - 0,5\ (5)^2$ e, obtemos $\pi_1 = 125,0$.

Já o lucro da firma 2 é dado por: $\pi_2 = p.q_1 - c_1q_1$

$\pi_2 = 27,5\ (6,25) - 0,4\ (6,25)^2$ e, obtemos $\pi_2 = 156,25$.

Somando os lucros de ambas as firmas 1 e 2 obtemos o lucro do cartel, $\pi_c = 281,25$.

3ª Parte: Quando uma das empresas coopera enquanto que a outra não coopera.

a) Vamos pensar, primeiro, no caso em que a firma 2 coopera, mas a firma 1 não coopera. Neste caso, a firma 2 vai manter a sua quantidade ofertada no nível q_2 = 6,25. Dado que a firma 2 vai ofertar 6,25 unidades, a firma 1 vai resolver o seu problema de maximização, encontrando a sua melhor resposta [q_1* (q_2)] para a estratégia q_2 = 6,25 da firma 2.

A firma 1 vai maximizar: $\pi_1 = P\ (q_1, q_2)\ q_1 - 0,5q_1^2$ (27)

$$\pi_1 = [50\text{-}2(q_1, q_2)q_1] - 0{,}5\, q_1^2 \quad (28)$$

$$\partial \pi_1 / \partial q_1 = 50 - 4q_1 - 2q_2 - q_1 = 0 \quad (29)$$

e, obtemos a função de reação da firma 1:

$$q_1(q_2) = \left(\frac{50 - 2q_2}{5} \right) \quad (30)$$

Como $q_2 = 6{,}25$, podemos substituir na equação (30) e achamos $q_1{}^* = 7{,}5$.

O preço de equilíbrio será:

$$P\,(q_1, q_2) = 50\text{-}2\,(7{,}5 + 6{,}25) = 22{,}5$$

E, finalmente, o lucro de cada firma será:

$$\pi_1 = 22{,}5\,(7{,}5) - 0{,}5\,(7{,}5)^2 \rightarrow \pi_1 = 140{,}625$$

$$\pi_2 = 22{,}5\,(6{,}25) - 0{,}4\,(6{,}25)^2 \rightarrow \pi_2 = 125{,}0$$

Agora, por último, vamos pensar em que a firma 1 coopere, mas a firma 2 não-coopere. Neste caso, a firma 1 vai manter a sua quantidade ofertada fixa em 5 unidades mas, a firma 2 vai desviar do acordo que formou o cartel. Resolvendo o seu problema de maximização, a firma 2 encontrará a sua melhor resposta a estratégia escolhida pela firma 1 ($q_1 = 5$).

A firma 2 vai maximizar: $\pi_2 = P\,(q_1, q_2)\, q_2 - 0{,}4q_2^2$ (31)

$$\pi_2 = [50\text{-}2(q_1, q_2)q_2] - 0{,}4\, q_2^2 \quad (32)$$

$$\partial \pi_2 / \partial q_2 = 50 - 2q_1 - 4q_2 - 0{,}8q_2 = 0 \quad (33)$$

e, obtemos a função de reação da firma 2:

$$q_2(q_1) = \left(\frac{50 - 2q_1}{4{,}8} \right) \quad (34)$$

Como $q_1 = 5$, podemos substituir na equação (34) e achamos $q_2^* = 8,33$.

O preço de equilíbrio será: $P(q_1, q_2) = 50-2(5 + 8,33) = 23,34$.

E, finalmente, o lucro de cada firma será:

$$\pi_1 = 23,34 (5) - 0,5 (5)^2 \rightarrow \pi_1 = 104,20$$

$$\pi_2 = 23,34 (8,33) - 0,4 (8,33)^2 \rightarrow \pi_2 = 166,66$$

Tendo achado todos os ganhos relacionados com todas as combinações de estratégias possíveis de serem escolhidas, podemos montar a matriz de lucro.

Matriz de Lucro

		Firma 2	
		Cooperar	Não cooperar
Firma 1	Cooperar	125; 156,25	104,20; 166,66
	Não cooperar	140,62; 125	122,5; 135

Agora podemos visualizar o dilema em que as firmas estão enfrentando. Caso ambas cooperassem, o lucro obtido por cada firma seria maior se comparado com o ganho obtido quando elas competem pelo mercado. No entanto, a combinação de estratégias "Cooperar-Cooperar" não é sustentável, já que se uma firma realmente cooperar, a outra firma possui o incentivo de desviar do acordo e ofertar uma quantidade maior do produto[10]

Logo, o equilíbrio de Nash deste jogo é ambas as firmas não cooperarem, com a firma 2 tendo um lucro maior já que sua função custo é menor da função de custo da firma 1.

[10] A cooperação somente poderá tornar-se um equilíbrio estável caso o jogo fosse repetido infinitas vezes.

4.2 O Duopólio de Bertrand[11]

Neste modelo as firmas A e B competem por preços e não por quantidades, como ocorre no modelo de duopólio de Cournot. Assim, no modelo de Bertrand a variável de escolha de cada firma é preço (p_A p_B).

Nesta seção será analisado dois casos possíveis: primeiro, quando ambas firmas produzem produtos diferenciados (produtos heterogêneos) e, neste caso, os seus preços são diferenciados. Segundo, o caso de firmas que produzem produtos homogêneos e logo, ambas possuem o mesmo preço.

4.2.1 Duopólio de Bertrand com Produtos Heterogêneos

Neste modelo existem duas firmas maximizadoras de lucro, firma A e firma B, num mercado onde a função demanda, para cada firma, é dada por q_A (p) = $a_1 - b_1$ (p_A) + b_2 (p_2) e, q_B (p) = $a_2 + d_1$ (p_A) – d_2 (p_B), ou seja, a quantidade é função do preço. O objetivo de cada firma é maximizar a função lucro dada por ($\pi_i = p.q_i - c_i \,.\, q_i$).

O problema de maximização da firma A é:

$$\text{Max } \pi_A (p_A, p_B) = p_A \,.\, q_A - c_A \,.\, q_A \tag{31}$$

Substituindo "q_A" pela função quantidade da firma A na equação (31) temos:

$$\text{Max } \pi_A (p_A, p_B) = [a_1 - b_1 p_A + b_2 p_B]\, p_A - c_A\, [a_1 - b_1 p_A + b_2 p_B] \tag{32}$$

Resolvendo o problema acima, obteremos a quantidade ótima para a firma A.

$$\partial \pi_A / \partial p_A = a_1 - 2 b_1 p_A + b_2 p_B + c_A b_1 = 0 \tag{33}$$

isolando p_A na equação (33)

[11] O modelo de Bertrand foi desenvolvido pelo economista francês Joseph Bertrand em 1883 no seu artigo *Théorie Mathématique de la Richesse Sociale*, publicado no Journal des Savants.

$$p_A^*(p_B)=\left(\frac{a_1+b_2 p_B+c_A b_1}{2b_1}\right) \tag{34}$$

A equação (34) nada mais é do que a **função de reação** da firma A.

Diferente da função de reação do modelo de Cournot, onde quanto maior fosse a quantidade ofertada pela firma B, menor seria a quantidade ótima ofertada pela firma A, na função de reação do modelo de Bertrand uma escolha de um preço maior pela firma B, resultaria na adoção de um preço maior pela firma A. Ou seja, dado que a firma B elevou os preços, a melhor estratégia para a firma A é também aumentar os seus preços.

A firma B por sua vez, deverá resolver o seu problema de maximização dos lucros da seguinte forma.

$$Max\,\pi_B(p_A, p_B)= p_B\cdot q_B - c_B\cdot q_B \tag{35}$$

Substituindo "q_B" pela função quantidade da firma B na equação (35) temos:

$$Max\,\pi_B(p_A, p_B)=\lfloor a_2+d_1 p_A-d_2 p_B\rfloor p_B - c_B\lfloor a_2+d_1 p_A-d_2 p_B\rfloor \tag{36}$$

$$\partial\pi_B/\partial p_B = a_2+d_1 p_A-2d_2 p_B+d_2 c_B=0 \tag{37}$$

isolando p_B na equação (37)

$$p_B*(p_A)=\left(\frac{a_2+d_1 p_A+d_2 c_B}{2d_2}\right) \tag{38}$$

Substituindo, na função de reação da firma A, "p_B" pela função de reação da firma B (p_B^* (p_A)), obtêm-se o preço ótimo a ser escolhido pela firma A. Tem-se após as operações necessárias:

$$p_A^* = \left(\frac{(a_1 + c_A b_1) 2 d_2 + (a_2 + d_2 c_B) b_2}{4 b_1 d_2 - b_2 d_1} \right) \tag{39}$$

Fazendo o mesmo para a firma B, obtemos que:

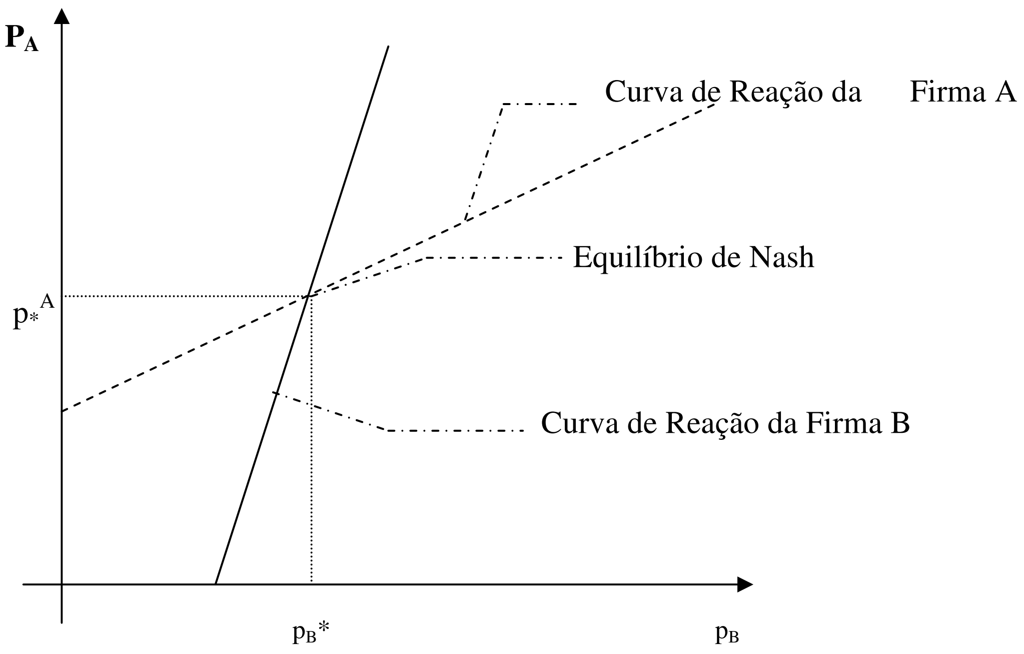
$$p_B^* = \left(\frac{(a_2 + d_2 c_B) 2 b_1 + d_1 (a_1 + c_A b_1)}{4 d_2 b_1 - d_1 b_2} \right) \tag{40}$$

As quantidades (p_A^*; p_B^*) formam o equilíbrio de Nash, já que neste ponto, como cada firma está adotando a melhor estratégia (preço) possível dado a estratégia (preço) adotada pela sua rival, nenhuma firma possui qualquer incentivo de desviar deste resultado final.

Representando graficamente as funções de reação das firmas A e B, obtemos:

Figura 2

As curvas de Reação e o Equilíbrio de Nash no modelo de Bertrand



As funções de reação no modelo de Bertrand possuem inclinação positiva. A melhor resposta para um aumento nos preços efetuados pela firma A é a firma B aumentar seus preços. No ponto em que as duas curvas de reação se cruzam, obtemos os preços de ambas firmas no ponto de equilíbrio de Nash.

4.2.2 Duopólio de Bertrand com Produtos Homogêneos

No caso de um duopólio de Bertrand com produtos homogêneos a função custo das firmas A e B são iguais ($c_A = c_B$). E, o preço de equilíbrio para ambas as firmas A e B será: $p_A = p_B = c$.

Mas será que este preço de equilíbrio é realmente estável? Será que nenhuma firma possui qualquer incentivo a desviar deste ponto de equilíbrio? Claro que não. Para provar que o modelo de Bertrand com produtos homogêneos possui um único ponto de equilíbrio onde $p_A = p_B = c$ vamos lembrar que o custo para ambas é igual a "c".

Primeiro, suponha que uma das firmas estabeleça um preço abaixo do custo c. Neste caso a firma estará sofrendo prejuízos nas suas vendas tendo um incentivo a aumentar o seu preço até, no mínimo, igualar ao ponto c, onde seu lucro é zero. Assim, este preço inicial abaixo do ponto c não é um equilíbrio de Nash.

Agora, vamos pensar que uma das firmas estabelece seu preço igual ao custo, enquanto a outra estabelece seu preço acima do ponto c. Neste caso a firma que estabelecer seu preço igual ao custo c estará vendendo para todo o mercado, porém não obtendo lucro. Logo esta firma possui um incentivo a desviar deste preço aumentando-o de tal forma que ele fique maior do que o custo c mas ainda menor do preço de sua firma rival, permanecendo ainda com todo o mercado mas, obtendo agora um lucro positivo. Novamente, este preço não é um equilíbrio de Nash.

Por fim, suponha que ambos os preços estejam acima do custo c. Ora, neste caso, qualquer das firmas possui um forte incentivo para diminuir seu preço, apenas o suficiente para torná-lo menor que o preço de sua rival, passando a dominar o mercado por inteiro e ainda possuindo um lucro positivo. Assim, ambos os preços escolhidos não formam um equilíbrio de Nash.

4.3 O Modelo de Duopólio de Stackelberh

Até agora foi apresentado dois modelos onde ambas firmas tomavam suas decisões simultaneamente. Agora veremos um exemplo de um jogo dinâmico. No modelo de Stackelberg uma firma, chamada de firma líder, realiza primeiro a escolha de quanto produzir. No entanto momento do jogo, a segunda firma, conhecida como a firma seguidora, observa a ação da firma líder seguidora, observa a ação da firma líder e toma a sua decisão de quanto produzir.

As características deste jogo são as seguintes:

a) os movimentos ocorrem em sequência;

b) todos os movimentos prévios são observados antes do próximo movimento ser escolhido;

c) os ganhos dos jogadores provenientes de cada combinação factível de movimentos são de conhecimento comum.

Este tipo de jogo é resolvido por meio da idéia da indução retroativa, que nada mais é do que resolver o jogo "de trás para frente", do último estágio para primeiro, como segue abaixo:

Vamos representar a firma líder como sendo a firma 1 e, a firma seguidora como sendo a firma 2, além disto a função demanda inversa será representada como $p(q_1, q_2) = a- b(q_1, q_2)$.

Assim, quando chegar a vez da firma 2 jogar, no segundo estágio do jogo, ela estará diante do seguinte problema: como maximizar o seu lucro (que depende da quantidade a ser produzida) dado a ação adotada pela firma 1 (líder) no primeiro estágio do jogo. Ou seja, a firma 2 deve:

$$\text{Máx } \pi_2 = p(q_1, q_2)\, q_2 - c\,(q_2) \qquad (41)$$

$$\text{Máx } \pi_2 = [\, a - b\,(q_1 + q_2)]\, q_2 - c_2\,(q_2) \qquad (42)$$

Derivando a função lucro da firma 2 em função da sua quantidade q_2, encontraremos a função de reação da firma seguidora, $q_2(q_1)$, ou seja, qual a quantidade ótima a ser escolhida pela firma seguidora, no segundo momento, dado a ação (q_1) adotada pela firma líder no primeiro momento do jogo.

$$\partial\pi_2/\partial q_2 = a - bq_1 - 2bq_2 - c_2 = 0 \qquad (43)$$

isolando q_2 temos: $q_2^* (q_1) = \left(\dfrac{a - bq_1 - c_2}{2b}\right)$ (44)

Agora, voltando um passo, no primeiro estágio do jogo, dado que a firma 1 consegue resolver o problema da firma 2 tão bem como a firma 2 consegue, a firma líder pode antecipar a ação a ser adotada pela firma seguidora e, então, escolher a quantidade a ser produzida já considerando a reação da firma seguidora no segundo momento. Representando este comportamento, a firma líder irá no primeiro momento:

$$\text{Máx } p\,[\,q_1 + q_2\,(q1)]\, q_1 - c_1\,(q_1) \qquad (45)$$

Resolvendo este problema de maximização, obteremos a quantidade ótima (q_1*) a ser escolhida pela firma líder no primeiro estágio do jogo já considerando a reação da firma seguidora no estágio seguinte.

$$\text{Máx } \pi_1 = [\,a - b\,(q_1 + q_2\,(q_1)]\, q_1 - c_1\,(q_1) \qquad (46)$$

$$\text{Máx } \pi_1 = \left[a - b\left(q_1 + \frac{a - bq_1 - c_2}{2b}\right)\right] \times q_1 - c_1(q_1) \qquad (47)$$

$$\partial\pi_1/\partial q_1 = a\text{-}2bq_1 - ba/2b + bq_1 + c_2/2\text{-}c_1 = 0 \qquad (48)$$

isolando q_1, temos: $q_1^* = \left(\dfrac{a + c_2 - 2c_1}{2b}\right)$ (49)

Substituindo q_1* na função de reação da firma 2, obtemos a quantidade ótimo a ser escolhida pela firma seguidora:

$$q_2\,^* = \left(\frac{a - 3c_2 + 2c_1}{4b}\right) \qquad (50)$$

Agora que já obtemos a quantidade ótima a ser ofertada por cada firma, podemos obter a quantidade total a ser ofertada no mercado: $Qt = q_1 + q_2$.

$$Qt = \frac{(a + c_2 + 2c_1)}{2b} + \frac{(a - 3c_2 + 2c_1)}{4b} = \frac{(3a - c_2 - 2c_1)}{4b}$$

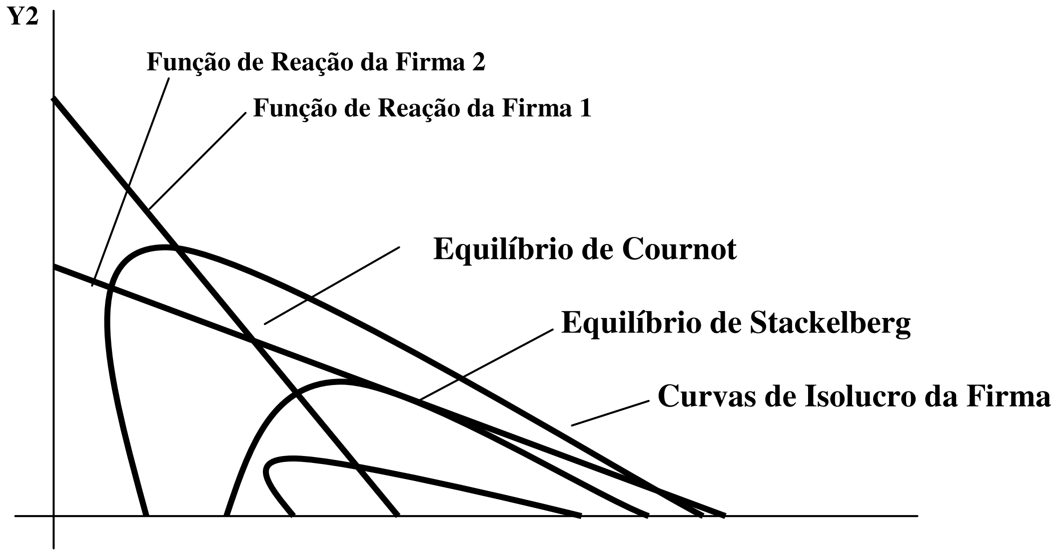
Relembrando que no equilíbrio de Nash do modelo de duopólio de Cournot cada firma produz $\frac{(a - c)\,2}{3}$, podemos observar que a quantidade total ofertada no modelo de Stackelberg é maior que no modelo de Cournot, sendo o preço de equilíbrio de mercado menor no modelo de Stackelberg.

Como as vendas são maiores no modelo de Stackelberg, o lucro da firma 1 (líder) será maior que o lucro da firma 1 no modelo de Cournot. Porém, como no agregado o lucro do modelo de Cournot é maior do que o Stackelberg, o lucro da empresa seguidora será menor do que o lucro da empresa 2 no modelo de Cournot.

Podemos representar graficamente este resultado conforme o gráfico abaixo.

Figura 3

Comparação entre o equilíbrio de Cournot e Stackelberg



Nota: O equilíbrio de Nash ocorre quando as duas curvas de reação se interceptam. O equilíbrio de Stackelberg ocorre quando uma curva de reação é tangenciada pela curva de isolucro da outra firma.

Exercício 3. Vamos pensar que duas firmas (1 e 2) estão disputando um mercado onde a função demanda inversa é dada por $p = 50 - 2(q_1 + q_2)$. Ambas firmas possuem custos marginais iguais a zero. Ache o equilíbrio de Cournot e de Stackelberg. No caso do modelo de Stackelberg considere a firma 1 como a firma líder e a firma 2 como a firma seguidora.

1º Parte) na busca do equilíbrio de Cournot:

A firma 1: Máx $\pi_1 = [50 - 2(q_1 + q_2)]\ q_1$

$\partial\pi_1/\partial q_1 = 50 - 4q_1 - 2q_2 = 0$

isolando q_1, temos: $q_{1(q2)} = \left(\dfrac{25 - q_2}{2}\right)$

Já a firma 2: Máx $\pi_2 = [50 - 2(q_1 + q_2)]\ q_2$

$\partial\pi_2/\partial q_2 = 50 - 4q_2 - 2q_1 = 0$

isolando q_2, temos: $q_{2(q1)} = \left(\dfrac{25 - q_1}{2}\right)$

Substituindo uma função de reação na outra achamos os valores ótimos no equilíbrio de Cournot para q_1 e q_2, são eles: $q_1^* = q_2^* = 8{,}33$.

2ª) Na busca do equilíbrio de Stackelberg:

A firma 2 (seguidora) no segundo estágio do jogo:

Máx $\pi_2 = [\ 50 - 2(q_1 + q_2)]\ q_2$

$\partial\pi_2/\partial q_2 = 50 - 4q_2 - 2q_1 = 0$

isolando q_2 temos: $q_{2(q1)} = \left(\dfrac{25 - q_1}{2}\right)$

A firma 1 (líder) no primeiro estágio do jogo:

Máx $\pi_1 = [\ 50 - 2\ (q_1 + q_2\ (q_1)\ )\ ]q_1$

Máx $\pi_1 = [\ 50 - 2\left(q_1 + \dfrac{25 - q_1}{2}\right) \times q1$

$$\partial\pi_1/\partial q_1 = 25 - 2q_1 = 0$$

Isolando q_1, obtemos $q_1^* = 12,5$, substituindo na função de reação da firma 2, achamos $q_2^* = 6,25$.

Visualmente os resultados, na tabela abaixo, podemos confirmar as relações entre os modelos:

Tabela 1 – Comparação dos resultados nos Duopólios de Cournot e Stackelberg

	Duopólio de Cournot	Duopólio de Stackelberg
Preço de equilíbrio	16,68	12,5
Quantidade da firma 1	8,33	12,5
Quantidade da firma 2	8,33	6,25
Lucro da firma 1	138,94	156,25
Lucro da firma 2	138,94	78,12

5. Conclusão

O objetivo principal deste trabalho foi apresentar, de uma forma introdutória, a aplicação da teoria dos jogos não cooperativos no estudo da organização industrial. Neste sentido, foi enfocado unicamente os jogos não cooperativos, que além do grande desenvolvimento teórico nas últimas décadas são, sem dúvida alguma, o tipo de jogo mais utilizado no estudo do comportamento estratégico dos agentes econômicos.

No entanto, a teoria dos jogos não se resume no estudo dos casos de jogos não cooperativos de informação completa. Muito importante, também, é o estudo de jogos repetidos onde a cooperação pode tornar-se um equilíbrio estável. Nos últimos anos, vários economistas, em diversas partes do mundo, passaram a pesquisar e a desenvolver a teoria dos jogos cooperativos, que também possui grande aplicação na organização industrial.

Da mesma forma, este trabalho não enfocou a possibilidade de informação incompleta, onde os agentes envolvidos no jogo não possuem certeza sobre as estratégias a serem adotadas pelos seus rivais. Neste caso, cada jogador deverá lançar uma distribuição de probabilidade sobre o conjunto de estratégias possíveis de serem adotadas pelos seus rivais.

O instrumental da teoria dos jogos possui aplicação em diversas áreas da Ciências Econômicas, não resumindo-se ao estudo do comportamento das firmas em mercados imperfeitos. Por exemplo, a análise de comportamento estratégico entre sindicatos e empresas possibilita a utilização do instrumental da teoria dos jogos na área da economia do trabalho. Na área Macroeconômica, as políticas adotadas por um país podem ter algum reflexo sobre outras economias, havendo, também, neste caso, um comportamento estratégico entre os países[12].

Finalmente, como visto acima, a teoria dos jogos possui uma ampla aplicação na Ciência Econômica tendo este trabalho, apresentando ao leitor análise do comportamento estratégico.

6 Bibliografia

BAIN, Joe. **Industrial Organization.** 2 ° ed. New York : John Wiley and Sond, 1968.

CAVES, Richard E. Corporate Strategy and Structure. **Journal of Economics Literature.** n. 18, p. 64-92, march 1980.

GIBBONS, Robert. **A Primer in Game Theory.** New York: Harvester Wheatsheaf, 1992.

KREPS, David M. **A Course in Microeconomic Theory.** Princeton: Princeton University Press, 1990.

KREPS, David M. **Teoría de Juegos Y Modelación Económica.** México: Fondo de Cultura Económica, 1994.

MAS-COLLEL, Andreu; WHINSTON, Michael; GREEN, Jerry. **Microeconomic Theory.** New York: Oxford University Press, 1995.

[12] Para o leitor interessado na aplicação da teoria dos jogos na análise Macroeconômica, sugere-se a leitura de Sachs-Larrain (1995, seção 14.8).