

Hidrodinâmica Avançada

Departamento de Física

IFM

Universidade Federal de Pelotas

2024

Sumário

1	Fundamentos	5
1.1	Definição de Fluido	5
1.2	Fluido, Sistema Infinitesimal ou Partícula de Fluido e Livre Caminho Médio	5
1.3	Densidade e Pressão em um Ponto de um Fluido	7
1.3.1	Densidade	7
1.3.2	Pressão em um ponto de um fluido	8
1.3.2.1	Fluido em Repouso	10
1.3.2.2	Líquidos em Repouso	10
1.3.2.3	Pressão em um Ponto da Atmosfera	11
1.4	Campo de Velocidades	12
1.5	Tensão de Deformação (ou Corte) e Lei de Newton da Viscosidade	14
1.5.1	Tensão de Deformação	14
1.5.2	Lei de Newton da Viscosidade	16
1.6	Lista de Questões e Problemas	18
1.7	Tabelas de Dados	28
2	Fluidos em Movimento	31
2.1	Representação de Euler e Lagrange	31
2.2	Linha de corrente, Trajetória e Linha de Emissão	31
2.2.1	Linha de Corrente	31
2.2.2	Linhas de corrente – dependência temporal	33
2.2.3	Trajetoária	34
2.2.4	Linhas de Emissão	38
2.3	Derivada Total de Campos Escalares e Vetoriais (derivada em um ponto)	39
2.3.1	Derivada Total de um Campo Escalar	39
2.3.2	Notação Indicial e Variação Advectiva	39
2.4	Divergência e Convergência	41
2.5	Campo de Aceleração	41
2.6	Tensores Taxa de Deformação e Rotação de uma Partícula de Fluido : Movimento Relativo Próximo de um Ponto	42
2.7	Classes de Fluxos	44
2.7.1	Fluxos Laminares e Turbulentos, Classificação em Termos do Campo de Velocidades	44
2.7.2	Invíscido e Viscoso, Classificação em Termos da Viscosidade	44
2.7.3	Rotacional e Irrotacional, Classificação em Termos do Vetor Vorticidade	45
2.7.4	Compressível e Incompressível	45
2.8	Lista de Questões e Problemas	45
2.9	Apêndice	47
2.9.1	Tensores	47
2.9.2	Produto de Matrizes-Revisão	48
2.9.3	Representação Matricial	48
2.9.4	Teorema	48
2.9.5	Propriedades Básicas dos Tensores	48

2.9.5.1	Adição:	48
2.9.5.2	Produto de um Tensor por um Vetor:	49
2.9.5.3	Produto de Tensores:	49
2.9.5.4	Tensor Transposto:	49
2.9.5.5	Tensor Delta de Kronecker	50
2.9.5.6	Tensor Unitário Alternado	50
2.9.5.7	Produto Diádico de dois Vetores ou Produto Tensorial	50
3	Equação da Continuidade, Vorticidade, Função Potencial e de Corrente	51
3.1	Equação da Continuidade no Sistema Infinitesimal e num Volume de Controle	51
3.2	Equação da Continuidade em Coordenadas Cilíndricas e Plano Polares	52
3.3	Forma Integral da Continuidade	53
3.4	Fluxos Rotacionais e Irrotacionais : Vorticidade	54
3.5	Funções de Corrente e Potencial em Fluxos Bidimensionais	56
3.5.1	Interpretação Geométrica de ψ	57
3.5.2	Interpretação Física de ψ	57
3.5.3	Fluxo Bidimensional Compressível	58
3.5.4	Fluxo Bidimensional Incompressível em Coordenadas Plano Polares	59
3.5.5	Velocidade Potencial	60
3.6	Casos particulares	60
3.6.1	Campo de Velocidade Uniforme I	60
3.6.2	Fonte ou Sorvedouro na Origem I	61
3.6.3	Linha de Vórtice I	62
3.7	Relações de Cauchy-Riemann	64
3.8	Potenciais Complexos	65
3.8.1	Campo de Velocidade Uniforme II	65
3.8.2	Fonte ou Sorvedouro na Origem II	65
3.8.3	Linha de Vórtice II	66
3.9	Lista de Problemas	66
4	Fluidos Ideais	70
4.1	Equação de Euler	70
4.2	Teorema de Transporte de Reynolds	70
4.2.1	Teorema de Transporte de Reynolds para um Volume Fixo Arbitrário	71
4.2.2	Teorema de Transporte de Reynolds para um Volume de Controle em Movimento com Velocidade Constante	73
4.2.3	Teorema de Transporte de Reynolds para um Volume de Controle de Forma Constante mas Velocidade Variável	73
4.2.4	Teorema de Transporte de Reynolds para Movimentos e Deformações Arbitrárias	73
4.2.5	Aproximação unidimensional para termos de fluxo	74
4.3	Equação do Momento Linear	75
4.4	Equação da Energia	78
4.5	Equação de Bernoulli	81
4.6	Equação da Vorticidade	83
4.7	Propriedades da Equação da Vorticidade	84
4.8	Teorema de Circulação de Kelvin	85
4.9	Lista de Problemas	86

5	Equação de Navier-Stokes	91
5.1	Tensor de Tensão	91
5.1.1	Força de Gradiente de Pressão (força de corpo)	91
5.1.2	Força da Gravidade (força de corpo)	91
5.1.3	Força de Viscosidade ou de Tensões Viscosas (força de superfície)	92
5.2	Referencial não Inercial	92
5.3	O Termo de Tensão para Líquidos e Gases	97
5.4	Tensor de Tensões Geral	98
5.4.1	Pressão	99
5.4.2	Tensões de deformação	99
5.5	Formulação da Equação de Navier-Stokes	100
5.5.1	Viscosidade Turbulenta	100
5.5.2	O Termo de Coriolis	101
5.6	Problemas Estacionários	102
5.6.1	Fluxo de uma Camada Plana de Fluido sob a Ação da Gravidade	102
5.6.2	Fluxo de Fluido entre Cilindros	104
5.6.3	Fluxo de Poiseuille em um Tubo Cilíndrico	105
6	Análise Dimensional e Semelhança	109
6.1	Introdução	109
6.2	Análise Dimensional	111
6.3	Teorema dos Pi(II)	115
6.4	Protocolo de Aplicação do Teorema dos Pi(II)	116
6.5	Similaridade	121
6.5.1	Similaridade Geométrica	121
6.5.2	Similaridade Cinemática	121
6.5.3	Similaridade Dinâmica	122
6.6	Lista de Problemas	123

Capítulo 1

Fundamentos

1.1 Definição de Fluido

O termo fluido em física se refere a matéria, quando esta se deforma frente uma força aplicada, em contrapartida ao que é observado nos sólidos. É do senso comum a presença dos fluidos na vida cotidiana. O ar na atmosfera, a água em rios e oceanos e os líquidos e gases nas mais distintas aplicações tecnológicas. De fato, tanto líquidos como gases são considerados fluidos. A diferença está apenas nas suas compressibilidades, não obstante ambos são descritos pelo mesmo conjunto de equações matemáticas.

Podemos definir os fluidos a partir do conceito de tensão. Na figura 1.1, uma força ΔF é aplicada sobre uma superfície ΔA , definida pelo vetor \hat{n} , normal a superfície. A força dividida pela área da superfície, na qual, a mesma está sendo aplicada é definida como a tensão. Como a força pode ser decomposta em uma componente normal ΔF_n e uma componente tangencial ΔF_t , o mesmo é observado para a tensão. Uma tensão normal (compressão) e outra tangente a superfície ΔA (esta última conhecida como tensão de deformação ou cisalhamento - componente tangencial da força por unidade de área).



Figura 1.1: Componentes normal e tangencial da força.

A tensão de deformação matematicamente é escrita como:

$$\tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}. \quad (1.1)$$

"Assim, ao longo deste curso, iremos nos deter em fluidos que tendem a responder por meio de movimentos ou deformações a tensões".

1.2 Fluido, Sistema Infinitesimal ou Partícula de Fluido e Livre Caminho Médio

A mecânica dos fluidos é o ramo da física que aborda os movimento dos fluidos (os fluxos). Exemplos são a circulação atmosférica, a circulação marinha, o escoamento da fumaça de uma chaminé, entre tantos outros encontrados no nosso dia a dia. De outra forma, a mecânica

dos fluidos é o ramo onde os princípios fundamentais da mecânica são aplicados a líquidos e gases. A essência da mecânica dos fluidos se dá tanto do ponto de vista teórico, bem como experimental. Desde que ela obedece a princípios físicos bem estabelecidos, existe uma estrutura teórica bem fundamentada. Entretanto, esta estrutura é muitas vezes frustrante, visto que é desenvolvida considerando-se situações ideais, muitas vezes distantes dos fenômenos reais. Os maiores obstáculos a aplicação da teoria são as complexas geometrias envolvidas e a propriedade física conhecida como viscosidade. As equações básicas do movimento dos fluidos são muito difíceis de serem resolvidas para geometrias arbitrárias. Muitas vezes, cálculos numéricos são empregados na solução das equações via métodos computacionais, sendo este ramo conhecido como mecânica dos fluidos computacional (CFM). O segundo problema, a viscosidade, que aumenta o grau de dificuldade para a solução das equações do movimento, além de gerar instabilidades ao longo do fluxo dando origem a turbulência. Atualmente, a mecânica dos fluidos se constitui em uma teoria aceita, entretanto ela precisa ser suportado por experimentos. Em muitas situações, a partir dos experimentos resultam as principais informações e dados a respeito de um fenômeno.

Uma hipótese fundamental é de que os fluidos possam ser considerados meios contínuos. Sabemos que os fluidos são formados por moléculas muito espaçadas entre si no caso dos gases, e mais próximas no caso dos líquidos. Além disso, estas moléculas se movem por grandes distâncias com relativa liberdade. Assim, a conceito de massa e, massa por unidade de volume (densidade), perdem o sentido na escala molecular por que o número de moléculas ocupando um determinado volume unitário varia continuamente. O efeito começa a ficar desprezível quando o volume unitário é da ordem do espaçamento intermolecular elevado ao cubo. Neste caso, o número de moléculas no interior do volume começa a se tornar aproximadamente constante, embora exista trânsito de um grande número de moléculas através das fronteiras do volume. Por outro lado, se o volume unitário for muito grande o cálculo da densidade pode ser afetado pela agregação volumétrica de partículas. O comportamento da densidade, calculado a partir da massa molecular dm contida no volume unitário dV é plotado versus este mesmo volume unitário na figura 1.2. Então existe um limite inferior abaixo do qual os efeitos moleculares dominam; e um limite superior no qual os efeitos devido a agregação se tornam importantes. A densidade do fluido fica bem definida quando:

$$\rho = \lim_{dV \rightarrow dV^*} \frac{dm}{dV} \quad (1.2)$$

, onde $dV^* \approx 10^{-9} mm^3$.

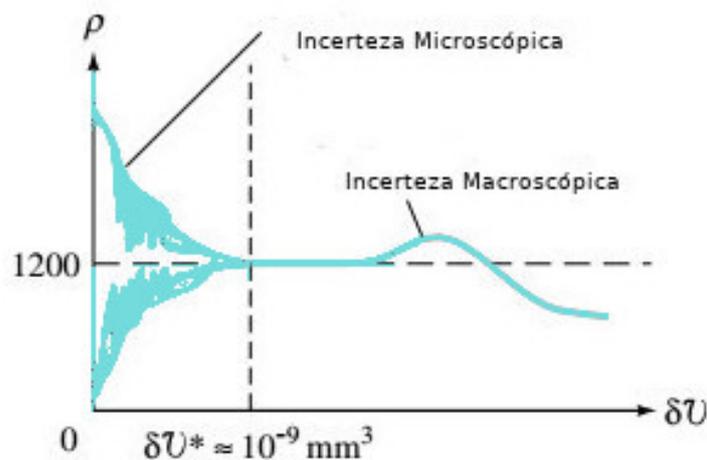


Figura 1.2: Densidade versus volume unitário.

Uma forma mais adequada de testar a hipótese do contínuo é comparar o comprimento característico do sistema l com o livre caminho médio molecular λ ; a distância média que uma molécula se desloca sem colidir com outra molécula. Se $l \gg \lambda$, a hipótese do contínuo é aceita. Da teoria molecular, o comprimento característico de um sistema se relaciona ao livre caminho médio por:

$$\lambda = 0.255 \frac{m}{\rho d^2}. \quad (1.3)$$

Na equação 1.3, m é a massa da molécula (Kg), ρ é a densidade (Kg/m³) e d o diâmetro da molécula (m). Para o ar $m = 4.8 \times 10^{-26}$ kg e $d = 3.7 \times 10^{-10}$ m. Em condições atmosféricas padrão, o livre caminho médio é de aproximadamente 6.4×10^{-6} cm. A uma elevação de 100 km é de 10 cm, e a 160 km é 5000 cm. Obviamente, neste caso a hipótese do contínuo não é aceita, e outras teorias devem ser aplicadas.

As leis básicas que aplicamos em nosso estudo da mecânica dos fluidos podem ser formuladas em termos de sistemas infinitesimais ou finitos e volumes de controle. As equações gerais parecerão diferentes nos dois casos. Ambas as abordagens são importantes no estudo da mecânica dos fluidos. No primeiro caso, as equações resultantes são equações diferenciais, e suas soluções fornecem um meio de determinar os detalhes do comportamento do movimento dos fluidos. Frequentemente, a informação procurada não requer um conhecimento detalhado do movimento do fluido. Muitas vezes estamos interessados no comportamento médio de um fluido que se move ao longo de um determinado volume (de controle), e nesses casos é mais apropriado usar formulações integrais das equações básicas.

Por fim, ao longo deste curso iremos adotar o conceito de partícula de fluido. Quando tratamos da dinâmica de um fluido, nos deparamos com o fato de que um fluido é formado por um grande número de moléculas. Não estamos interessados na dinâmica molecular, por isso ignoraremos o movimento das moléculas e trabalharemos apenas com os valores médios das grandezas físicas, de forma a analisar o comportamento macroscópico dos fluidos. Essas são as grandezas que podem ser medidas experimentalmente. Então, precisamos definir um elemento de fluido com dimensão apropriada para que as médias tenham sentido e sejam representativas do comportamento do fluido. Usaremos um modelo teórico/abstrato de partícula de fluido para representar o fluido. Dessa forma, consideraremos a pressão, temperatura, densidade, etc, de um fluido chamado de partícula de fluido. Esta partícula deve satisfazer as seguintes condições: i) grande o suficiente para conter um número significativo de moléculas de forma que os valores médios das grandezas físicas sejam significativos; ii) pequeno o suficiente para que os valores médios das grandezas físicas sejam os mesmos ao longo do parcel; iii) univocamente definido em pequenos intervalos de tempo. O conceito de partícula de fluido e sua aplicação ficarão claros ao longo do curso. No entanto, podemos comentar que este conceito é fundamental para a dinâmica dos fluidos. Ele permitirá a aplicação das leis de conservação a fluidos, e a partir das soluções destas leis determinar a dinâmica do movimento. As dimensões da partícula de fluido irão depender do fluido ou das propriedades do fluxo (fluido em movimento). Por fim, o volume de uma partícula de fluido pode variar ao longo do fluxo. Isto ocorre em fluxos compressíveis com conseqüente variação da densidade da partícula de fluido.

1.3 Densidade e Pressão em um Ponto de um Fluido

1.3.1 Densidade

O conceito básico de densidade de uma substância é dado pela razão entre a massa de uma quantidade de substância e o volume ocupado por esta.

$$\rho = \frac{m}{V}. \quad (1.4)$$

Para líquidos esta definição é satisfatória. Entretanto, como os gases são compressíveis, e para estes a definição deve ser estendida. Uma propriedade dos fluidos diretamente relacionada a densidade é o peso específico γ , ou peso por unidade de volume definido por:

$$\gamma = \frac{W(\text{peso})}{V} = \frac{mg}{V} = \rho g. \quad (1.5)$$

Na equação anterior, g é a gravidade local. A gravidade específica é geralmente usada para determinar o peso específico e a densidade. Ela é definida como a razão entre a densidade de uma substância e a densidade da água a 4° C.

$$S = \frac{\rho}{\rho_{H_2O}}. \quad (1.6)$$

A gravidade específica é também conhecida por densidade relativa.

1.3.2 Pressão em um ponto de um fluido

A pressão é a razão entre uma força normal (perpendicular) e a área de superfície sobre a qual esta força é aplicada. É uma grandeza escalar, o que implica que ela independe das direções espaciais. A determinação da pressão em um ponto de um fluido pode ser feita a partir da variação da pressão entre este ponto e um ponto de referência.

Considere a figura 1.3. Se assumirmos que a pressão no centro do elemento de volume é p , onde $p = p(x, y, z)$, o diferencial ¹ de pressão é:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz. \quad (1.7)$$

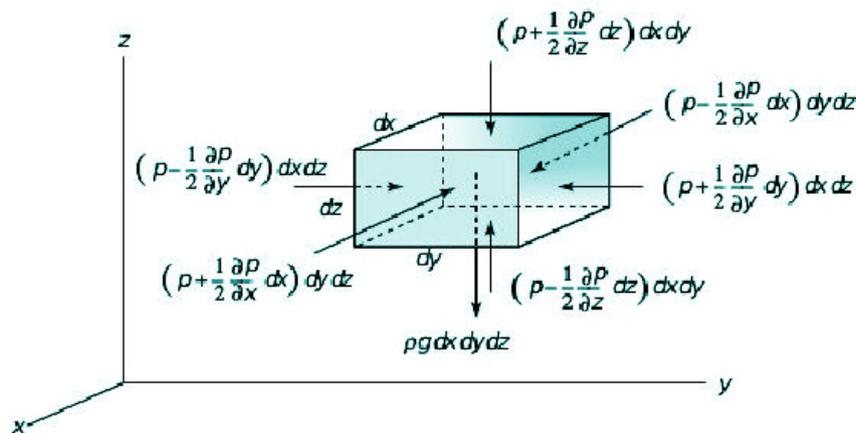


Figura 1.3: Forças agindo em um elemento infinitesimal de volume com respeito aos eixos x, y, z .

¹O diferencial de uma função de várias variáveis significa a mudança total na variável dependente devido às mudanças em todas as variáveis independentes.

$$df = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

A equação anterior pode ser usada para a determinação da pressão sobre cada uma das faces do elemento de volume. Ao longo da direção x , a variação total da pressão entre a face anterior e posterior é,

$$\left[-\left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) + \left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) \right] = -\left[\frac{\partial p}{\partial x} dx\right] \quad (1.8)$$

Multiplicando o resultado obtido na equação 1.8 pela área da face, $(dydz)$, obtemos a força total que age sobre o elemento de fluido ao longo da direção x .

$$F_x = -\left(\frac{\partial p}{\partial x} dx\right) dydz \quad (1.9)$$

Usando o mesmo procedimento para as demais direções, determinamos a força total ao longo das direções y e z .

$$F_y = -\left(\frac{\partial p}{\partial y} dy\right) dx dz \quad (1.10)$$

$$F_z = -\left(\frac{\partial p}{\partial z} dz\right) dx dy \quad (1.11)$$

Aplicando a segunda lei de Newton ao longo de cada uma das direções espaciais,

$$F_x = ma_x, \quad (1.12)$$

$$F_y = ma_y, \quad (1.13)$$

$$F_z = ma_z. \quad (1.14)$$

A massa pode ser escrita em termos da densidade por, $m = \rho/V = \rho/(dxdydz)$, de forma que:

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) dxdydz = \rho a_x dxdydz, \quad (1.15)$$

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) dxdydz = \rho a_y dxdydz, \quad (1.16)$$

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) dxdydz = \rho(a_z + g) dxdydz. \quad (1.17)$$

Dividindo as equações anteriores pelo volume do elemento $(dxdydz)$, podemos reescrever a equação 1.7 para a variação total da pressão em um ponto como:

$$dp = -\rho a_x dx - \rho a_y dy - (\rho a_z + g) dz. \quad (1.18)$$

Diferenças de pressão entre pontos podem ser obtidas a partir da integração da equação 1.18, através da análise de casos específicos.

1.3.2.1 Fluido em Repouso

Um fluido em repouso por definição é tal que não sofre nenhuma aceleração; logo $a_x = a_y = a_z = 0$. Neste caso, a equação 1.18 se reduz a:

$$dp = -\rho g dz \quad (1.19)$$

ou

$$dp = -\gamma dz \quad (1.20)$$

A solução da equação 1.20 implica que não ocorrem variações de pressão ao longo da direção x e y . A pressão varia apenas com a coordenada vertical. Além disso notamos que dp é negativo quando dz é positivo. Ou seja, a pressão diminui com o aumento de z .

1.3.2.2 Líquidos em Repouso

Se a densidade for assumida constante, podemos integrar a equação 1.20 de forma que:

$$\int dp = - \int \gamma dz, \quad (1.21)$$

$$p = -\gamma z + C, \quad (1.22)$$

$$\frac{p}{\gamma} + z = C. \quad (1.23)$$

Note que a variável z é positivo ao longo da direção positiva do eixo Oz . Se o ponto de interesse onde queremos calcular a pressão fica a uma distância h abaixo da superfície do líquido, a equação 1.23 pode ser reescrita como:

$$p = \gamma h. \quad (1.24)$$

onde $p = 0$ quando $h = 0$ (figura 1.4).

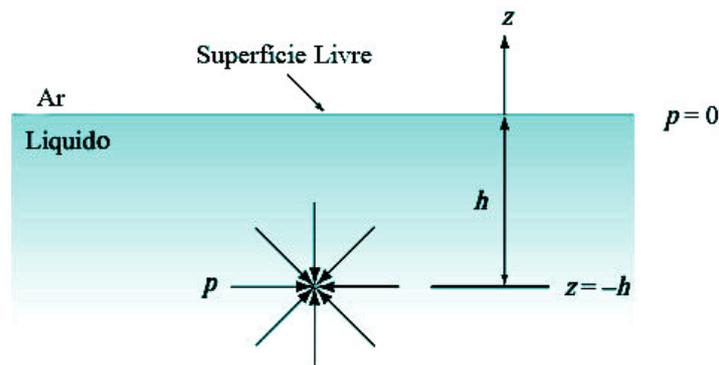


Figura 1.4: Pressão abaixo da superfície em um líquido.

1.3.2.3 Pressão em um Ponto da Atmosfera

O cálculo da pressão na atmosfera envolve algumas sutilezas. Em primeiro lugar, a densidade da atmosfera não é constante, mas varia com a altitude $\rho = \rho(z)$. A atmosfera também pode ser dividida em quatro importantes camadas, a troposfera, a estratosfera, a mesosfera e a ionosfera (figura 1.5). As condições nestas camadas mudam no tempo e com a latitude, sendo que essas camadas são mais espessas no equador e mais finas nos polos. Assim basearemos nossos cálculos na atmosfera padrão, a qual se encontra a 40° de latitude.

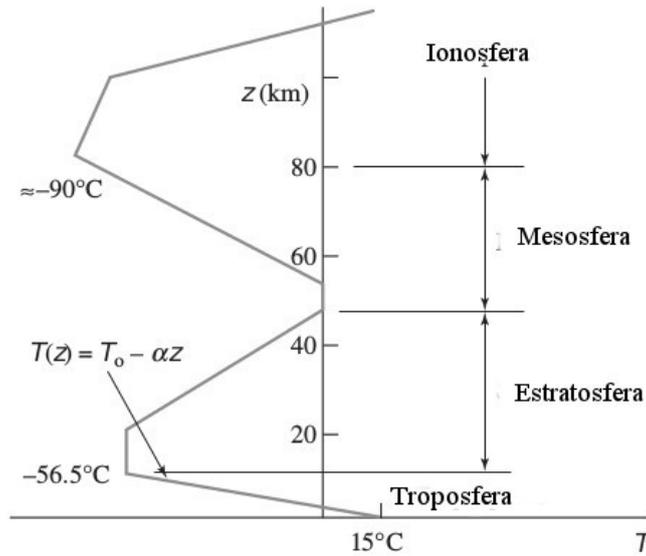


Figura 1.5: Diagrama de altitude $z(km)$ versus temperatura $T(K)$ para a atmosfera padrão.

Na troposfera a temperatura varia linearmente com a altitude.

$$T(z) = T_0 - \alpha z, \quad (1.25)$$

onde $\alpha=0.0065$ Km/m é a taxa de variação da temperatura e $T_0=288.16$ K. Na parte inicial da estratosfera a temperatura é constante e volta a aumentar com a proximidade a mesosfera, ao passo que cai novamente até o limite da ionosfera. Para o cálculo da variação de pressão na troposfera, procedemos a partir da equação 1.19 e da função de estado do gás ideal.

$$dp = -\rho g dz \quad (1.26)$$

$$pV = nRT, p = \frac{nRT}{V}, p = \rho RT \quad (1.27)$$

Nesse ponto, substituímos ρ obtido da equação 1.27 na equação 1.26, e integramos ambos os lados da equação resultante de forma que:

$$\int_{p_{atm}}^p \frac{dp}{p} = \frac{-g}{R} \int_{z_0=0}^{z=z} \left(\frac{dz}{T}\right) \quad (1.28)$$

Porém, na estratosfera, a dependência da temperatura com a altitude se dá por meio da equação $T = T(z) = T_0 - \alpha z$, onde T_0 é uma constante, de forma que:

$$\int_{p_{atm}}^p \frac{dp}{p} = -\frac{g}{R} \int_0^z \left(\frac{dz}{T_0 - \alpha z}\right) \quad (1.29)$$

Usamos a troca de variáveis $u = T_0 - \alpha z$, com $u = T_0$ quando $z_0 = 0$ e $u = T_0 - \alpha z$ quando $z = z$, a integral é reescrita como:

$$\int_{p_{atm}}^p \frac{dp}{p} = -\frac{g}{\alpha R} \int_{T_0}^{T_0 - \alpha z} \left(\frac{du}{u}\right), \quad (1.30)$$

sendo as soluções,

$$\ln \frac{p}{p_{atm}} = \frac{g}{\alpha R} \ln \left(\frac{T_0 - \alpha z}{T_0}\right). \quad (1.31)$$

Simplificando a função logaritmo em aboas os lados de 1.31,

$$\frac{p}{p_{atm}} = \left(\frac{T_0 - \alpha z}{T_0}\right)^{\frac{g}{\alpha R}}. \quad (1.32)$$

Por fim, obtemos uma expressão para a variação da pressão ao longo da troposfera com a seguinte forma:

$$p = p_{atm} \left(\frac{T_0 - \alpha z}{T_0}\right)^{\left(\frac{g}{\alpha R}\right)} \quad (1.33)$$

Na parte inferior da estratosfera, onde a temperatura é constante, a equação 1.19 será integrada como:

$$\int_{p_s}^p \frac{dp}{p} = -\frac{g}{RT_s} \int_{z_0=z_s}^{z=z} dz \quad (1.34)$$

Na equação anterior, o subíndice s significa que a integração inicia no limite entre a troposfera e a estratosfera. O resultado da integração leva a seguinte expressão:

$$\ln \frac{p}{p_s} = \frac{-g}{RT} (z - z_s) \quad (1.35)$$

Multiplicando ambos os lados da equação anterior por $\ln e$, e aplicando a propriedade dos logaritmos e simplificando obtemos:

$$\ln \frac{p}{p_s} \ln(e) = \frac{-g}{RT} (z - z_s) \ln(e) \quad (1.36)$$

$$\ln \frac{p}{p_s} \ln(e) = \ln(e)^{\frac{-g}{RT} (z - z_s)} \quad (1.37)$$

$$\ln \frac{p}{p_s} 1 = \ln(e)^{\frac{-g}{RT} (z - z_s)} \quad (1.38)$$

$$p = p_s e^{\frac{g}{RT} (z_s - z)} \quad (1.39)$$

A expressão anterior relata a pressão em função da altitude z ao longo da troposfera.

1.4 Campo de Velocidades

É definido como sendo a distribuição de velocidades das partículas de um fluido ao longo do espaço e do tempo. Essa distribuição é uma função vetorial $\vec{v}(x, y, z, t)$, a qual representa a velocidade do fluido no ponto (x, y, z) no instante t . A quantidade $\vec{v}(x, y, z, t)$ é chamada de campo vetorial de velocidade. Pode ser pensado em cada instante no tempo como uma coleção de vetores, um para cada ponto no espaço cuja direção e magnitude descrevem a direção e magnitude da velocidade do fluido naquele ponto. Esta descrição do campo vetorial de

velocidade de um fluido refere-se a pontos fixos no espaço e não a partículas em movimento no fluido. O campo de velocidades pode ser escrito em termos de três componentes escalares como:

$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}, \quad (1.40)$$

onde v_x , v_y e v_z são as componentes do vetor velocidade \vec{v} ao longo das direções x , y e z . Em geral, cada componente, v_x , v_y e v_z , será uma função de x , y , z e t . Precisamos ser claros sobre o que $\vec{v}(x, y, z, t)$ mede. Ele indica a velocidade do fluido que passa pelo ponto (x, y, z) no tempo t . Podemos continuar medindo a velocidade no mesmo ponto ou escolher qualquer outro ponto (x, y, z) no instante seguinte; o ponto (x, y, z) não é a posição contínua de uma partícula de fluido individual, mas um ponto que escolhemos observar. Portanto, x , y e z são variáveis independentes. Então, $\vec{v}(x, y, z, t)$ deve ser entendido como o campo de velocidades de todas as partículas, e não como a velocidades de uma partícula individual.

Se as propriedades em cada ponto em um campo de velocidades de um fluxo não mudam com o tempo, o fluxo é denominado permanente ou uniforme (estacionário). Matematicamente, podemos escrever esta condição como:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = 0, \quad (1.41)$$

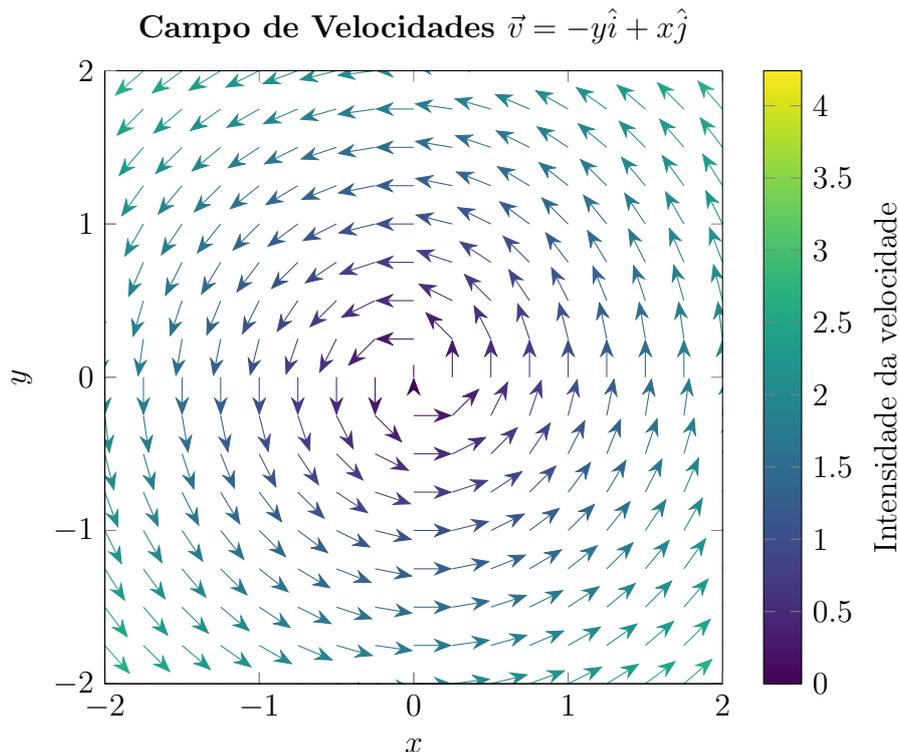
onde η representa qualquer propriedade do fluido. De forma geral, em um fluxo uniforme,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \text{ ou } \rho = \rho(x, y, z), \quad (1.42)$$

e

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0, \text{ ou } \vec{v} = \vec{v}(x, y, z) \quad (1.43)$$

O gráfico abaixo apresenta um representação do campo de velocidades dado por $\vec{v} = -y\hat{i} + x\hat{j}$, onde a barra lateral indica a intensidade da velocidade no ponto (x, y) .



1.5 Tensão de Deformação (ou Corte) e Lei de Newton da Viscosidade

1.5.1 Tensão de Deformação

Na seção 1.1 foi demonstrado que uma força que atua sobre uma superfície de um fluido, da origem a duas tensões; uma normal a superfície e uma tangencial ou paralela superfície. A origem destas tensões ocorrem do contato entre a partícula de fluido e as demais partículas adjacentes ou a vizinhança. Considere uma porção $\Delta\vec{A}$ de uma superfície em ponto C (figura 1.6). A orientação de $\Delta\vec{A}$ é dado pelo vetor unitário normal a superfície \hat{n} .

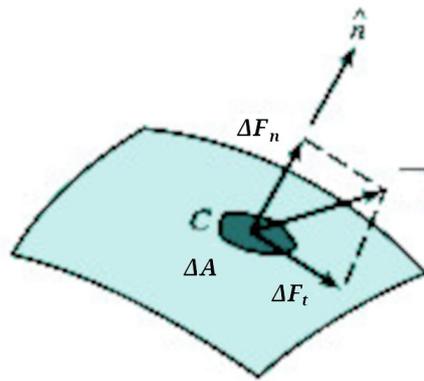


Figura 1.6: Componentes normal e tangencial da força.

A força $\Delta\vec{F}$ agindo sobre ΔA pode ser resolvida em duas componentes de tensão, no senso da seção 1.1, e escritas na forma:

$$\tau_n = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_n}{\Delta A} \quad (1.44)$$

e

$$\tau_t = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_t}{\Delta A} \quad (1.45)$$

Podemos generalizar o conceito de tensão considerando uma partícula infinitesimal de fluido como a da figura 1.7 a seguir, onde estão destacadas as faces da partícula, bem como as tensões sobre cada uma destas. Em cada face da partícula existem três tensões, sendo uma normal e duas paralelas a face. Estas duas últimas são tensões de deformação e atuam no plano da face.

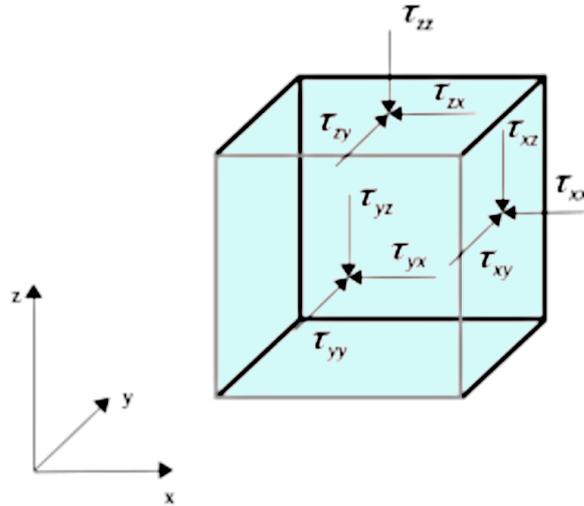


Figura 1.7: Partícula infinitesimal de fluido onde sobre cada face temos a ação de três tensões, uma normal e duas paralelas a face (tensões de deformação).

Considere um elemento de área ΔA_x , com direção para fora da partícula de fluido, e apontando no sentido positivo do eixo x . A força sobre esta face pode ser decomposta em três componentes, cada uma associada a uma direção espacial. Dividindo a magnitude de cada componente da força pela área ΔA_x , e tomando o limite de ΔA_x com este tendendo a zero, definimos as três componentes de tensão que agem sobre a face.

$$\tau_{xx} = \lim_{\Delta A_x \rightarrow 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta A_x} \quad (1.46)$$

$$\tau_{xy} = \lim_{\Delta A_x \rightarrow 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta A_x} \quad (1.47)$$

$$\tau_{xz} = \lim_{\Delta A_x \rightarrow 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta A_x} \quad (1.48)$$

As componentes da tensão apresentam uma notação com dois subíndices. A convenção para a interpretação do par de índices considera que o primeiro índice representa a direção perpendicular ao plano sobre no qual a tensão esta atuando. O segundo índice indica a direção na qual a tensão atua. Se considerarmos o elemento de área ΔA_y , podemos definir outras três componentes de tensão representadas por τ_{yy} , τ_{yx} e τ_{yz} . O mesmo raciocínio pode ser estendido para a direção espacial z . Embora tenhamos generalizado o conceito de tensão sobre uma partícula de fluido cúbica, esta pode ter qualquer forma e pode ser formada por infinitos planos (faces). Entretanto, o estado de tensão em um ponto pode ser descrito completamente especificando as tensões que atuam em quaisquer três planos mutuamente perpendiculares as direções espaciais. No limite onde a partícula de fluido tem um volume infinitesimal, estas são as tensões que agem no ponto ocupado pela partícula. De forma geral, a tensão em um ponto é especificada por nove componentes, que podem ser agrupadas na forma de uma matriz 3×3 .

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz} \end{pmatrix} \quad (1.49)$$

1.5.2 Lei de Newton da Viscosidade

Uma das diferenças marcantes entre sólidos e fluidos tem a ver com os efeitos sofridos por ambos sob a ação de uma força aplicada. Os sólidos se deformam pouco sob a ação da força, e na maioria das vezes, voltam a forma original quando a força é cessada. Neste caso a força é conhecida como tensão e seu efeito deformação. Os fluidos por sua vez, se deformam de forma contínua sob a ação de uma força e não retornam a forma original quando esta cessa. Quando uma força é aplicada, os elementos de um fluido se movem. Camadas de fluido deslizam umas sobre as outras, sendo que a medida deste deslizamento tem uma relação de proporcionalidade com a distância. Esta relação de proporcionalidade é diferente entre líquidos e gases. Para fluidos em geral a força aplicada, a tensão, é proporcional a deformação ou mais precisamente, a taxa de deformação. O valor desta quantidade é simplesmente a diferença de velocidade entre camadas adjacentes de fluido. Se duas camadas adjacentes se movem com velocidades diferentes, definimos uma taxa de deformação entre as camadas. Por outro lado, se as velocidades forem as mesmas não existe deformação entre as camadas. A medida que o fluido acelera, de acordo com a Lei de Newton, a taxa de deformação aumenta e conseqüentemente, as forças internas de tensão aumentam. O fluido pode eventualmente chegar a um equilíbrio onde a taxa de força de tensão equilibra a força aplicada.

A viscosidade é uma medida empírica das forças internas de tensão que se opõem a deformação do fluido. As forças internas são forças intermoleculares. Essas forças dependem da distância de separação entre as moléculas. Elas terão valor significativo quando as moléculas simplesmente se aproximam.

Líquidos que fluem muito lentamente, como glicerina ou mel, têm alta viscosidade. Aqueles como éter ou gasolina, que fluem muito prontamente, têm baixa viscosidade. A viscosidade tem origem nas forças intermoleculares de atração e especialmente pela forma das moléculas do líquido. Líquidos cujas moléculas são polares ou podem formar ligações com átomos de hidrogênio são geralmente mais viscosos do que substâncias apolares semelhantes.

Líquidos contendo moléculas longas são geralmente muito viscosos, porque as cadeias moleculares se ligam para formar emaranhados como espaguete de moléculas, e para que o líquido flua as moléculas devem primeiro se desemaranhar. Óleos, graxas, lubrificante e compostos similares de cadeias longa são bastante viscosas por esse motivo. O glicerol, é viscoso em parte devido ao comprimento da cadeia, mas também devido às amplas possibilidades de ligações de hidrogênio entre as moléculas.

A viscosidade de um líquido sempre diminui com o aumento da temperatura. À medida que as moléculas adquirem mais energia cinética, elas podem escapar a atração mútua mais facilmente. Moléculas de cadeia longa também podem se desemaranhar mais facilmente a altas temperaturas.

A viscosidade nos gases independe da pressão ou densidade. A viscosidade de um gás diluído aumenta à medida que a temperatura aumenta, ao contrário dos líquidos. A taxa de aumento varia aproximadamente como T^s , onde s está entre 1/2 e 1, e depende do gás em particular. Ela surge de moléculas que atravessam camadas de fluxo e transferem momento entre as essas camadas. Essa transferência de momentum pode ser pensada como uma força de resistência interna entre camadas do fluxo. Como a transferência de momentum é causada pelas colisões entre as moléculas do gás, e o aumento da agitação térmica das moléculas resulta em um aumento destas colisões, a viscosidade aumenta. Assim, a viscosidade dos gases aumenta com a temperatura.

A atmosfera é composta de uma mistura de gases chamada de ar e nossas leis devem ser endereçadas a este caso. Do ponto de vista macroscópico, uma força, a tensão de deformação pode ser definida como:

$$\tau = \mu \nabla \vec{u}, \quad (1.50)$$

onde $\nabla \vec{u}$ é o gradiente de velocidade. De forma a ilustrarmos este conceito, considere o experimento simples a seguir. Uma camada de fluido incompressível é confinada entre planos horizontais separados por uma distância l conforme a figura abaixo.

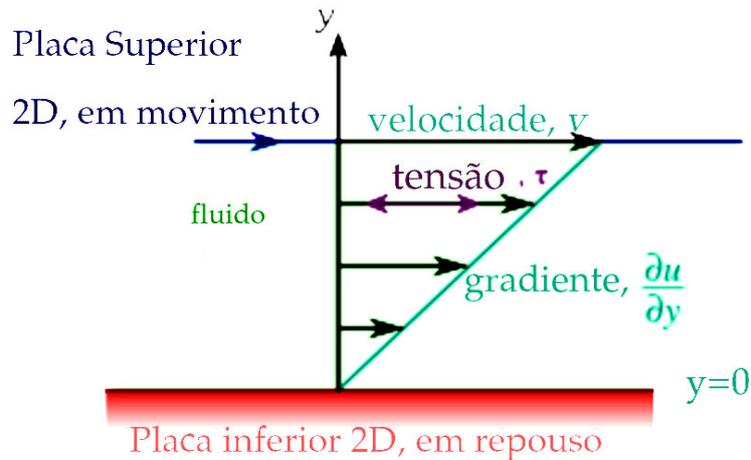


Figura 1.8: Fluxo de Couette ilustrando o conceito de viscosidade.

O plano $y = 0$ (y_0) está em repouso, enquanto o plano $y = y$ se encontra em movimento com velocidade u . O plano y tende a arrastar a camada de fluido por meio de uma força aplicada sobre a mesma. Por outro lado, o plano $y = 0$ tende a retardar o movimento do plano y por meio de uma força de mesmo módulo mas de sentido contrário. Esta é a mesma força que deve ser aplicada ao plano y para que este se movimente com velocidade constante. O experimento indica que esta força tangencial (de viscosidade) por unidade de área é:

$$\frac{F}{A} = \mu \left(\frac{u}{y} \right), \quad (1.51)$$

onde μ é o coeficiente de viscosidade dinâmico dado em unidades de $Kg/m \cdot s = N \cdot m \cdot s/kg = J \cdot s/kg$. Generalizando, escreveremos para um volume infinitesimal de fluido,

$$\frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A} = \mu \left(\frac{\Delta \vec{u}}{\Delta y} \right), \quad (1.52)$$

No limite onde $\Delta A \rightarrow 0$, a razão $\Delta \vec{F}/A$ é definida como tensão de deformação (ou corte) τ .

$$\lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A} = \tau = \mu \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{u}}{\Delta y} = \mu \frac{\partial \vec{u}}{\partial y}. \quad (1.53)$$

$$\tau = \mu \frac{\partial \vec{u}}{\partial y}. \quad (1.54)$$

A equação anterior foi a confirmação do postulado de Newton que acreditava que a tensão tangencial entre duas camadas era proporcional ao gradiente de velocidade na direção perpendicular as camadas. Portanto, a equação 1.51 é conhecida como lei de Newton da viscosidade e os fluidos que a obedecem são chamados de Newtonianos. O ar, a água e outros fluidos simples são Newtonianos. O coeficiente de viscosidade dinâmico é constante para um determinado fluido mas dependente da temperatura.

1.6 Lista de Questões e Problemas

Importante:

(1) Conversão de unidade de massa atômica em gramas(g)

Uma(1) unidade de massa atômica (*uma*) é definida como sendo 1/12 avos da massa de 1 átomo de carbono 12. O número de Avogadro é igual ao número total de entidades em 12 g de ^{12}C = 6.02×10^{23} átomos de ^{12}C . Um(1) mol de ^{12}C pesa 12 g. Portanto, 6.02×10^{23} átomos de ^{12}C tem massa de 12g, o que implica que 1 átomo de ^{12}C tem massa de,

$$m_{^{12}\text{C}} = \frac{1 \text{at}^{12}\text{C} \times 12\text{g}}{6.02 \times 10^{23} \text{at}^{12}\text{C}} = 1.99 \times 10^{-23} \text{g}$$

Por fim, uma unidade de massa atômica (1uma) é:

$$1\text{uma} = \frac{1}{12} \times m_{^{12}\text{C}} = 1.66 \times 10^{-24} \text{g}$$

(2) Da definição de número de mols,

$$n = \frac{N \text{ (Número de moléculas)}}{N_a \text{ (Número de Avogadro)}}$$

ou,

$$n = \frac{M_s \text{ (Massa da amostra em gramas)}}{M \text{ (Massa Molar em gramas/mol)}} = \frac{M_s \text{ (Massa da amostra em gramas)}}{m N_a}$$

A massa molar é também conhecida como "massa molecular ou peso molecular e sua unidade é *g/mol*.

(3) Massa de uma molécula em gramas

$$m(\text{Massa de uma molécula em } g) = \frac{\text{Massa Molar em } g/mol}{N_a}$$

1. Um gás a 20° pode ser considerado rarefeito, desviando-se do conceito de meio contínuo, quando contém menos de 1×10^{12} moléculas por milímetro cúbico. Se o número de Avogadro é 6.023×10^{23} moléculas por mol, que pressão absoluta (em Pa) para o ar isso representa?

Solução

O ar seco é composto de 78,09 % de nitrogênio, 20,95 % de oxigênio, 0,93 % de argônio, 0,04 % de dióxido de carbono e outros gases em quantidades escassas. O vapor de água também é um constituinte do ar em quantidades variáveis, juntamente com as partículas de poeira. Considerando apenas os gases, a massa molar da mistura é dada por:

$$M_{mis} = \sum_{i=1}^k Y_i M_i$$

Na equação anterior, Y_i é a fração molar de cada gás, M_i é a massa molar de cada gás. Para 1 mol de ar na atmosfera, as frações molares e massas molares de cada gás são:

Gás	Y_i	M_i
N_2	0.7809	28g/mol
O_2	0.2095	32g/mol
Ar	0.0004	39.95g/mol

Tabela 1.1:

A massa molar de ar seco é:

$$M_{mis} = 0.7895 \times 28\text{g/mol} + 0.2095 \times 32\text{g/mol} + 0.0004 \times 39.95\text{g/mol} = 28.95\text{g/mol}$$

Agora, a massa de uma molécula de ar pode ser calculada.

$$m = \frac{M_{mis}}{N_a} = \frac{28.95\text{g/mol}}{6.02 \times 10^{23}\text{moléculas/mol}} = 4.81 \times 10^{-23}\text{g}$$

A densidade do ar contendo 1×10^{12} moléculas por mm^3 é no SI,

$$\rho = \left[1 \times 10^{12} \frac{\text{molécula}}{mm^3} \right] \left[4.81 \times 10^{-23} \frac{g}{\text{molécula}} \right]$$

$$\rho = 4.81 \times 10^{-11} \frac{g}{mm^3} = 4.81 \times 10^{-5} \frac{kg}{m^3}$$

Para aplicarmos valores na equação do gás ideal, precisamos calcular a constantes dos gases para a mistura de gases.

$$R_m = \frac{R}{M_m} = \frac{\left(8.31 \frac{J}{molK} \right)}{28.95 \frac{g}{mol}} = \frac{8.31 \times 1000 \frac{gm^2}{molKs^2}}{28.95 \frac{g}{mol}} = 287 \frac{m^2}{Ks^2}$$

Finalmente, obtemos:

$$P = \rho R_m T = (4.81 \times 10^{-5} \frac{kg}{m^3}) (287 \frac{m^2}{Ks^2}) (293K) = 4Pa$$

2. A tabela 3 da seção 1.7, lista a massa específica da atmosfera padrão como função da altitude. Utilize esses valores para estimar grosseiramente — digamos, dentro de um fator 2 — o número de moléculas de ar em toda a atmosfera da terra.

Solução

A atmosfera da terra pode ser modelada como uma camada uniforme de ar com espessura de 20 Km e densidade média de 0.51 Kg/m^3 . Considere que o raio da terra é 6377 Km. A massa total de ar contida nesta camada pode ser estimada por:

$$m_t = \int dm = \int \rho dV = \int \rho_{\text{médio}} dv = \rho_{\text{médio}} V_{\text{camada}}$$

O volume da camada de ar será:

$$V_{\text{camada}} = \text{Área de superfície do planeta} \times \text{Espessura da camada de ar}$$

$$V_{\text{camada}} = 4\pi R_{\text{terra}}^2 \times 20000m$$

$$V_{\text{camada}} = 4\pi(6377 \times 1000m)^2 \times 20000m = 1.022 \times 10^{19} m^3$$

Agora, podemos calcular a massa de ar contida nesta camada multiplicando o volume obtido pela densidade:

$$m = 0.51 \frac{Kg}{m^3} \times 1.022 \times 10^{19} m^3 = 5.2 \times 10^{18} Kg$$

Dividindo agora a massa da atmosfera calculada pela massa de uma molécula de ar calculado no exercício 1, chegamos a uma estimativa para o número de moléculas na atmosfera.

$$N_{molculas} = \frac{m(\text{atmosfera})}{m(\text{molécula de ar})} = \frac{5.2 \times 10^{18} Kg}{4.8 \times 10^{-23} \frac{g}{molcula}} = 1.3 \times 10^{44} \text{moléculas}$$

3. Novamente, usado a tabela 3 da seção 1.7, calcule o livre caminho médio na atmosfera em elevações de 30000 m, 50000 m e 80000 m.

Solução

O livre caminho médio de uma molécula na atmosfera é dado por:

$$\lambda = 0.255 \frac{m}{\rho d^2} = \frac{8.94 \times 10^{-8} \frac{Kg}{m^2}}{\rho},$$

sendo que a densidade para altitudes de 30000m igual a 0.0184 kg/m³.

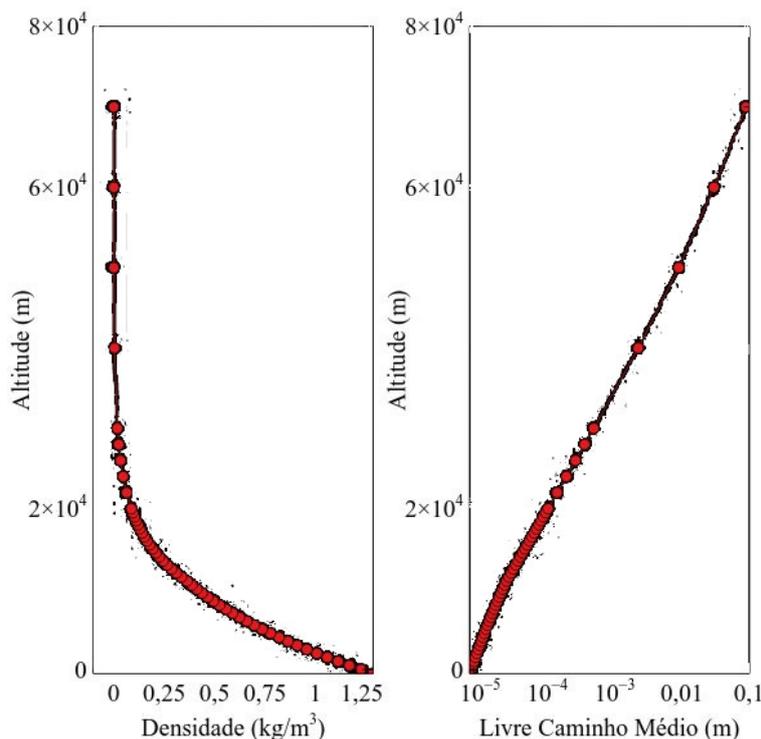
$$\lambda = 4.85 \times 10^{-6} m,$$

sendo que a densidade para altitudes de 50000m igual a 0.0010 kg/m³.

$$\lambda = 8.94 \times 10^{-5} m$$

sendo que a densidade para altitudes de 80000m igual 0.0010 a kg/m³.

$$\lambda = 8.94 \times 10^{-4} m$$



4. Se a pressão ao nível do mar for 1.01350×10^5 Pa, calcule a pressão padrão a uma altitude de 5.000 m, usando (a) a fórmula exata (eq.1.35) e (b) uma suposição isotérmica de uma temperatura padrão ao nível do mar de 15°C . A aproximação isotérmica é adequada?

Solução

(a) Considere a equação 1.34.

$$p = p_{atm} \left(\frac{T_0 - \alpha z}{T_0} \right)^{\left(\frac{g}{\alpha R} \right)}$$

O coeficiente $\frac{g}{\alpha R}$ é adimensional. Considerando $R = 287 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2\text{K}}$, o coeficiente em questão vale 5.26. Assim,

$$p = p_{atm} \left(1 - \frac{\alpha z}{T_0} \right)^{5.26}$$

$$p = 101350 Pa \left[1 - \frac{(0.0065 K/m) 5000 m}{288.16 K} \right]^{5.26}$$

$$p = (101350 Pa)(0.5328) = 54000 Pa$$

(b) Se a atmosfera fosse isotérmica a 288.16 K, usaríamos a equação 1.37.

$$p = p_s e^{\frac{g}{RT}(z_s - z)} \quad (1.55)$$

$$p = (101350 Pa) e^{\left[\frac{9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{(287 \text{m}^2/(\text{s}^2\text{K}))(288.16\text{K})} \right] (0\text{m} - 5000\text{m})} \quad (1.56)$$

$$p = (101350 Pa) e^{-0.5929} \approx 56000 Pa \quad (1.57)$$

Esse resultado é 4% maior que o resultado obtido em (a). A aproximação isotérmica é então imprecisa.

5. O Newfound Lake, um lago de água doce perto de Bristol, New Hampshire, tem uma profundidade máxima de 60 m, e a pressão atmosférica média é de 91 kPa. Calcule a pressão absoluta em kPa nessa profundidade máxima. (considere $\gamma_{gua} = 9.790 \text{ N/m}^3$)

Solução

$$P = P_{atm} - \gamma z = 91000 Pa - (9.709 \text{ N/m}^3)(-60)m = 678400 Pa \approx 678 kPa$$

6. Vênus tem uma massa de 4.90×10^{24} kg e um raio de 6050 km. A atmosfera em Vênus é 96 % CO_2 , mas vamos considerar que seja 100 %. A temperatura média na sua superfície é de 730 K, diminuindo para 250 K a uma altitude de 70 km. A pressão média na superfície é de 9,1 MPa. Calcule a pressão atmosférica de Vênus a uma altitude de 5 km.

Solução

O valor da aceleração gravitacional em Vênus é de 8.9 m/s^2 . O valor da constante dos gases R para o dióxido de carbono pode ser obtido da tabela 4 da seção 1.7, sendo este de $R_{\text{CO}_2} \approx 189 \text{ m}^2/(\text{s}^2\text{K})$. A taxa de variação da temperatura para Venus pode ser estimada a partir das informações dadas:

$$\alpha_{Venus} \approx \frac{\Delta T}{\Delta z} = \frac{730 K - 250 K}{70000 m} \approx 0.00686 K/m$$

O expoente $g/\alpha R$ no caso específico fica:

$$\frac{g}{\alpha R} = \frac{8.93}{189 \times 0.00686} = 6.89$$

Neste ponto podemos usar a equação 1.34 para estimar a pressão em $z = 5km$ na atmosfera de Vênus.

$$p = 9.1MPa \left[1 - \frac{0.00686K/m(5000m)}{730K} \right]^{6.89} \approx 6.5MPa$$

7. Uma atmosfera politrópica² é definida pela lei de potência $(p/p_0) = (\rho/\rho_0)^m$, em que m é um expoente da ordem de 1,3 e p_0 e r_0 são valores da pressão e massa específica ao nível do mar. (a) Integre essa expressão na atmosfera estática e encontre uma distribuição $p(z)$. (b) Considerando um gás ideal, $p = \rho RT$, mostre que o seu resultado em (a) implica uma distribuição linear de temperatura, como na Equação 1.25. (c) Mostre que o valor padrão $\alpha = 0,0065 K/m$ é equivalente a $m = 1.235$.

Solução

(a) Partimos da eq. 120.

$$dp = -\gamma dz = -\rho g dz$$

A aproximação de atmosfera politrópica implica,

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^m$$

$$p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^m$$

Substituindo na equação 1.19 e integrando:

$$dp = -\rho_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{m}}$$

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p^{\frac{1}{m}}} = - \left(\frac{\rho_0 g}{p_0^{\frac{1}{m}}} \right) \int_0^z dz$$

$$\int_{p_0}^p p^{-\frac{1}{m}} dp = - \left(\frac{\rho_0 g}{p_0^{\frac{1}{m}}} z \right)$$

$$\left[\frac{p^{-\frac{1}{m}+1}}{-\frac{1}{m}} \right]_{p_0}^p = - \left(\frac{\rho_0 g}{p_0^{\frac{1}{m}}} z \right)$$

$$\frac{p^{\frac{m-1}{m}}}{\frac{m-1}{m}} - \frac{p_0^{\frac{m-1}{m}}}{\frac{m-1}{m}} = - \left(\frac{\rho_0 g}{p_0^{\frac{1}{m}}} z \right)$$

$$p^{\frac{m-1}{m}} - p_0^{\frac{m-1}{m}} = \left[\frac{m-1}{m} \right] \left(- \frac{\rho_0 g}{p_0^{\frac{1}{m}}} z \right)$$

$$p^{\frac{m-1}{m}} = p_0^{\frac{m-1}{m}} - \left[\frac{m-1}{m} \right] \left(- \frac{\rho_0 g}{p_0^{\frac{1}{m}}} z \right)$$

Colocando $p_0^{\frac{m-1}{m}}$ em evidência nos termos a direita da igualdade na equação anterior,

²É uma atmosfera idealizada na qual a temperatura varia linearmente com a altitude com um gradiente vertical constante diferente de zero.

$$p^{\frac{m-1}{m}} = p_0^{\frac{m-1}{m}} \left(1 - \left[\frac{m-1}{m} \right] \frac{\rho_0 g}{p_0} z \right)$$

Elevando ambos os lados da equação anterior ao termo $\frac{m}{m-1}$,

$$p = p_0 \left(1 - \left[\frac{m-1}{m} \right] \frac{\rho_0 g}{p_0} z \right)^{\frac{m}{m-1}}$$

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 - \left[\frac{m-1}{m} \right] \frac{\rho_0 g}{p_0} z \right)^{\frac{m}{m-1}}$$

(b) Considerando a equação do gás ideal,

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^m = \left(\frac{p}{RT} \frac{RT_0}{p_0} \right)^m$$

Resolvendo para T/T_0 ,

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{pT_0}{Tp_0} \right)^m$$

$$\left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{m}} = \left(\frac{pT_0}{Tp_0} \right)$$

$$\left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{m}} \frac{p_0}{p} = \left(\frac{T_0}{T} \right)$$

$$\left(\frac{p^{\frac{1}{m}} p^{-1}}{p_0^{\frac{1}{m}} p_0^{-1}} \right) = \frac{T_0}{T}$$

$$\left(\frac{p^{\frac{1-m}{m}}}{p_0^{\frac{1-m}{m}}} \right) = \frac{T_0}{T}$$

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0} \right)^{-\frac{1-m}{m}} = \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{m-1}{m}}$$

Usando a resposta do item (a) para p/p_0 ,

$$\frac{T}{T_0} = \left[\left(1 - \left[\frac{m-1}{m} \right] \frac{\rho_0 g}{p_0} z \right)^{\frac{m}{m-1}} \right]^{\frac{m-1}{m}}$$

$$\frac{T}{T_0} = \left(1 - \left[\frac{m-1}{m} \right] \frac{gz}{RT_0} \right)$$

(c) Comparando a resposta do item (b) com a equação 1.25,

$$T = \left(T_0 - \left[\frac{m-1}{m} \right] \frac{gz}{R} \right)$$

$$T = T_0 - \alpha z$$

podemos escrever α como:

$$\alpha = \left[\frac{m-1}{m} \right] \frac{g}{R}$$

$$\frac{R\alpha}{g} = \frac{m-1}{m}$$

$$m - m\frac{R\alpha}{g} = 1$$

$$m\left(1 - \frac{R\alpha}{g}\right) = 1$$

$$m = \frac{1}{\left(1 - \frac{R\alpha}{g}\right)}$$

$$m = \frac{1}{\frac{g-R\alpha}{g}}$$

$$m = \frac{g}{g-R\alpha}$$

$$m = \frac{9.8m/s^2}{9.8m/s^2 - (0.0065K/m287m^2/Ks^2)} = 1.235$$

8. Sob algumas condições a atmosfera é adiabática, $\rho \approx C\rho^k$, em que k é a razão entre calores específicos. Mostre que, para uma atmosfera adiabática, a variação de pressão é dada por

$$p = p_0 \left[1 - \frac{(k-1)gz}{kRT_0} \right]^{\frac{k}{k-1}}$$

Compare essa fórmula para o ar em $z = 5.000m$ com a atmosfera padrão da tabela 3, seção 1.7. Considere $k=1.40$.

Solução

Inserindo a condição adiabática na equação hidrostática,

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$

$$\frac{d(C\rho)^k}{dz} = kC\rho^{k-1}\frac{d\rho}{dz} = -\rho g$$

$$\frac{d(\rho)}{dz} C \frac{\rho^{k-1}}{\rho} = \frac{-g}{k}$$

$$d\rho C \rho^{k-2} = -\frac{g}{k} dz$$

$$\int d\rho C \rho^{k-2} = -\int \frac{g}{k} dz$$

$$C \frac{\rho^{k-1}}{k-1} = -\frac{gz}{k} + \text{constante}$$

Fazendo $z = 0$ na equação anterior, determinamos a constante como:

$$\text{constante} = C \frac{\rho_0^{k-1}}{k-1}$$

$$C \frac{\rho^{k-1}}{k-1} = -\frac{gz}{k} + C \frac{\rho_0^{k-1}}{k-1}$$

$$C \frac{\rho^{k-1}}{k-1} - C \frac{\rho_0^{k-1}}{k-1} = -\frac{gz}{k}$$

Dividindo ambos os lados da equação anterior pela "constante",

$$\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{k-1} - 1 = -\frac{\frac{gz}{k}}{C \frac{\rho_0^{k-1}}{k-1}}$$

$$\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{k-1} = 1 - \frac{(k-1)}{k} \frac{gz}{C \rho_0^{k-1}}$$

Neste ponto considere que,

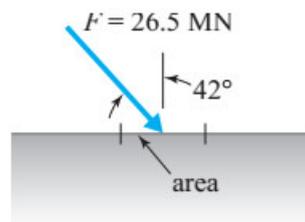
$$C \rho_0^{k-1} = C \rho_0^k \rho_0^{-1} = C \frac{\rho_0^k}{\rho_0} = \frac{p_0}{\rho_0} = RT_0$$

T_0 é a temperatura na superfície. Assim,

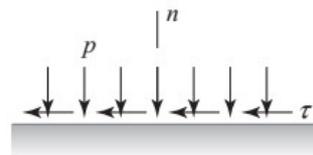
$$1 - \frac{(k-1)}{k} \frac{gz}{C \rho_0^{k-1}} = 1 - \frac{(k-1)}{k} \frac{gz}{RT_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}$$

$$\left(\frac{p}{p_0}\right) = \left(1 - \frac{(k-1)}{k} \frac{gz}{RT_0}\right)^{\frac{k}{k-1}}$$

9. Uma força aplicada de 26.5 MN é distribuída uniformemente sobre 152 cm² de área; entretanto, ela age em um ângulo de 42° com respeito ao vetor normal. Se ela produz uma tensão de compressão, calcule a pressão resultante.

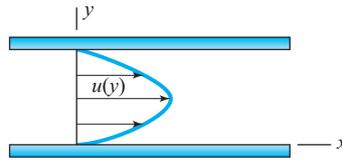


10. A força em uma área de 0.2 cm² é devida a uma pressão de 120 kPa e uma tensão de deformação de 20 Pa, como ilustrado na figura abaixo. Calcule a magnitude da força atuando na área e o ângulo da força com respeito a coordenada normal.



11. Considere um fluxo de fluido entre duas placas paralelas fixas separadas por 5 cm, como mostra a figura abaixo. A distribuição de velocidade para o fluxo é dada por $v(y) = 120(0,05y - y^2)$ m/s onde y está em metros. O fluido é água a 10 ° C. Calcule a magnitude da tensão de

deformação atuando em cada uma das placas. O coeficiente de viscosidade dinâmica para água a 10°C é $\mu = 1.308 \times 10^{-3}\text{Ns/m}^2$.



Solução

A tensão de deformação é obtida a partir da equação 1.51.

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy}$$

$$\frac{dv}{dy} = \frac{d(120(0,05y - y^2))}{dy} = 120(0,05 - 2y)$$

Assim, na placa inferior $y=0$ e:

$$\left| \frac{dv}{dy} \right| = |120(0,05 - 0)| = 6\text{s}^{-1}, \quad \tau = 1.308 \times 10^{-3} \times 6\text{s}^{-1} = 7.848 \times 10^{-3}\text{N/m}^2$$

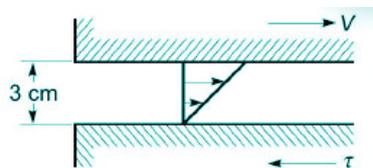
Na placa superior, $y=0,05\text{m}$ e:

$$\left| \frac{dv}{dy} \right| = |120(0,05 - (2 \times 0,05))| = 6\text{s}^{-1}, \quad \tau = 1.308 \times 10^{-3} \times 6\text{s}^{-1} = 7.848 \times 10^{-3}\text{N/m}^2$$

12. Uma distribuição de velocidade em um tubo com diâmetro de 2 polegadas é medida como $u(r) = 30(1 - r^2/(r_0)^2)$ ft/s, onde r_0 é o raio do tubo. Calcular a tensão de corte na parede do tubo se água a 75°F está fluindo.

13. A distribuição de velocidade em um tubo de 1,0 cm de diâmetro é dado por $u(r) = 16(1 - r^2/(r_0)^2)$ m/s, onde r_0 é o raio do tubo. Calcule a tensão de cisalhamento na linha central, $r=0,25$ cm, e na parede se água a 20°C está fluindo.

14. O espaço entre duas placas paralelas distantes 3 mm uma da outra é preenchido com um óleo de viscosidade dinâmica $0,2\text{Pa}\cdot\text{s}$. Qual é a tensão de tangencial na placa inferior fixa, se a superior for movida com uma velocidade de 1.50m/s ?



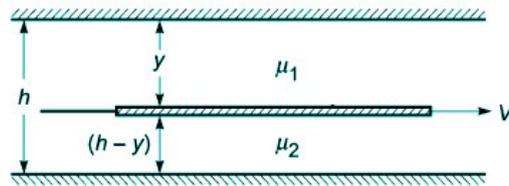
15. A distribuição de velocidade perto da parede sólida em uma seção em um fluxo laminar é dada por,

$$u = 5 \text{sen}(5\pi y)$$

para $y \leq 0,10\text{m}$. Calcular a tensão tangencial em uma seção em (a) $y = 0$, (b) $y = 0,05\text{m}$ e (c) $y = 0,10\text{m}$. A viscosidade dinâmica do fluido é $0.5\text{Pa}\cdot\text{s}$.

16. Uma placa fina é colocada entre duas superfícies planas distantes uma da outra de h cm's, de modo que a viscosidade dos líquidos na região acima e abaixo da placa são μ_1 e

μ_2 respectivamente. Determine a posição da fina placa de modo que a resistência viscosa ao movimento uniforme seja mínimo. (Suponha que h é muito pequeno).



1.7 Tabelas de Dados

Tabela 1: Viscosidade e densidade da água a $1atm$.

$T, ^\circ C$	$\rho, kg/m^3$	$\mu, N \cdot s/m^2$	$\nu, m^2/s$	$T, ^\circ F$	$\rho, slug/ft^3$	$\mu, lb \cdot s/ft^2$	$\nu, ft^2/s$
0	1.000	1,788 E-3	1,788 E-6	32	1,940	3,73 E-5	1,925 E-5
10	1.000	1,307 E-3	1,307 E-6	50	1,940	2,73 E-5	1,407 E-5
20	998	1,003 E-3	1,005 E-6	68	1,937	2,09 E-5	1,082 E-5
30	996	0,799 E-3	0,802 E-6	86	1,932	1,67 E-5	0,864 E-5
40	992	0,657 E-3	0,662 E-6	104	1,925	1,37 E-5	0,713 E-5
50	988	0,548 E-3	0,555 E-6	122	1,917	1,14 E-5	0,597 E-5
60	983	0,467 E-3	0,475 E-6	140	1,908	0,975 E-5	0,511 E-5
70	978	0,405 E-3	0,414 E-6	158	1,897	0,846 E-5	0,446 E-5
80	972	0,355 E-3	0,365 E-6	176	1,886	0,741 E-5	0,393 E-5
90	965	0,316 E-3	0,327 E-6	194	1,873	0,660 E-5	0,352 E-5
100	958	0,283 E-3	0,295 E-6	212	1,859	0,591 E-5	0,318 E-5

Tabela 2: Viscosidade e massa específica do ar a $1atm$.

$T, ^\circ C$	$\rho, kg/m^3$	$\mu, N \cdot s/m^2$	$\nu, m^2/s$	$T, ^\circ F$	$\rho, slug/ft^3$	$\mu, lb \cdot s/ft^2$	$\nu, ft^2/s$
-40	1,52	1,51 E-5	0,99 E-5	-40	2,94 E-3	3,16 E-7	1,07 E-4
0	1,29	1,71 E-5	1,33 E-5	32	2,51 E-3	3,58 E-7	1,43 E-4
20	1,20	1,80 E-5	1,50 E-5	68	2,34 E-3	3,76 E-7	1,61 E-4
50	1,09	1,95 E-5	1,79 E-5	122	2,12 E-3	4,08 E-7	1,93 E-4
100	0,946	2,17 E-5	2,30 E-5	212	1,84 E-3	4,54 E-7	2,47 E-4
150	0,835	2,38 E-5	2,85 E-5	302	1,62 E-3	4,97 E-7	3,07 E-4
200	0,746	2,57 E-5	3,45 E-5	392	1,45 E-3	5,37 E-7	3,71 E-4
250	0,675	2,75 E-5	4,08 E-5	482	1,31 E-3	5,75 E-7	4,39 E-4
300	0,616	2,93 E-5	4,75 E-5	572	1,20 E-3	6,11 E-7	5,12 E-4
400	0,525	3,25 E-5	6,20 E-5	752	1,02 E-3	6,79 E-7	6,67 E-4
500	0,457	3,55 E-5	7,77 E-5	932	0,89 E-3	7,41 E-7	8,37 E-4

Tabela 3: Propriedades da atmosfera padrão.

Propriedades da atmosfera padrão	$z, \text{ m}$	$T, \text{ K}$	$p, \text{ Pa}$	$\rho, \text{ kg/m}^3$	$a, \text{ m/s}$
	-500	291,41	107.508	1,2854	342,2
	0	288,16	101.350	1,2255	340,3
	500	284,91	95.480	1,1677	338,4
	1.000	281,66	89.889	1,1120	336,5
	1.500	278,41	84.565	1,0583	334,5
	2.000	275,16	79.500	1,0067	332,6
	2.500	271,91	74.684	0,9570	330,6
	3.000	268,66	70.107	0,9092	328,6
	3.500	265,41	65.759	0,8633	326,6
	4.000	262,16	61.633	0,8191	324,6
	4.500	258,91	57.718	0,7768	322,6
	5.000	255,66	54.008	0,7361	320,6
	5.500	252,41	50.493	0,6970	318,5
	6.000	249,16	47.166	0,6596	316,5
	6.500	245,91	44.018	0,6237	314,4
	7.000	242,66	41.043	0,5893	312,3
	7.500	239,41	38.233	0,5564	310,2
	8.000	236,16	35.581	0,5250	308,1
	8.500	232,91	33.080	0,4949	306,0
	9.000	229,66	30.723	0,4661	303,8
	9.500	226,41	28.504	0,4387	301,7
	10.000	223,16	26.416	0,4125	299,5
	10.500	219,91	24.455	0,3875	297,3
	11.000	216,66	22.612	0,3637	295,1
	11.500	216,66	20.897	0,3361	295,1
	12.000	216,66	19.312	0,3106	295,1
	12.500	216,66	17.847	0,2870	295,1
	13.000	216,66	16.494	0,2652	295,1
	13.500	216,66	15.243	0,2451	295,1
	14.000	216,66	14.087	0,2265	295,1
	14.500	216,66	13.018	0,2094	295,1
	15.000	216,66	12.031	0,1935	295,1
	15.500	216,66	11.118	0,1788	295,1
	16.000	216,66	10.275	0,1652	295,1
	16.500	216,66	9496	0,1527	295,1
	17.000	216,66	8775	0,1411	295,1
	17.500	216,66	8110	0,1304	295,1
	18.000	216,66	7495	0,1205	295,1
	18.500	216,66	6926	0,1114	295,1
	19.000	216,66	6401	0,1029	295,1
	19.500	216,66	5915	0,0951	295,1
	20.000	216,66	5467	0,0879	295,1
	22.000	218,6	4048	0,0645	296,4
	24.000	220,6	2972	0,0469	297,8
	26.000	222,5	2189	0,0343	299,1
	28.000	224,5	1616	0,0251	300,4
	30.000	226,5	1197	0,0184	301,7
	40.000	250,4	287	0,0040	317,2
	50.000	270,7	80	0,0010	329,9
	60.000	255,7	22	0,0003	320,6
	70.000	219,7	6	0,0001	297,2

Tabela 4: Propriedades dos gases comuns a 1atm e 20°C .

Gás	Peso		$\rho_g, \text{N/m}^3$	$\mu, \text{N} \cdot \text{s/m}^2$	Razão de calores específicos	expoente n^* da lei de potência
	Molecular	$R, \text{m}^2/(\text{s}^2 \cdot \text{K})$				
H ₂	2,016	4.124	0,822	9,05 E-6	1,41	0,68
He	4,003	2.077	1,63	1,97 E-5	1,66	0,67
H ₂ O	18,02	461	7,35	1,02 E-5	1,33	1,15
Ar	39,944	208	16,3	2,24 E-5	1,67	0,72
Ar seco	28,96	287	11,8	1,80 E-5	1,40	0,67
CO ₂	44,01	189	17,9	1,48 E-5	1,30	0,79
CO	28,01	297	11,4	1,82 E-5	1,40	0,71
N ₂	28,02	297	11,4	1,76 E-5	1,40	0,67
O ₂	32,00	260	13,1	2,00 E-5	1,40	0,69
NO	30,01	277	12,1	1,90 E-5	1,40	0,78
N ₂ O	44,02	189	17,9	1,45 E-5	1,31	0,89
Cl ₂	70,91	117	28,9	1,03 E-5	1,34	1,00
CH ₄	16,04	518	6,54	1,34 E-5	1,32	0,87

Capítulo 2

Fluidos em Movimento

2.1 Representação de Euler e Lagrange

Duas representações distintas podem ser usadas para tratarmos os problemas na Mecânica dos Fluidos. A primeira, a representação de Lagrange, considera o movimento individual das partículas, sendo que as variáveis físicas são dadas como uma função única do tempo. Em outras palavras, nesta representação estamos interessados em parciais individuais, e suas trajetórias ao longo do tempo. Nesta representação, a posição, velocidade e aceleração serão dadas por funções do tipo $\vec{s}(t)$, $\vec{u}(t)$ e $\vec{a}(t)$, sendo as quantidades derivadas calculadas a partir destas. O ponto (x_0, y_0, z_0) localiza a posição inicial de cada partícula de fluido.

A representação de Euler é uma alternativa a representação anterior onde todas as partículas de fluido são equivalentes, sendo que aqui não estamos interessados na dinâmica individual de cada partícula de fluido. As grandezas físicas são representadas em termos de campos, por meio de funções do tipo $f(x, y, z, t)$.¹ De outra forma, descrevemos as grandezas físicas e suas variações ao longo do campo, sendo que os valores destas grandezas referentes as partícula de fluido estão diretamente associados aos valores do campo. Sabendo que qualquer grandeza física pode variar no espaço de forma independente do tempo, as taxas de variações em um dado ponto não dependerão do valor da grandeza antes ou após a partícula de fluido ocupar o ponto do campo. Por exemplo, a aceleração será dada por meio de uma variação local no tempo adicionada a uma componente advectiva devido ao gradiente de velocidade.

Na representação de Euler, o campo de velocidade é definido como:

$$\vec{u} = \vec{u}(\vec{r}, t) = \vec{u}(x, y, z, t), \quad (2.1)$$

$$\vec{u} = u(x, y, z, t)\hat{i} + v(x, y, z, t)\hat{j} + w(x, y, z, t)\hat{k}. \quad (2.2)$$

Em geral, as componentes de um campo de velocidades são funções de x, y e z no tempo t . O ponto (x, y, z) então não define a posição de um partícula de fluido. Ao contrário, este é um ponto do campo assumido pela partícula de fluido ao longo de seu deslocamento através do mesmo campo.

2.2 Linha de corrente, Trajetória e Linha de Emissão

2.2.1 Linha de Corrente

As linhas de corrente são usadas para a visualização dos fluxos. Apresentam a propriedade de serem sempre tangentes ao vetor velocidade em cada ponto do campo. Isso implica que não

¹Esta é uma consequência direta da hipótese do contínuo em Mecânica dos Fluidos. Assim, cada propriedade de um fluido, tal como massa específica, temperatura, velocidade, etc., são consideradas funções contínuas da posição e do tempo. São definidas como campos escalares ou vetoriais.

pode haver fluxo de matéria através das mesmas. Matematicamente, essa condição é expressa como:

$$\vec{V} \times d\vec{r} = 0 \quad - \text{Equação das linhas de corrente.} \quad (2.3)$$

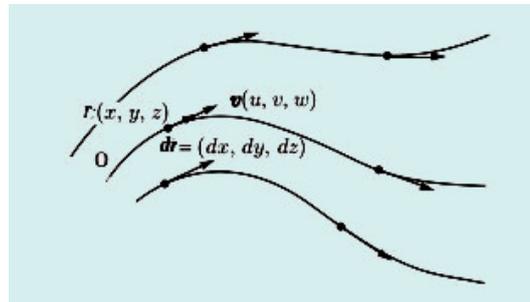


Figura 2.1: Linhas de corrente.

Resolvendo o produto vetorial,

$$\vec{u} \times d\vec{r} = (u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}) \times (dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}) = \quad (2.4)$$

$$(v\,dz - w\,dy)\hat{i} + (w\,dx - u\,dz)\hat{j} + (u\,dy - v\,dx)\hat{k} = 0, \quad (2.5)$$

$$\frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} = 0, \quad (2.6)$$

$$\frac{dx}{u} = \frac{dz}{w} = 0, \quad (2.7)$$

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = 0. \quad (2.8)$$

Assim,

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} = 0. \quad (2.9)$$

Exemplo 3.1 - Dado o campo de velocidade $\vec{u} = x\hat{i} + y\hat{j}$, ache uma expressão para as linhas de corrente. Faça um esboço do campo.

$$\vec{u} = u\hat{i} + v\hat{j}$$

$$u = x, v = y$$

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y}$$

$$\ln(y) = \ln(x) + C'$$

$$\ln(y) - \ln(x) = C'$$

$$\ln \frac{y}{x} = C'$$

$$\frac{y}{x} = e^{C'}$$

$$y = x e^{C'}$$

$$y = xC$$

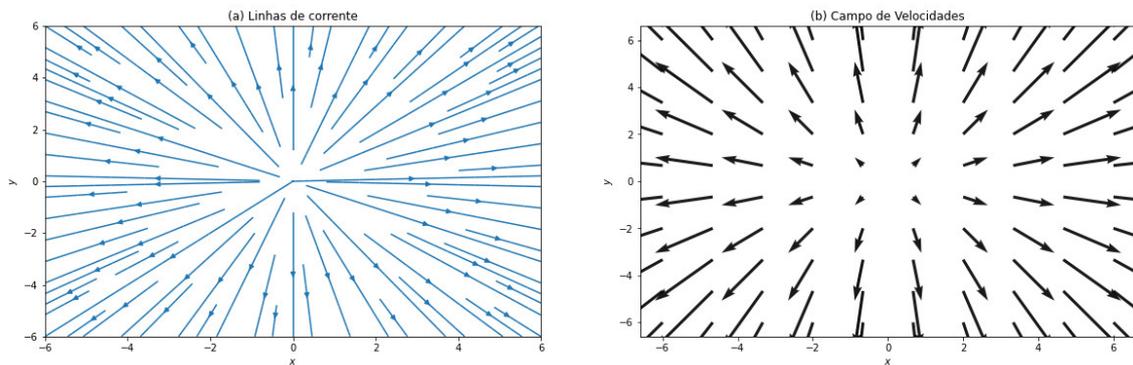


Figura 2.2: (a) Família de linhas de corrente $y = xC$. (b) Campo de velocidade $\vec{v} = x\hat{i} + y\hat{j}$.

Exemplo 3.2 - Dado o campo de velocidade $\vec{u} = x\hat{i} - y\hat{j}$, ache uma expressão para as linhas de corrente. Faça um esboço do campo.

$$\begin{aligned}\vec{u} &= u\hat{i} - v\hat{j} \\ u &= x, v = y \\ \frac{dx}{u} &= \frac{dy}{v} \\ \int \frac{dx}{x} &= - \int \frac{dy}{y} \\ \ln(x) &= -\ln(y) + C' \\ \ln(xy) &= C' \\ xy &= e^{C'} \\ y &= \frac{C}{x}\end{aligned}$$

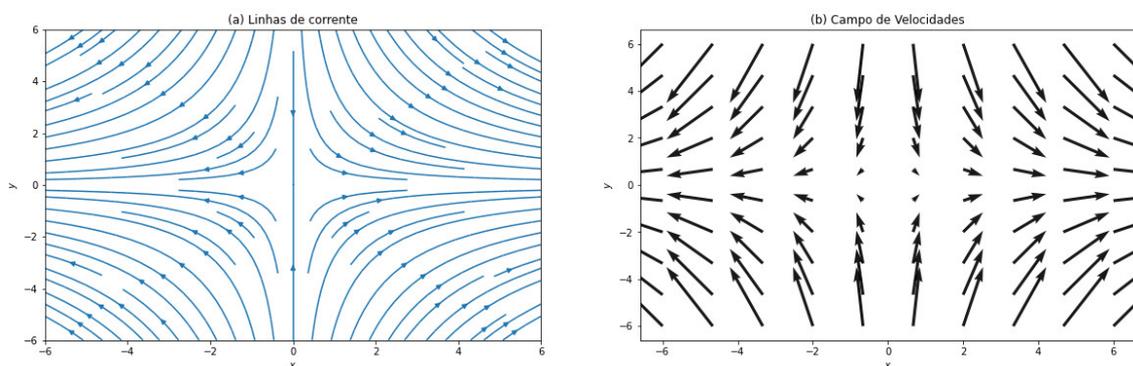
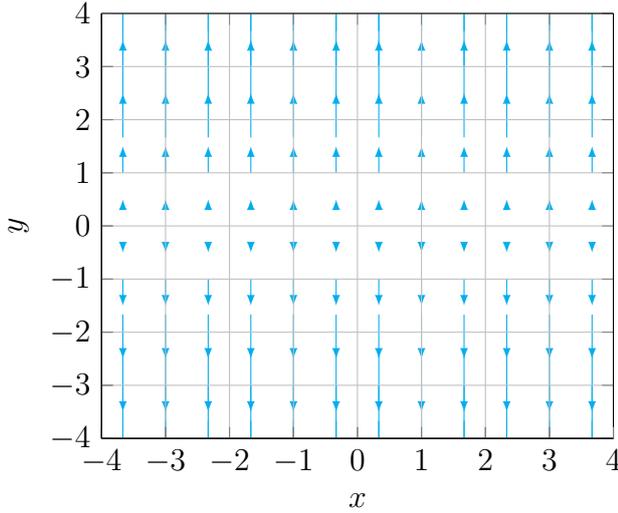
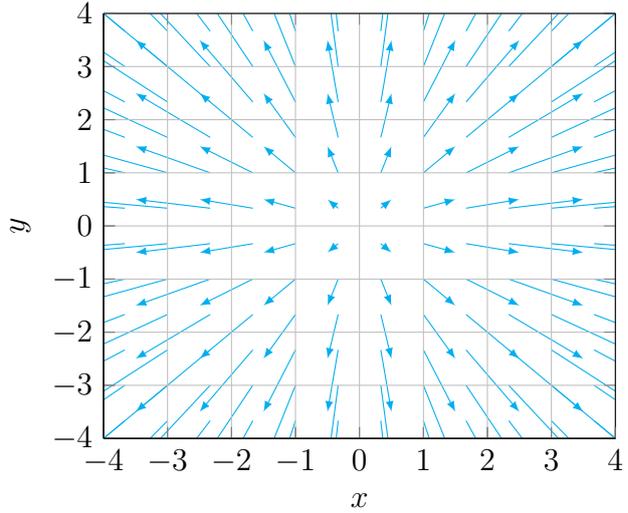
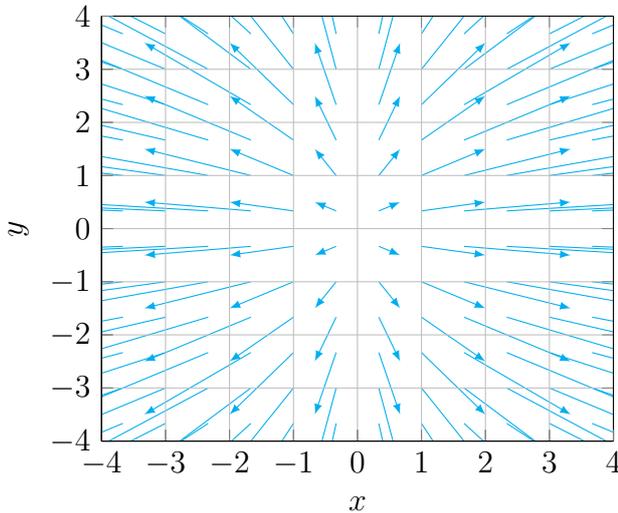
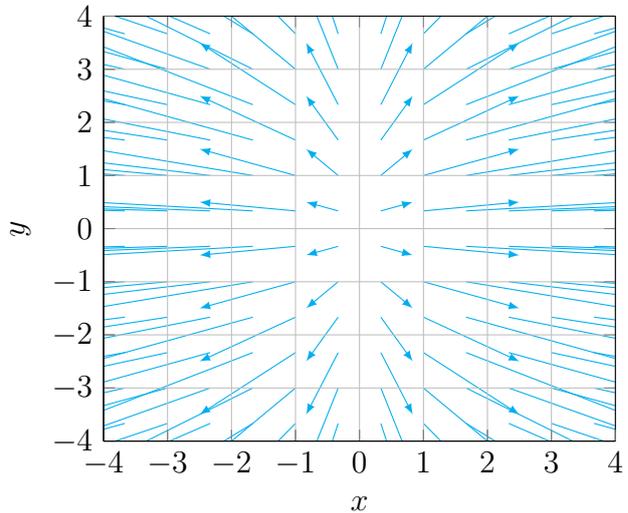


Figura 2.3: (a) Família de linhas de corrente $y = C/x$. (b) Campo de velocidade $\vec{v} = x\hat{i} - y\hat{j}$.

2.2.2 Linhas de corrente – dependência temporal

Para um fluxo instável, onde o campo de velocidade é dependente do tempo, as linhas de corrente mudarão a sua configuração com o tempo. O conjunto de figuras a seguir mostra a evolução das linhas de corrente com o tempo.

Campo de Velocidades $\vec{v} = xt\hat{i} + y\hat{j}$, $t = 0s$ Campo de Velocidades $\vec{v} = xt\hat{i} + y\hat{j}$, $t = 1s$ Campo de Velocidades $\vec{v} = xt\hat{i} + y\hat{j}$, $t = 2s$ Campo de Velocidades $\vec{v} = xt\hat{i} + y\hat{j}$, $t = 3s$ 

2.2.3 Trajetória

Iremos nesta seção adotar o ponto de vista da partícula de fluido. Em $t_0 = 0$, a posição da partícula de fluido é dada por $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Seguimos o movimento subsequente da partícula de fluido ao longo do campo de velocidade $\vec{u} = \vec{u}(\vec{r}, t) = (u, v, w)$. Escrevendo a posição da partícula de fluido ao longo do tempo durante o seu deslocamento através do campo de velocidades como $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, as equações do movimento da partícula de fluido serão:

$$\frac{dx}{dt} = u(x, y, z, t), \quad (2.10)$$

$$\frac{dy}{dt} = v(x, y, z, t), \quad (2.11)$$

$$\frac{dz}{dt} = w(x, y, z, t). \quad (2.12)$$

A solução para o conjunto de equações anteriores é $\vec{R}(\vec{r}, t) = (x(t), y(t), z(t))$, onde $x(t) =$

$x(x_0, y_0, z_0, t)$, $y(t) = y(x_0, y_0, z_0, t)$, $z(t) = z(x_0, y_0, z_0, t)$, com $\vec{R}(0) = \vec{r}_0$. $\vec{R}(t)$ é uma curva paramétrica que representa a trajetória da partícula de fluido.

Exemplo 3.3 - Para o campo de velocidades $\vec{u} = t\hat{i} + \hat{j}$, ache a expressão paramétrica da trajetória para (a) uma partícula que parte da origem, $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$ em $t_0 = 0s$, e (b) p partícula que parte da origem $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$ em $t = 2s$.

Equações paramétricas:

$$\begin{aligned}\vec{u} &= t\hat{i} + \hat{j} \\ \frac{dx}{dt} &= t, \frac{dy}{dt} = 1 \\ \int dx &= \int t dt \\ x &= \frac{t^2}{2} + C_x \\ \int dy &= \int dt \\ y &= t + C_y\end{aligned}$$

Neste ponto devemos lembrar que na representação de Lagrange seguimos uma partícula individual. Assim, as condições iniciais de cada partícula definem sua trajetória.

(a) Partícula que parte da origem ($x_0 = 0, y_0 = 0$) em $t_0 = 0s$:

$$\begin{aligned}x_0 &= \frac{t_0^2}{2} + C_x \\ 0 &= 0 + C_x, \quad C_x = 0 \\ y_0 &= t_0 + C_y, \quad C_y = 0\end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = \frac{t^2}{2} \\ y = t \end{cases}$$

$$y = \sqrt{2x}$$

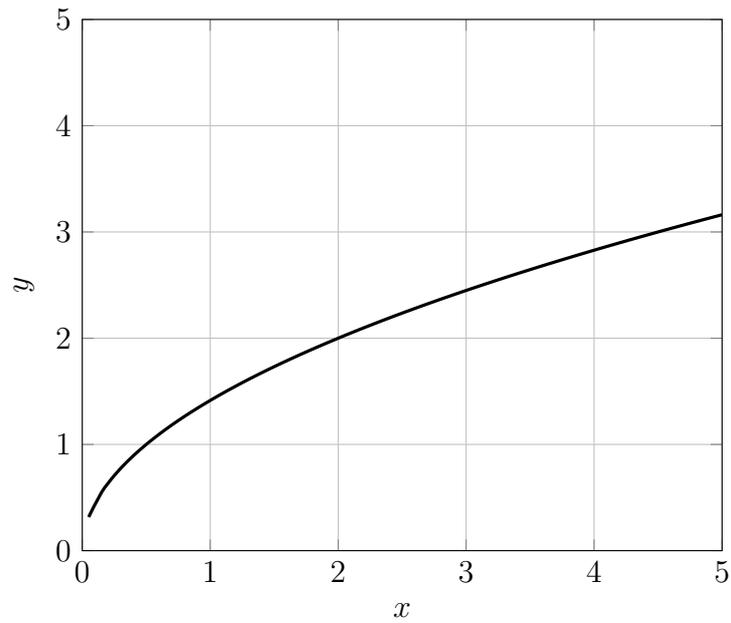


Figura 2.4: Equação da trajetória com condições iniciais $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ em $t_0 = 0$

(b) Partícula que parte da origem ($x_0 = 0, y_0 = 0$) em $t_0 = 3s$:

$$\begin{aligned}
 x(t = t_0) &= \frac{t_0^2}{2} + C_x \\
 0 &= \frac{2^2}{2} + C_x, \quad C_x = -2 \\
 y(t = t_0) &= t_0 + C_y \\
 0 &= 2 + c_y, \quad C_y = -2
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = \frac{t^2}{2} - \frac{9}{2} \\ y = t - 3 \end{cases}$$

$$y = \sqrt{2x + 9} - 3$$

A função $y(x)$ é a equação da trajetória.

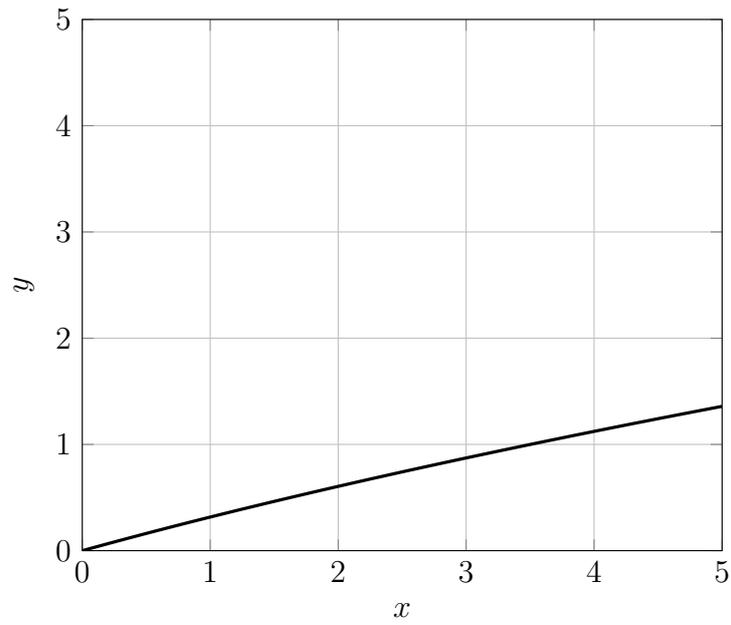
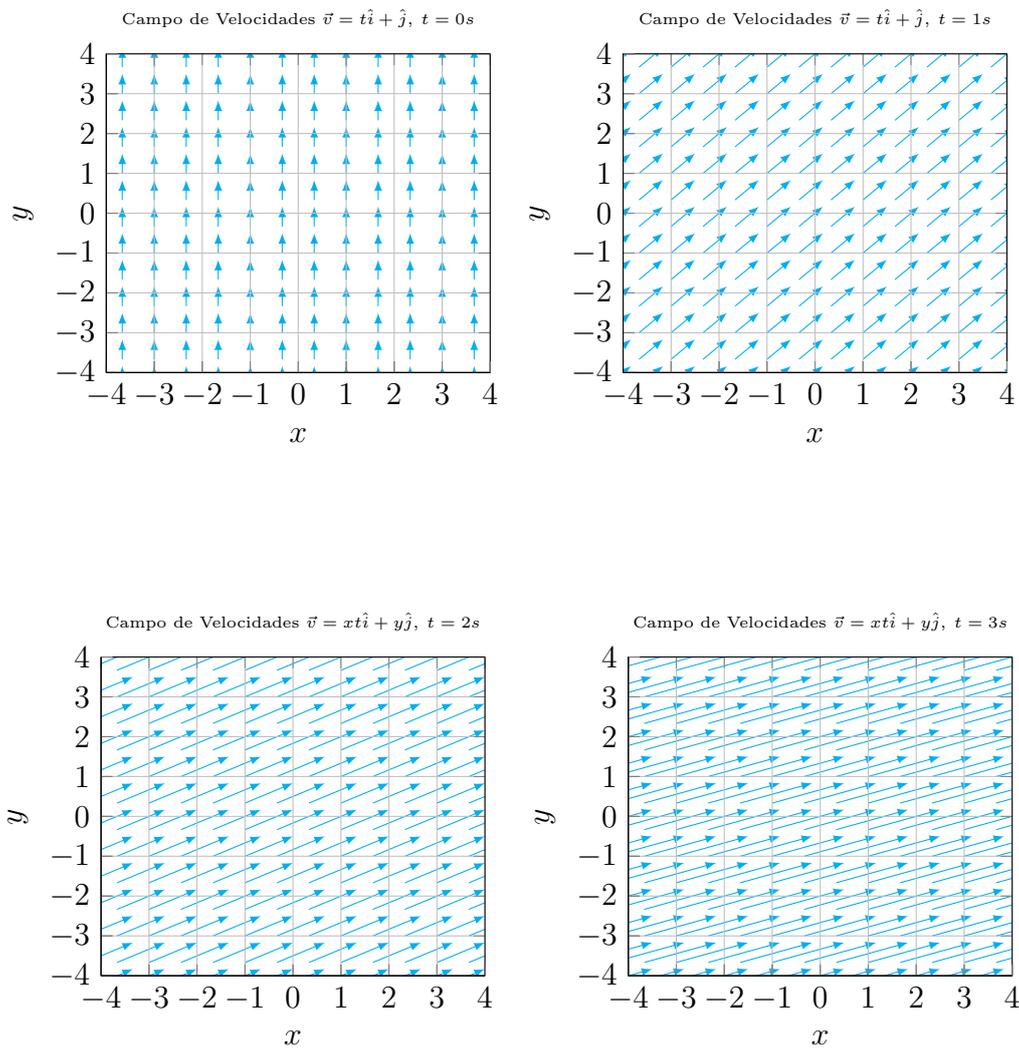
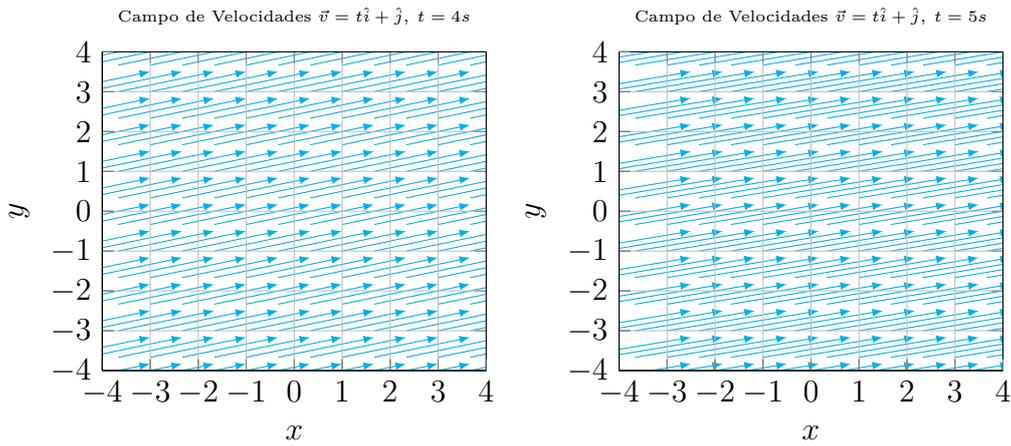


Figura 2.5: Equação da trajetória p/ $x_0 = 0$ em $t_0 = 3s$





2.2.4 Linhas de Emissão

Em muitos experimentos de visualização da dinâmica de um fluido é comum a introdução de marcadores para determinação do padrão de fluxo associado. A curva instantânea formada por todos os parciais que em tempos prévios passaram pelo ponto P (por exemplo onde o marcador esta sendo inserido no fluxo) é chamada de linha de emissão. Se o fluxo for estacionário, as linhas de emissão e de corrente coincidem.

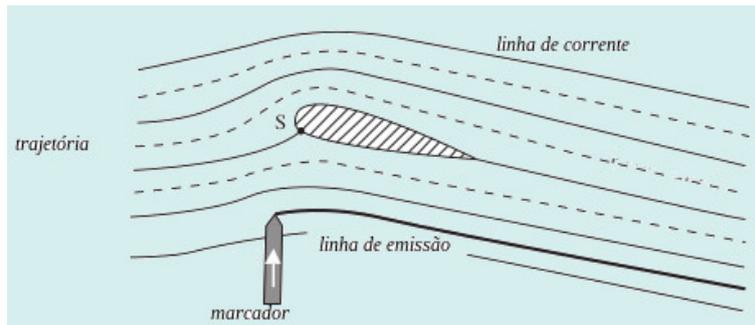


Figura 2.6: Fluxo estacionário: linhas de corrente (linhas sólidas fina), trajetória (linhas tracejadas) e linhas de emissão (linhas sólida espessa).

Por outro lado, se o fluxo for dependente do tempo as três linhas aparecerão de forma diferente conforme ilustrado na figura 2.7.

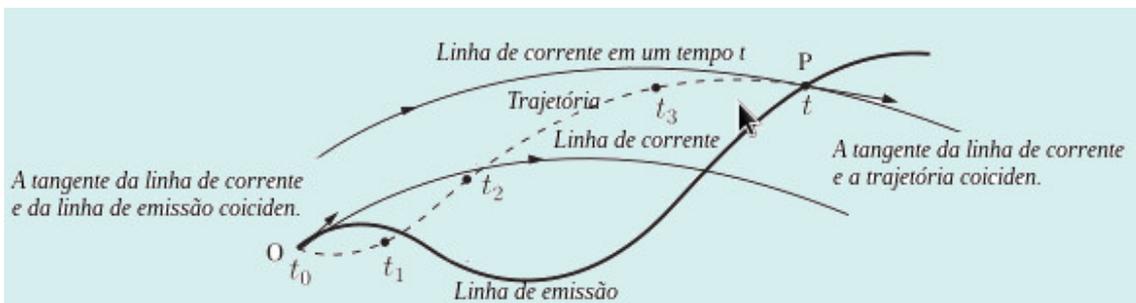


Figura 2.7: Fluxo dependente do tempo: linhas de corrente (linhas sólidas fina), trajetória (linhas tracejadas) e linhas de emissão (linhas sólida espessa). O número de fluido em P inicia seu movimento no ponto O em um tempo t_0 e por fim se encontra no ponto P no tempo t após os tempos t_1, t_2 e t_3 .

2.3 Derivada Total de Campos Escalares e Vetoriais (derivada em um ponto)

O uso da representação de Euler para a descrição da dinâmica de um fluxo implica no conhecimento do campo de velocidades associado ao fluxo e dos gradientes do campo de velocidades. Isto por que nesta representação os parâmetros físicos que descrevem o fluxo são dependentes dos valores do campo de velocidades e de suas variações. Iremos nos deparar ao longo dos nossos estudos com dois tipos de campos: escalares e vetoriais. A seguir discutiremos os cálculos das variações associadas a estes tipos de campos.

2.3.1 Derivada Total de um Campo Escalar

Considere uma partícula de fluido ao longo de um campo escalar $\psi(x, y, z, t)$ que varia no espaço e no tempo. A variação total de ψ pode ser escrita como:

$$d\psi(x, y, z, t) = \frac{\partial\psi}{\partial t}dt + \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy + \frac{\partial\psi}{\partial z}dz. \quad (2.13)$$

Multiplicando ambos os lados da equação anterior por dt , obtemos:

$$\frac{d\psi(x, y, z, t)}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial z} \frac{dz}{dt}. \quad (2.14)$$

Definindo $u = \frac{dx}{dt}$, $v = \frac{dy}{dt}$ e $w = \frac{dz}{dt}$, reescrevemos a equação anterior na forma:

$$\frac{d\psi(x, y, z, t)}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial t} + u \frac{\partial\psi}{\partial x} + v \frac{\partial\psi}{\partial y} + w \frac{\partial\psi}{\partial z}. \quad (2.15)$$

A equação 2.15 é conhecida como Relação de Euler. Ela exprime que a variação total de ψ é a soma de uma variação local no tempo adicionada a uma variação devido ao movimento da partícula de fluido através do campo de velocidades (variação advectiva).

2.3.2 Notação Indicial e Variação Advectiva

Considere uma partícula de fluido que se desloca no espaço, ao longo de um campo vetorial. A variação da grandeza $\vec{\xi}$ pode ser escrita como:

$$\delta\vec{\xi} = \frac{\partial\vec{\xi}}{\partial t}dt + \frac{\partial\vec{\xi}}{\partial x}dx + \frac{\partial\vec{\xi}}{\partial y}dy + \frac{\partial\vec{\xi}}{\partial z}dz. \quad (2.16)$$

Esta equação possui um grande número de termos. O diferencial total do campo ξ é a soma das variações das componentes do campo ao longo das três direções espaciais. Cada componente do campo depende das três coordenadas espaciais, de forma que $\vec{\xi} = \xi_x(x, y, z)$, $\vec{\xi} = \xi_y(x, y, z)$, \dots). Como resultado temos uma equação com nove termos. Usando a representação de Euler iremos expandir em componentes a equação 2.16 para fins didáticos usando a notação indiciais. A notação indicial é uma forma compacta para representação e manipulação de variáveis (grandezas físicas), sistemas de equações, combinações lineares e e somatórios. Um conjunto de variáveis x_1, x_2, \dots, x_n é geralmente denotado como x_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$). Quando escrito isoladamente, o símbolo x_i indica qualquer uma das variáveis x_1, x_2, \dots, x_n . O intervalo de variação do índice i deve ser sempre dado. Este índice pode ser denotado como um subscrito ou sobrescrito, ou seja, x_i ou x^i . Um sistema de notação usando índices é denominado notação indicial. Nesta notação, as coordenadas espaciais passam a ser escritas como x_i com $i = 1, 2, 3$. Da mesma forma, as componentes do campo passam a ξ_i , de forma que $\vec{\xi} = \xi_1\hat{i} + \xi_2\hat{j} + \xi_3\hat{k}$. A equação 2.16 fica então:

$$\delta\vec{\xi} = \frac{\partial\vec{\xi}}{\partial t}dt + \frac{\partial\vec{\xi}}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial\vec{\xi}}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial\vec{\xi}}{\partial x_3}dx_3, \quad (2.17)$$

Nesse ponto, definimos os vetores unitários ao longo das direções espaciais x_i como e_i , com $i = 1, 2, 3$.

$$\begin{aligned} \delta\vec{\xi} = \frac{\partial\vec{\xi}}{\partial t}dt + & \left[\frac{\partial\xi_1\hat{e}_1}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial\xi_2\hat{e}_2}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial\xi_3\hat{e}_3}{\partial x_1}dx_1 \right] \\ & + \left[\frac{\partial\xi_1\hat{e}_1}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial\xi_2\hat{e}_2}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial\xi_3\hat{e}_3}{\partial x_2}dx_2 \right] \\ & + \left[\frac{\partial\xi_1\hat{e}_1}{\partial x_3}dx_3 + \frac{\partial\xi_2\hat{e}_2}{\partial x_3}dx_3 + \frac{\partial\xi_3\hat{e}_3}{\partial x_3}dx_3 \right], \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \delta\vec{\xi} = \frac{\partial\vec{\xi}}{\partial t}dt + & \left[\frac{\partial\xi_1}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial\xi_1}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial\xi_1}{\partial x_3}dx_3 \right] \hat{e}_1 \\ & + \left[\frac{\partial\xi_2}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial\xi_2}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial\xi_2}{\partial x_3}dx_3 \right] \hat{e}_2 \\ & + \left[\frac{\partial\xi_3}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial\xi_3}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial\xi_3}{\partial x_3}dx_3 \right] \hat{e}_3, \end{aligned} \quad (2.19)$$

Dividindo ambos os lados da equação anterior por dt :

$$\begin{aligned} \frac{\delta\vec{\xi}}{\delta t} = \frac{\partial\vec{\xi}}{\partial t} + & \left[\frac{\partial\xi_1}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial\xi_1}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial\xi_1}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dt} \right] \hat{e}_1 \\ & + \left[\frac{\partial\xi_2}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial\xi_2}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial\xi_2}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dt} \right] \hat{e}_2 \\ & + \left[\frac{\partial\xi_3}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial\xi_3}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial\xi_3}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dt} \right] \hat{e}_3. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Assumimos que dx_i/dt são as componentes da velocidade da partícula ao longo do campo, e a derivada total fica:

$$\begin{aligned} \frac{\delta\vec{\xi}}{\delta t} = \frac{\partial\vec{\xi}}{\partial t} + & \left[u_1 \frac{\partial\xi_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial\xi_1}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial\xi_1}{\partial x_3} \right] \hat{e}_1 \\ & + \left[u_1 \frac{\partial\xi_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial\xi_2}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial\xi_2}{\partial x_3} \right] \hat{e}_2 \\ & + \left[u_1 \frac{\partial\xi_3}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial\xi_3}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial\xi_3}{\partial x_3} \right] \hat{e}_3, \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\frac{\delta\vec{\xi}}{\delta t} = \frac{\partial\vec{\xi}}{\partial t} + (u_i \cdot \nabla)\vec{\xi}. \quad (2.22)$$

Em notação indicial,

$$\frac{\delta\xi}{\delta t} = \frac{\partial\xi}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left[v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right] \xi_j, \quad (2.23)$$

$$\frac{\delta\xi}{dt} = \frac{\partial\xi}{\partial t} + (v_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i})\xi_j. \quad (2.24)$$

2.4 Divergência e Convergência

Alguns campos a velocidade tem magnitude e direção constantes. Porém, a grande maioria varia sua magnitude e direção de um ponto para outro do campo. Usamos a palavra divergência quando um campo de velocidades tende a separar as partículas em pontos do campo. A convergência esta associado a aproximação das partículas nestes mesmos pontos. A representação matemática da divergência é obtida pelo produto escalar do operador diferencial nabla sobre um vetor. Para um vetor \vec{A} , escrevemos seu divergente como:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{A} &= (\hat{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \hat{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \hat{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3}) \cdot (A_1 \hat{e}_1 + A_2 \hat{e}_2 + A_3 \hat{e}_3), \\ \nabla \cdot \vec{A} &= \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}.\end{aligned}\quad (2.25)$$

A expressão anterior é o divergente do vetor \vec{A} .

$$\nabla \cdot A = \frac{\partial A_i}{\partial x_i}.\quad (2.26)$$

Uma representação gráfica da convergência de um campo de velocidades é apresentada na figura 2.8.



Figura 2.8: Exemplo de um campo bi-dimensional convergente. (a) convergência devido a variação na direção da velocidade, (b) convergência devido a variação no módulo da velocidade.

2.5 Campo de Aceleração

A aceleração de um fluido é definida como:

$$\vec{a} = \frac{D\vec{u}}{Dt},\quad (2.27)$$

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_3},\quad (2.28)$$

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{\partial u_1}{\partial t} \hat{e}_1 + \frac{\partial u_2}{\partial t} \hat{e}_2 + \frac{\partial u_3}{\partial t} \hat{e}_3 + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \hat{e}_1 + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \hat{e}_2 + u_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \hat{e}_3 \\ &\quad + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \hat{e}_1 + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \hat{e}_2 + u_2 \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \hat{e}_3 \\ &\quad + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \hat{e}_1 + u_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \hat{e}_2 + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \hat{e}_3.\end{aligned}\quad (2.29)$$

Agrupando os termos,

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right\} \hat{e}_1 \\ &\quad + \left\{ \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right\} \hat{e}_2 \\ &\quad + \left\{ \frac{\partial u_3}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right\} \hat{e}_3,\end{aligned}\quad (2.30)$$

onde,

$$a_1 = \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3}, \quad (2.31)$$

$$a_2 = \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \quad (2.32)$$

$$a_3 = \frac{\partial u_3}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \quad (2.33)$$

são as componentes do vetor campo de aceleração.

Exemplo 3.4 - Para o campo de velocidades $\vec{u}(x_1, x_2, x_3, t) = 10x_1^2\hat{e}_1 - 20yx\hat{e}_2 + 100t\hat{e}_3$ m/s, determine a aceleração de uma partícula em $P=(1m, 2m, 5m, 0.1s)$.

Solução:

Partimos da equação das componentes da aceleração:

$$u_1 = 10x_1$$

$$u_2 = -20x_2x_1$$

$$u_3 = 100t$$

$$a_1 = \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = 0 + 10x_1^2 20x_1 + 0 + 0 = 200x_1^3$$

$$a_2 = \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = 0 + 10x_1^2(-20x_2) + (-20x_2x_1)(-20x_1) + 0 = 200x_1^2x_2$$

$$a_3 = \frac{\partial u_3}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 100 + 0 + 0 + 0 = 100$$

$$\vec{a} = 200x_1^3\hat{e}_1 + 200x_1^2x_2\hat{e}_2 + 100\hat{e}_3$$

Em $P=(1m, 2m, 5m, 0.1s)$, a aceleração é:

$$\vec{a} = 200(1)^3\hat{e}_1 + 200(1)^2 2\hat{e}_2 + 100\hat{e}_3$$

$$\vec{a} = 200\hat{e}_1 + 400\hat{e}_2 + 100\hat{e}_3$$

2.6 Tensores Taxa de Deformação e Rotação de uma Partícula de Fluido : Movimento Relativo Próximo de um Ponto

Partículas de fluido se deformam e giram. Iremos demonstrar formalmente que o movimento relativo entre dois pontos vizinhos podem ser escritos como a soma do movimento devido à rotação local, adicionado ao movimento devido à deformação local. Com base na notação indicial, o campo de velocidade é escrito como:

$$\vec{u} = u_i(x_1, x_2, x_3), i = 1, 2, 3, \quad (2.34)$$

ou na forma

$$\vec{u} = u_1(x_1, x_2, x_3)\hat{e}_1 + u_2(x_1, x_2, x_3)\hat{e}_2 + u_3(x_1, x_2, x_3)\hat{e}_3. \quad (2.35)$$

A variação da velocidade para cada uma das direções espaciais será:

$$\begin{aligned} \delta\vec{u} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\delta x_1\hat{e}_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\delta x_2\hat{e}_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\delta x_3\hat{e}_1 \\ &+ \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\delta x_1\hat{e}_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\delta x_2\hat{e}_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\delta x_3\hat{e}_2 \\ &+ \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\delta x_1\hat{e}_3 + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\delta x_2\hat{e}_3 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\delta x_3\hat{e}_3. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Em termos das componentes de $\delta\vec{u}$,

$$\begin{aligned} \delta\vec{u}_1 &= \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\delta x_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\delta x_3 \right] \hat{e}_1, \\ \delta\vec{u}_2 &= \left[\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\delta x_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\delta x_3 \right] \hat{e}_2, \\ \delta\vec{u}_3 &= \left[\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\delta x_2 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\delta x_3 \right] \hat{e}_3. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Devemos notar que neste caso as componentes da velocidade são vetores. Usando a notação matricial,

$$\begin{bmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \\ \delta u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \delta x_3 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

ou em notação indicial,

$$\delta u_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \delta x_j. \quad (2.39)$$

Podemos entender a equação 2.39 em termos de um vetor derivado do produto de um tensor de segunda ordem operando sobre o vetor deslocamento. Os termos $\partial u_i/\partial x_j$ são as componentes do tensor gradiente de velocidades ou tensor de deformação. Cada componente está associada a deformação ao longo das faces da partícula de fluido nas direções dos eixos cartesianos. Pensando com mais atenção, cada uma das componentes representam a variação espacial das componentes do campo de velocidades. Elas são responsáveis pela deformação (contração ou alongação nas direções dos eixos) e rotação da partícula ao longo do seu movimento no campo de velocidades. De outra forma, podemos entender o tensor de deformação como sendo um tensor que opera sobre os deslocamentos para produzir as velocidades.

O tensor gradiente de velocidades pode ser escrito em termos de um tensor simétrico e um anti-simétrico.

$$\frac{\delta u_i}{\delta x_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (2.40)$$

$$\frac{\delta u_i}{\delta x_j} = \epsilon_{ij} + r_{ij}, \quad (2.41)$$

onde

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (2.42)$$

e

$$r_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.43)$$

A parte simétrica do tensor de deformação, ϵ_{ij} é responsável pela deformação da partícula sendo chamada de **tensor taxa de deformação**. Já a parte anti-simétrica r_{ij} responde as rotações da partícula de fluido sendo designado como **tensor de rotação**.

O tensor taxa de deformação da conta das deformações da partícula de fluido sem rotação. Os termos $\partial u_i / \partial x_i$ representam a variação da velocidade ao longo da extensão entre dois pontos em faces adjacentes da partícula de fluido, ao longo de um eixo cartesiano $x_{(i)}$. A soma dos elementos da diagonal é o divergente do campo de velocidades $\partial u_i / \partial x_i$. Existem seis componentes independentes. Os termos da diagonal dão conta do "aumento ou diminuição" da distância entre faces adjacentes da partícula de fluido ao longo dos eixos $x_{(i)}$ (alongação ou compressão).

$$\nabla \cdot u = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}. \quad (2.44)$$

Os demais termos dão conta da distorção, medida pela variação angular entre linhas perpendiculares coincidentes com os eixos $x_{(i)}$.

2.7 Classes de Fluxos

Podemos classificar os diferentes tipos de fluxos em termos do campo de velocidades, da força de viscosidade, da vorticidade e da compressibilidade. A seguir iremos discutir alguns aspectos básicos dos diferentes tipos de fluxos.

2.7.1 Fluxos Laminares e Turbulentos, Classificação em Termos do Campo de Velocidades

Em um fluxo laminar, os parciais individuais se movem ao longo de sua trajetória, independentemente dos parciais em camadas adjacentes. Este tipo de fluxo pode ser subclassificado como uniforme ou não-uniforme e estacionário ou transiente. Um fluxo laminar é dito uniforme quando o campo de velocidade não apresentam dependência espacial. Por outro lado, será classificado como estacionário quando o campo de velocidades não apresentar dependência temporal. Podemos considerar ainda como laminares os fluxos de cisalhamento, onde a velocidade apresentam alguma dependência com as coordenadas espaciais e os fluxos rotacionais e ondulatórios em que o campo de velocidades apresenta uma dependência periódica com o tempo. Entretanto, de forma geral, fluxos laminares são fluxos de baixas velocidades.

Em um fluxo turbulento as trajetórias das partículas são randômicas e imprevisíveis. Na atmosfera ocorre em fronteiras de nuvens em formação ou entre camadas adjacentes com regimes de fluxos uniforme de ar puro diferente, tanto em escala local (tornados) bem como em larga escala (furacões). Fluxos laminares existem apenas sob condições especiais.

2.7.2 Invíscido e Viscoso, Classificação em Termos da Viscosidade

Fluxos invíscidos são uma importante categoria de fluxos na mecânica dos fluidos. Nestes podemos desconsiderar as forças internas presentes na dinâmica do fluxo. Todos os fluidos

têm algum atrito interno que fornece uma resistência ao movimento. Quando uma força é aplicada a um fluido, ele se deforma continuamente. O fluido mais próximo da força acelera mais e o atrito interno arrasta a camada de fluido adjacente. No entanto, a aceleração não pode continuar indefinidamente, e eventualmente o arrasto do líquido atinge um ponto onde equilibra a força aplicada. Portanto, o grau em que um fluido comporta-se sem efeitos de fricção depende da velocidade do fluxo e da eficácia do fluido em transmitir a força interna ao fluido adjacente. Fluxos mais rápidos e fluidos com pequeno estresse interno comportam-se inviscidamente. Em um fluxo viscoso entretanto, a resistência interna ao fluxo não pode ser desconsiderada e a equação da força deve ter um termo adicional de forma a conderarmos os efeitos da viscosidade.

2.7.3 Rotacional e Irrotacional, Classificação em Termos do Vetor Vorticidade

Um fluxo irrotacional é aquele onde o vetor vorticidade, é igual a zero.

$$\vec{\xi} = \nabla \times \vec{u} = 0. \quad (2.45)$$

Neste caso existe uma dependência periódica do campo de velocidades com as variáveis espaciais e com o tempo. Obviamente, em um fluxo irrotacional o vetor vorticidade é diferente de zero.

2.7.4 Compressível e Incompressível

Um fluxo incompressível existe se a densidade de cada parcel de fluido que se desloca pelo campo de velocidades permanece contante, ou seja:

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0. \quad (2.46)$$

2.8 Lista de Questões e Problemas

1. Uma partícula de fluido deve manter fixa sua densidade ou seu formato no fluxo? Pode-se permitir, em hidrodinâmica, a divisão de uma partícula de fluido em duas ou mais partículas?
2. Trace as linhas de corrente representativas dos seguintes campos de velocidades.

(a) $\vec{u}(\vec{r}, t) = (x^2, xy^3)$

(b) $\vec{u}(\vec{r}, t) = (x, y)$

(c) $\vec{u}(\vec{r}, t) = (\frac{w}{\pi}x, wy)$

(d) $\vec{u}(\vec{r}, t) = (-wy, wx)$, com w constante para $r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \leq a$ e, $\vec{u}(\vec{r}, t) = \left(\frac{+\Gamma y}{2\pi r^2}, \frac{-\Gamma x}{2\pi r^2} \right)$,

para $r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} > a$, sendo Γ constante. Em ambos os casos, a é constante.

(e) $\vec{u}(\vec{r}, t) = (-yx, xy^2)$

3. Um campo de velocidades é dado por $\vec{u} = (2t + 2)\hat{i} - 2t\hat{j}$, em m/s. Apresente um esboço da trajetória de duas partículas até um tempo $t = 5s$. A primeira partícula se origina na origem em $t = 0s$, e a segunda que se origina na origem em um tempo de $2s$. Também apresente um esboço das linhas de corrente em $t = 5s$.
4. Para o campo de velocidades $\vec{u} = Axt\hat{i} + Ayt\hat{j}$, onde $A = 2m^2s^{-1}$, verifique que as equações paramétricas para o movimento da partícula são dadas por $x = c_1 e^{At}$ e $y = c_2 e^{-At}$. Obtenha

a equação para a trajetória da partícula localizada no ponto $(x, y) = (2, 2)$ no instante $t = 0$. Compare essa trajetória com a linha de corrente passando pelo mesmo ponto.

5. Considere o campo de fluxo dado na descrição euleriana pela expressão $\vec{u} = ax + byt$, em que $a = 0.2s^{-1}$, $b = 0.04s^{-2}$, e as coordenadas são medidas em metros. Deduza as funções de posição lagrangiana para a partícula fluida que passou pelo ponto $(x, y) = (1, 1)$ no instante $t = 0$. Obtenha uma expressão algébrica para a trajetória seguida por essa partícula. Trace a trajetória e compare-a com as linhas de corrente que passam por esse mesmo ponto nos instantes $t = 0.10s$ e $t = 20s$.

6. Considere a mangueira de jardim. Suponha que o campo de velocidade é dado por $\vec{u} = u_0 + v_0 \text{sen}[w(t - x/u)]$, onde a direção x é horizontal e a origem está na posição média da mangueira, $u_0 = 10m/s$, $v_0 = 2m/s$, e $w = 5\text{ciclos}/s$. Determine e trace em um gráfico as linhas de corrente instantâneas que passam através da origem em $t = 0s$, $0.05s$, $0.1s$ e $0.15s$. Também determine e trace um gráfico com as trajetórias das partículas que deixam a origem para os mesmos quatro instantes de tempos.

7. Calcule o ângulo que o vetor velocidade faz com o eixo Ox e o vetor unitário normal a linha de corrente em $(1, -2)$ para os campos de velocidade abaixo em $t = 2s$ com \vec{u} em m/s .

$$(a) \vec{u} = xy\hat{i} - 2y^2\hat{j}$$

$$(b) \vec{u} = (x^2 + 4)\hat{i} - y^2t\hat{j}$$

$$(c) \vec{u} = (xy^2 + 4)\hat{i} - yt\hat{j}$$

8. Ache o vetor campo de aceleração para o fluxo de um fluido com os seguintes campos de velocidade em m/s :

$$(a) \vec{u} = 20(1 - y^2)\hat{i}$$

$$(b) \vec{u} = 2x\hat{i} - 2yt^{1/2}\hat{j}$$

$$(c) \vec{u} = x^2t\hat{i} + 2xyt\hat{j} + 2yzt\hat{k}$$

$$(d) \vec{u} = x\hat{i} - 2xyz\hat{j} + zt\hat{k}$$

9. Para todos os casos anteriores calcule a aceleração em $(2, -1, 3)$ em $t = 2s$.

10. Dado o campo de velocidade,

$$u_x = 3x + 2yz + u_{x_0},$$

$$u_y = 4xy + 3t + 2yz + u_{y_0},$$

$$u_z = 0$$

onde u_{x_0} e u_{y_0} são constantes, responda e calcule:

(a) Se enquadra na descrição Euleriana ou Lagrangeana?

(b) Qual a aceleração local?

(c) Qual a aceleração advectiva?

(d) Qual a aceleração total?

11. Um avião voa ao longo de uma frente quente em direção ao norte a uma velocidade de $360Km/h$. A temperatura de um navio ancorado nas proximidades apresenta um aumento de $12^\circ C/dia$. Um satélite mede um gradiente horizontal de temperatura no clima do sistema de $-0,06C/km$ para o norte. Qual é a a variação de temperatura medido no avião?

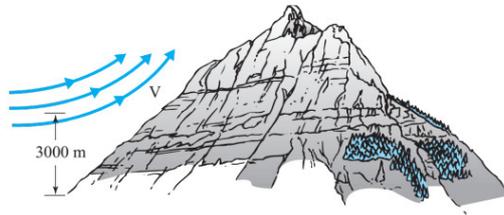
12. A velocidade ao longo da linha central de um bocal de comprimento L é dado por:

$$u = 2t \left[1 - \left(\frac{x}{2L} \right) \right]^2,$$

onde u esta em m/s , t em segundos e medido a partir do início do fluxo, x é a distância da entrada até o bocal. Encontre a aceleração advectiva, a aceleração local e a aceleração total quando $t = 3s$, $x = 0,5m$ e $L = 0,8m$.

13. Ache as componentes do tensor taxa de deformação e rotação para os campos de velocidade do problema 10 em $(2,-1,3)$ em $t = 2s$.

14. A densidade do ar na atmosfera varia de acordo com $\rho(z) = 1.23e^{-10^{-4}z}$ em Kg/m^3 . Conforme a figura abaixo, o ar sobe a montanha com velocidade $\vec{u} = 20\hat{e}_1 + 10\hat{e}_3$ em m/s , em um ponto igual a $z=3000$ m. Ache a taxa de variação da densidade de uma partícula de fluido neste ponto.



15. A variação da densidade com a altitude é dada por $\rho(z) = 1000(1 - \frac{z}{4})$ Kg/m^3 . Em um local onde $\vec{u} = 10\hat{e}_1 + 10\hat{e}_3$ em m/s , ache $\frac{D\rho}{Dt}$.

16. Escreva o vetor gradiente de \vec{a} na forma vetorial, indicial e matricial.

17. Apresente as seguintes expressões expandindo em componentes e rearranjando.

(a) $\nabla \cdot (f\vec{v}) = f\nabla \cdot \vec{v} + \nabla f \cdot \vec{v}$

(b) $\nabla \times (f\vec{u}) = f\nabla \times \vec{u} + \nabla f \times \vec{u}$

(c) $A\vec{u} \cdot \vec{w} = (A^*w) \cdot \vec{u}$

18. Escreva o termo A_{13} na expressão $A_{ij} = B_{kl}e_{ik}e_{jl}$.

19. Escreva as componentes A_{12} e A_{33} na expressão $A_{ij} = u_i B_{kj} v_k + w_k e_{ijk}$.

20. Mostre que $\vec{a} \times \vec{b} = e_{ijk} a_j b_k$.

21. Considerando $i, j, k=1,2$ e 3 , apresente as expressões abaixo em termos de suas componentes.

(a) $F_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$

(b) $\epsilon_{pqr} \frac{\partial S_r}{\partial x_q}$

22. O campo $u_1 = 6(x_1x_2 + x_2^2)$, $u_2 = 3(x_1^2 + x_2^2)$, $w = 0$ é divergente? Argumente.

23. Considere o fluxo descrito por $\vec{u} = 10x_1\hat{e}_1 - 10x_2\hat{e}_2$. Qual sua divergência?

2.9 Apêndice

2.9.1 Tensores

Um tensor é uma generalização de vetores e matrizes, sendo facilmente compreendido como uma matriz multidimensional. No caso geral, uma matriz de números dispostos em uma grade regular com um número variável de eixos é conhecido como tensor. Um vetor é um tensor unidimensional ou de primeira ordem e uma matriz é um tensor bidimensional ou de segunda

ordem, contendo nove componentes. A notação tensorial é muito parecida com a notação de matricial com uma letra maiúscula representando um tensor, e letras minúsculas com inteiros subscritos representando as componentes do tensor.

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

2.9.2 Produto de Matrizes-Revisão

A multiplicação de matrizes segue a regra:

$$C_{ij} = A_{ik}B_{kj}, \quad (2.48)$$

sendo $i = 1, 2, 3, \dots, i_n$, $j = 1, 2, 3, \dots, j_n$ e $k = 1, 2, 3, \dots, k_n$. Para matrizes quadradas, $i_n = j_n = k_n = n$, o número de elementos em cada linha e coluna.

2.9.3 Representação Matricial

Na forma matricial, um tensor pode ser escrito como:

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

Para uma matriz quadrada T_{ij} , dizemos que esta é simétrica se $T_{ij} = T_{ji}$, e anti-simétrica se $T_{ij} = -T_{ji}$. A extensão se faz válida para tensores também. Desta forma, em um tensor simétrico três elementos são repetidos; $T_{12} = T_{21}$, $T_{13} = T_{31}$ e $T_{23} = T_{32}$. Em uma matriz 3×3 existem apenas 6 escalares independentes, $T_{12}, T_{13}, T_{23}, T_{11}, T_{22}$ e T_{33} . Em um tensor anti-simétrico $T_{11}, T_{22}, T_{33} = 0$, e os três escalares independentes ocorrem com sinal positivo e negativo. Estes três escalares constituem o vetor dual definido como:

$$d_i = \epsilon_{ijk}T_{jk}. \quad (2.50)$$

2.9.4 Teorema

Dado um tensor T_{ij} , este pode ser decomposto na soma de um tensor simétrico e um anti-simétrico.

$$T_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) + \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}). \quad (2.51)$$

2.9.5 Propriedades Básicas dos Tensores

2.9.5.1 Adição:

$$\mathbf{U} = \mathbf{T} + \mathbf{S} \quad (2.52)$$

$$\begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} + S_{11} & T_{12} + S_{12} & T_{13} + S_{13} \\ T_{21} + S_{21} & T_{22} + S_{22} & T_{23} + S_{23} \\ T_{31} + S_{31} & T_{32} + S_{32} & T_{33} + S_{33} \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

Em notação indicial,

$$U_{ij} = T_{ij} + S_{ij}. \quad (2.54)$$

2.9.5.2 Produto de um Tensor por um Vetor:

Seja \vec{u} um vetor e \mathbf{T} um tensor de segunda ordem, então:

$$\vec{v} = \mathbf{T} \cdot \vec{u} \quad (2.55)$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11}u_1 + T_{12}u_2 + T_{13}u_3 \\ T_{21}u_1 + T_{22}u_2 + T_{23}u_3 \\ T_{31}u_1 + T_{32}u_2 + T_{33}u_3 \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

Alternativamente, em notação indicial temos:

$$v_i = T_{ij}u_j. \quad (2.57)$$

Note que de forma geral, $\vec{u} \cdot \mathbf{T} \neq \mathbf{T} \cdot \vec{u}$ a menos que \mathbf{T} seja simétrico.

2.9.5.3 Produto de Tensores:

Sejam \mathbf{T} e \mathbf{S} dois tensores de segunda ordem.

$$\mathbf{U} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{S} \quad (2.58)$$

$$\begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} = \quad (2.59)$$

$$\begin{bmatrix} T_{11}S_{11} + T_{12}S_{21} + T_{13}S_{31} & T_{11}S_{12} + T_{12}S_{22} + T_{13}S_{32} & T_{11}S_{13} + T_{12}S_{23} + T_{13}S_{33} \\ T_{21}S_{11} + T_{22}S_{21} + T_{23}S_{31} & T_{21}S_{12} + T_{22}S_{22} + T_{23}S_{32} & T_{21}S_{13} + T_{22}S_{23} + T_{23}S_{33} \\ T_{31}S_{11} + T_{32}S_{21} + T_{33}S_{31} & T_{31}S_{12} + T_{32}S_{22} + T_{33}S_{32} & T_{31}S_{13} + T_{32}S_{23} + T_{33}S_{33} \end{bmatrix}$$

Na notação indicial temos:

$$U_{ij} = T_{ik}S_{kj}. \quad (2.60)$$

Note também que o produto de matriz não é comutativo, logo

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{S} \neq \mathbf{S} \cdot \mathbf{T}. \quad (2.61)$$

2.9.5.4 Tensor Transposto:

Seja \mathbf{S} um tensor. O tensor transposto de \mathbf{S} será \mathbf{S}^T e definido como:

$$\vec{u} \cdot \mathbf{S}^T = \mathbf{S} \cdot \vec{u}. \quad (2.62)$$

$$\mathbf{S}^T \equiv \begin{pmatrix} S_{11} & S_{21} & S_{31} \\ S_{12} & S_{22} & S_{32} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{pmatrix}. \quad (2.63)$$

Se \mathbf{A} e \mathbf{B} são dois tensores, então

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T. \quad (2.64)$$

2.9.5.5 Tensor Delta de Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j; \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Na forma matricial, o tensor delta de Kronecker aparece como:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.65)$$

O tensor delta de Kronecker é um tensor unitário.

2.9.5.6 Tensor Unitário Alternado

É um tensor de ordem três definido como:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{se } ijk = 123, 231, 312 \text{ (permutação par);} \\ -1 & \text{se } ijk = 321, 213, 132 \text{ (permutação impar);} \\ 0 & \text{se } ijk \text{ tem pelo menos dois índices iguais.} \end{cases}$$

2.9.5.7 Produto Diádico de dois Vetores ou Produto Tensorial

Até aqui estamos habituados com dois tipos de produtos entre vetores, o produto escalar e o produto vetorial. Um terceiro produto entre vetores é conhecido como *produto diádico* ou produto tensorial. Sejam \vec{a} e \vec{b} dois vetores escritos na forma $\vec{a} = a_1\hat{e}_1 + a_2\hat{e}_2 + a_3\hat{e}_3$ e $\vec{b} = b_1\hat{e}_1 + b_2\hat{e}_2 + b_3\hat{e}_3$, o produto diádico entre os dois vetores será:

$$\begin{aligned} \vec{a}\vec{b} = \vec{a};\vec{b} &= (a_1\hat{e}_1 + a_2\hat{e}_2 + a_3\hat{e}_3)(b_1\hat{e}_1 + b_2\hat{e}_2 + b_3\hat{e}_3) = \\ & a_1b_1\hat{e}_1\hat{e}_1 + a_1b_2\hat{e}_1\hat{e}_2 + a_1b_3\hat{e}_1\hat{e}_3 + a_2b_1\hat{e}_2\hat{e}_1 + a_2b_2\hat{e}_2\hat{e}_2 + a_2b_3\hat{e}_2\hat{e}_3 + a_3b_1\hat{e}_3\hat{e}_1 + a_3b_2\hat{e}_3\hat{e}_2 + a_3b_3\hat{e}_3\hat{e}_3, \end{aligned} \quad (2.66)$$

que em notação indicial fica na forma

$$A_{ij} = a_ib_j. \quad (2.67)$$

Para uma matriz quadrada T_{ij} , dizemos que esta é simétrica se $T_{ij} = T_{ji}$, e anti-simétrica se $T_{ij} = -T_{ji}$. A extensão se faz válida para tensores também. Desta forma, em um tensor simétrico três elementos são repetidos; $T_{12} = T_{21}$, $T_{13} = T_{31}$ e $T_{23} = T_{32}$. Em uma matriz 3×3 existem apenas 6 escalares independentes, $T_{12}, T_{13}, T_{23}, T_{11}, T_{22}$ e T_{33} . Em um tensor anti-simétrico $T_{11}, T_{22}, T_{33} = 0$, e os três escalares independentes ocorrem com sinal positivo e negativo. Estes três escalares constituem o vetor dual definido como:

$$d_i = \epsilon_{ijk}T_{jk}. \quad (2.68)$$

Capítulo 3

Equação da Continuidade, Vorticidade, Função Potencial e de Corrente

3.1 Equação da Continuidade no Sistema Infinitesimal e num Volume de Controle

A análise do movimento de um fluido pode seguir dois caminhos: (1) descrever o padrão de fluxo detalhado em cada ponto (x, y, z) do campo ou (2) a partir de um volume fixo (volume de controle), fazendo um balanço do fluxo de entrada versus fluxo de saída de variáveis como massa, momento e energia. A primeira abordagem se constitui na forma diferencial. A segunda é conhecida como forma integral.

Considere uma partícula de fluido de forma cúbica com volume δV em um ponto \vec{r} do campo, em um tempo t . A massa da partícula será dada pela densidade multiplicada por seu volume. A variável de campo é a densidade. Se a partícula se desloca ao longo de uma linha de corrente para um região onde o fluxo esta convergindo, sua densidade irá aumentar. Da mesma forma, regiões de divergência levam a uma diminuição da densidade da partícula. A densidade da partícula também pode variar no tempo¹.

Na ausência de fontes ou sumidouros no interior do partícula de fluido, a taxa de variação temporal de massa da partícula de fluido deve ser igual ao fluxo resultante de massa através das superfícies da mesma partícula. Esta é uma suposição válida para fluxos atmosféricos desde que não existem fontes ou sumidouros na atmosfera.

Considere a figura 3.1. A componente de fluxo de massa para fora da partícula será $(\vec{u} \cdot \vec{n})$. A variação de massa será positiva se o fluxo for para o interior do partícula de fluido. Integrando sobre o volume obtemos a taxa de variação volumétrica resultante com respeito ao tempo, e sobre a área da partícula de fluido, o fluxo resultante através da superfície.

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \iint_A \rho(\vec{u} \cdot \vec{n}) dA. \quad (3.1)$$

Aplicando o teorema da divergência ² ao lado direito da equação 3.1 obtemos:

¹Como exemplo podemos citar o domínio de uma nuvem onde a competição entre condensação e a evaporação afetam a densidade.

²O teorema da divergência tem a seguinte forma:

$$\iiint_V \nabla \cdot f dV = \iint_A f \cdot \hat{n} dA,$$

O teorema da divergência implica que se a integral de superfície a direita for zero, ou seja, se o fluxo da líquido da grandeza f for zero através da superfície, o divergente de f integrado sobre o volume dV' é zero. Em termos

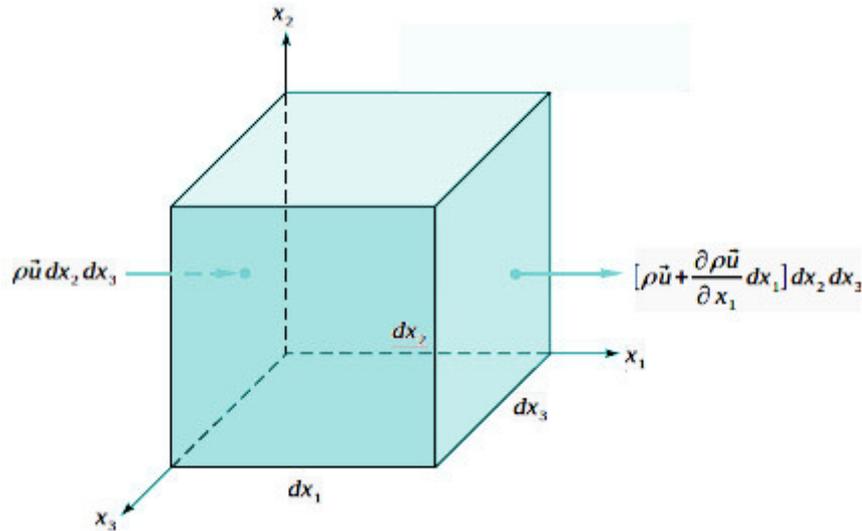


Figura 3.1: partícula de fluido em um ponto do campo (x_1, x_2, x_3) , em um campo de velocidades \vec{u} .

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \iiint_V (\nabla \cdot \rho \vec{u}) dV, \quad (3.2)$$

No limite onde $dV \rightarrow 0$ no ponto \vec{r} , a equação 3.3 é reescrita como:

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u})}_{\text{Equação Geral da Continuidade}} = 0, \quad (3.3)$$

ou em notação indicial como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0. \quad (3.4)$$

A última equação descreve a variação da densidade em um ponto do campo. Ela exprime que a taxa de variação da massa por unidade de volume em um ponto do campo (variação local da densidade no tempo) é igual ao fluxo de massa por unidade de volume neste ponto.

3.2 Equação da Continuidade em Coordenadas Cilíndricas e Plano Polares

A alternativa mais comum ao sistema de coordenadas cartesianas é o sistema de coordenadas cilíndricas. Neste sistema, um ponto é definido por uma distância z ao longo do mesmo eixo, por uma distância r do eixo e por um ângulo θ em torno do eixo.

de uma partícula de fluido, isso significa que não há fontes ou sumidouros no interior do volume da partícula. Logo, não há fluxo líquido através da superfície A .

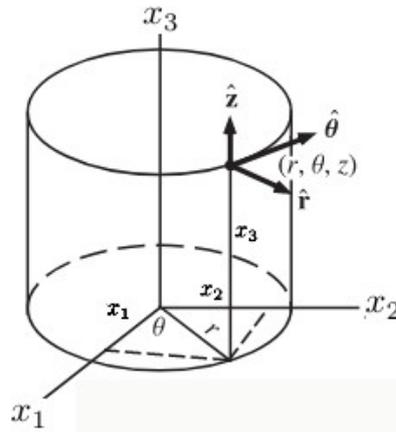


Figura 3.2: Sistema de coordenadas cilíndricas.

A equação da continuidade pode ser escrita em coordenadas cilíndricas. Neste caso, o conjunto (x_1, x_2, x_3) que descreve um ponto no sistema cartesiano passa (r, θ, x_3) no sistema de coordenadas cilíndricas. As equações de transformação são,

$$\begin{cases} r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{x_2}{x_1}\right), \\ x_3 = x_3, \end{cases}$$

e a equação da continuidade neste sistema assume a forma a seguir:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \rho u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\rho u_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (\rho u_3)}{\partial x_3} = 0. \quad (3.5)$$

No caso de fluxos no bidimensionais, onde $x_3 = 0$, o sistema de coordenadas cilíndricas se resume ao sistema de coordenadas plano polares a partir da transformação que segue.

$$\begin{cases} r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \end{cases}$$

A equação da continuidade por sua vez fica aproximada por:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \rho u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\rho u_\theta)}{\partial \theta} = 0. \quad (3.6)$$

3.3 Forma Integral da Continuidade

A forma integral da continuidade se torna adequada para sistemas confinados em regiões como taques e tubulações. Ao contrário do enfoque anterior, aqui iremos trabalhar com grandes volumes denominados volume de controle. O volume de controle é confinado em uma região determinada pelas superfícies de controle. O caso mais geral ocorre quando o volume de controle não é fixo no espaço, mas possui uma determinada velocidade ao longo do fluxo. Assumimos que a velocidade das superfícies que confinam o volume de controle é w_i . Neste caso aplicamos o teorema de Leibnitz a densidade.

O teorema de Leibnitz permite calcular a taxa de variação temporal (D/Dt) de uma grandeza física conservativa f sobre um volume que pode estar variando devido ao seu movimento

com velocidade \vec{u} . Essas variações de volume podem ser expansões ou contrações no tempo. O volume em questão pode ser o volume de uma partícula, de uma nuvem, de uma massa de ar ou mesmo da atmosfera planetária. O teorema de Leibnitz em sua forma analítica é escrito como segue:

$$\frac{D}{Dt} \iiint_V f dV = \iiint_V \frac{\partial f}{\partial t} dV + \iint_A f(\vec{u} \cdot \hat{n}) dA. \quad (3.7)$$

Na equação anterior, V' representa o volume de integração. Se não ocorrem variações de volume (se não existe movimento relativo entre as fronteiras do volume) a integral de superfície é zero. Isto significa que não existe um fluxo líquido da grandeza f através do volume. A derivada parcial no primeiro termo a direita na equação anterior pode ser calculada tanto dentro como fora da integral. Adicionalmente, a grandeza f pode estar variando devido a possíveis fontes e sumidouros dentro do volume V' .

$$\frac{D}{Dt} \iiint_V f dV = \sum Q, \quad (3.8)$$

Q representa fontes ou sumidouros da grandeza f no interior do volume V' . Generalizando,

$$\sum Q = \iiint_V \frac{\partial f}{\partial t} dV + \iint_A f(\vec{u} \cdot \hat{n}) dA \quad (3.9)$$

Assim,

$$\frac{D}{Dt} \iiint_V \rho dV = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \iint_A \rho w_i n_i dA. \quad (3.10)$$

Usando a continuidade no segundo termo da última equação e aplicando o teorema da divergência, obtemos:

$$\frac{D}{Dt} \iiint_V \rho dV = - \iiint_V \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} dV + \iint_A \rho w_i n_i dA. \quad (3.11)$$

$$\frac{D}{Dt} \iiint_V \rho dV = - \iint_A \rho u_i n_i dA + \iint_A \rho w_i n_i dA, \quad (3.12)$$

$$\frac{D}{Dt} \iiint_V \rho dV = - \iint_A \rho(u_i - w_i)n_i dA. \quad (3.13)$$

A equação anterior expressa que a taxa de variação temporal da massa no volume de controle é igual a densidade multiplicada pela componente normal do fluxo através das superfícies do volume de controle. Se o volume de controle for fixo, $w_i=0$.

3.4 Fluxos Rotacionais e Irrotacionais : Vorticidade

Rotações são uma importante classe de movimento na natureza. O termo rotação é usado para relatar a velocidade angular, neste caso, de uma partícula de fluido em torno de um eixo ao campo de velocidades que existe em torno do mesmo eixo.

A vorticidade é um conceito associado a rotação da partícula de fluido em um ponto local. Considere uma partícula de fluido de volume infinitesimal com a face $x_1 - y_2$ representada na figura a seguir.

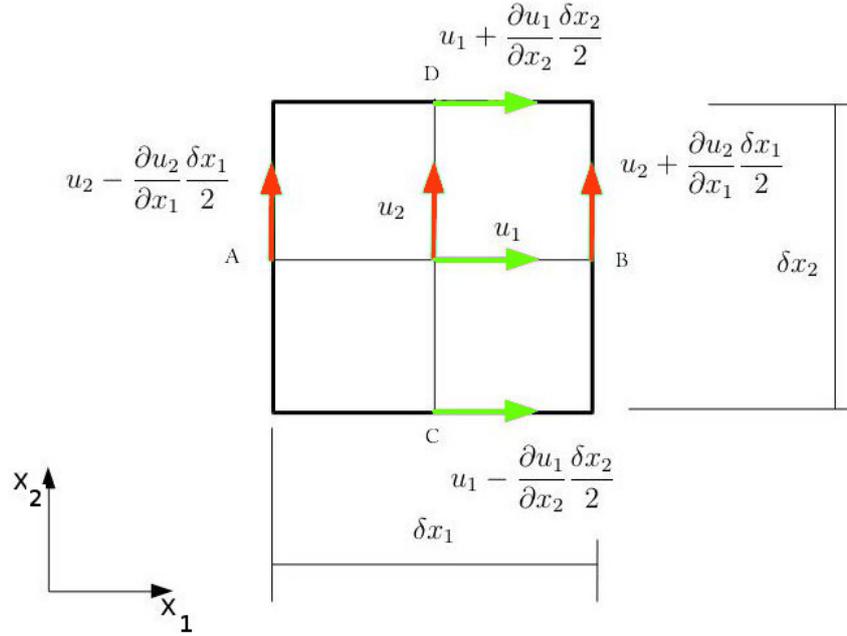


Figura 3.3: Partícula de fluido infinitesimal.

A velocidade angular w_{x_3} , em torno do eixo x_3 , será dada pela média das velocidades angulares dos segmentos \overline{AB} e \overline{CD} .

$$w_{\overline{AB}} = \frac{V_B - V_A}{\delta x_1} \quad (3.14)$$

$$w_{\overline{CD}} = -\frac{V_D - V_C}{\delta x_2} \quad (3.15)$$

$$w_{\overline{AB}} = \left(u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\delta x_1}{2} - \left(u_2 - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\delta x_1}{2} \right) \right) = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \quad (3.16)$$

$$w_{\overline{CD}} = -\left(u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\delta x_2}{2} - \left(u_1 - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\delta x_2}{2} \right) \right) = -\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \quad (3.17)$$

A velocidade angular em torno de x_3 será dada pela média das velocidades angulares.

$$w_{x_3} = \frac{1}{2}(V_{\overline{AB}} + V_{\overline{CD}}) \quad (3.18)$$

$$w_{x_3} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \quad (3.19)$$

Para os demais eixos cartesianos,

$$w_{x_2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right), \quad (3.20)$$

$$w_{x_1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right). \quad (3.21)$$

As quantidades w_{x_1} , w_{x_2} e w_{x_3} são as componentes do vetor velocidade angular. O vetor \vec{w} é relatado ao vetor velocidade por:

$$\vec{w} = \nabla \times \vec{v}, \quad (3.22)$$

$$\vec{w} = \begin{bmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) \hat{e}_1 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \hat{e}_2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \hat{e}_3.$$

Em notação indicial,

$$w_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}. \quad (3.23)$$

A vorticidade é definida em termos da velocidade angular pela expressão:

$$\vec{\xi} = 2\vec{w}. \quad (3.24)$$

Entretanto, na representação de Euler, consideramos que os valores da velocidade de uma partícula de fluido de fato são os valores associados a pontos específicos do campos de velocidades pelo qual a partícula de fluido se desloca. Assim, ao longo do seu deslocamento, a partícula de fluido assume os valores de velocidade do campo. As variações no campo de velocidades determinam a dinâmica do partícula de fluido. A vorticidade então deve ser pensada como uma característica do campo de velocidades, devido a um arranjo das derivadas da velocidade que levam a formação de um campo escalar em cada ponto do fluxo do fluido. Uma segunda definição para a vorticidade considerando o campo de velocidades é:

$$\vec{\xi} = \nabla \times \vec{V}. \quad (3.25)$$

Nesta formulação fica evidente que a vorticidade caracteriza a tendência de uma partícula de fluido de girar em torno do seu eixo.

Quando a vorticidade ao longo do fluxo é zero, chamamos este fluxo de irrotacional, $\vec{w} = 0$. A condição básica é que,

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \quad i \neq j \quad (3.26)$$

para fluxos irrotacionais.

Relatada a vorticidade esta o conceito de circulação. A circulação em torno de um caminho fechado é definida como a integral da componente tangencial da velocidade.

$$\Gamma \equiv \oint \vec{u} \cdot d\vec{s}. \quad (3.27)$$

3.5 Funções de Corrente e Potencial em Fluxos Bidimensionais

A função de corrente é uma função que satisfaz a lei da conservação da massa para fluxos incompressíveis. Ela é obtida no caso apenas de fluxos bidimensionais. Partindo da equação da continuidade,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} = 0, \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\rho u_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(\rho u_3)}{\partial x_3} = 0. \quad (3.29)$$

Inicialmente eliminamos o termo local, o qual é uma aplicação não realista da função de corrente. A seguir, reduzimos a equação da continuidade a dois termos.

$$\frac{\partial(u_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(u_2)}{\partial x_2} = 0. \quad (3.30)$$

Essa equação é satisfeita se definirmos uma função $\psi(x_1, x_2)$, de forma que:

$$u_1 = \frac{\partial\psi(x_1, x_2)}{\partial x_2} \quad (3.31)$$

$$u_2 = -\frac{\partial\psi(x_1, x_2)}{\partial x_1}, \quad (3.32)$$

de forma que,

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial\psi(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(-\frac{\partial\psi(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right) = 0. \quad (3.33)$$

3.5.1 Interpretação Geométrica de ψ

A definição de linhas de corrente vem da equação,

$$\frac{dx_1}{u_1} = \frac{dx_2}{u_2}, \quad (3.34)$$

$$u_1 dx_2 - u_2 dx_1 = 0. \quad (3.35)$$

Em termos da função de corrente,

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial\psi}{\partial x_2} dx_2 = 0 = d\psi \quad (3.36)$$

A equação 3.23 mostra que a variação de ψ ao longo de uma linha de corrente é zero. Dessa forma, tendo encontrado uma dada função $\psi(x_1, x_2)$, podemos traçar linhas com ψ constante, e resolver o padrão de linhas de corrente para o fluxo.

3.5.2 Interpretação Física de ψ

O fluxo volumétrico Q através de um elemento $d\vec{A}$ de uma superfície de controle com profundidade unitária é (figura 3.3):

$$dQ = (\vec{u} \cdot \hat{n})dA = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_2} \hat{i} - \frac{\partial\psi}{\partial x_1} \hat{j} \right) \cdot \left(\frac{dx_2}{ds} \hat{i} - \frac{dx_1}{ds} \hat{j} \right) dA \quad (3.37)$$

$$dQ = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_2} \frac{dx_2}{ds} - \frac{\partial\psi}{\partial x_1} \frac{dx_1}{ds} \right) \underbrace{dA}_{dA=1ds} \quad (3.38)$$

$$dQ = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_2} \frac{dx_2}{ds} - \frac{\partial\psi}{\partial x_1} \frac{dx_1}{ds} \right) ds \quad (3.39)$$

$$dQ = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_2} dx_2 - \frac{\partial\psi}{\partial x_1} dx_1 \right) = d\psi \quad (3.40)$$

A variação de ψ é igual ao fluxo volumétrico ao longo do elemento. Além disso, a direção do fluxo pode ser determinada observando se ψ aumenta ou diminui. Conforme esboçado na figura

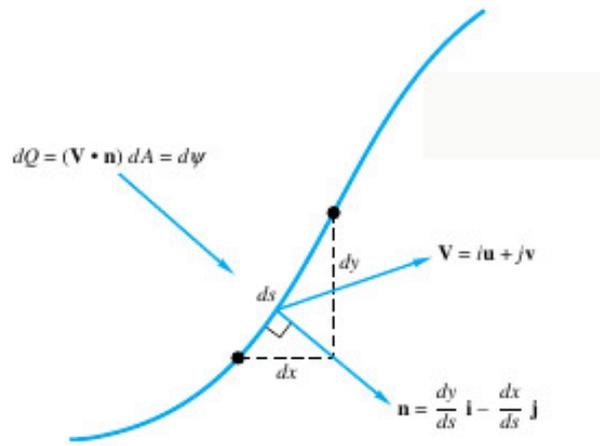


Figura 3.4: Interpretação física função ψ : fluxo de volume através de uma porção diferencial de um superfície de controle unitária com respeito a profundidade.

3.4, o fluxo é para a direita se ψ_2 for maior que ψ_1 , como na figura 3.4.(a); caso contrário, o fluxo é para a esquerda. Tanto a função de corrente, bem como a velocidade potencial foram descritas pelo matemático francês Joseph Louis Lagrange, publicadas em seu tratado sobre mecânica de fluidos em 1781.

$$Q = \int_1^2 (\vec{u} \cdot \vec{n}) dA = \int_1^2 d\psi = \psi_2 - \psi_1 \tag{3.41}$$

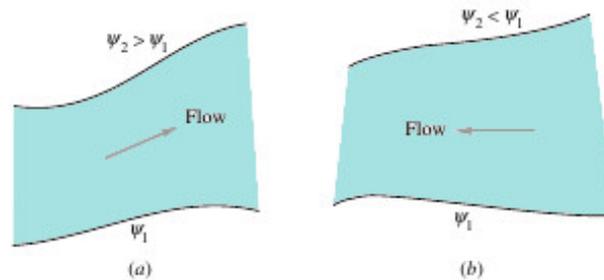


Figura 3.5: Convenção de sinais o fluxo em termos da mudança na função do fluxo: (a) flui para a direita se ψ_2 é maior; (b) flui para a esquerda se ψ_1 for maior.

3.5.3 Fluxo Bidimensional Compressível

Neste caso, a equação da continuidade é apresentada como:

$$\frac{\partial(\rho u_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\rho u_2)}{\partial x_2} = 0, \tag{3.42}$$

com função de corrente definida a partir de

$$\rho u_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \tag{3.43}$$

$$\rho u_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}. \tag{3.44}$$

Normalmente, linhas com ψ constante são linhas de fluxo, entretanto, a variação de ψ é igual ao fluxo de massa e não ao fluxo volumétrico.

$$dm = \rho(\vec{u} \cdot \hat{n})dA = d\psi \quad (3.45)$$

$$m_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 \rho(\vec{u} \cdot \hat{n})dA = \psi_2 - \psi_1 \quad (3.46)$$

3.5.4 Fluxo Bidimensional Incompressível em Coordenadas Plano Polares

Suponha que as coordenadas de interesse sejam r e θ , com $u_3 = 0$, e densidade constante. A equação da continuidade fica reduzida a:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad (3.47)$$

A equação equivalente em coordenadas cartesianas é:

$$\frac{\partial(u_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(u_2)}{\partial x_2} = 0.$$

Da definição de ψ ,

$$u_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \quad (3.48)$$

$$u_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}. \quad (3.49)$$

Em coordenadas plano polares,

$$u_1 = \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (3.50)$$

$$u_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad (3.51)$$

de forma que a equação da continuidade em coordenadas cartesianas pode ser reescrita como segue:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = 0, \quad (3.52)$$

sendo

$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad (3.53)$$

$$u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (3.54)$$

Mais uma vez, as linhas com ϕ constante são linhas de corrente, e a variação é o fluxo de volume $Q_{1 \rightarrow 2} = \phi_2 - \phi_1$. A convenção de sinais é a mesma da figura 3.4.

3.5.5 Velocidade Potencial

A irrotacionalidade dá origem a uma função escalar ϕ similar ou complementar a função de corrente ψ . Do cálculo vetorial, um vetor que tem um rotacional zero pode ser escrito como o gradiente de uma função escalar. Portanto, dado um vetor \vec{u} , se

$$\nabla \times \vec{u} = 0, \quad (3.55)$$

$$\vec{u} = \nabla \phi. \quad (3.56)$$

ϕ é uma função de (x_1, x_2, x_3, t) , sendo denominada de velocidade potencial. O conhecimento de ϕ permite a imediata determinação das componentes da velocidade.

$$u_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \quad (3.57)$$

$$u_2 = \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \quad (3.58)$$

Em coordenadas plano polares,

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (3.59)$$

$$u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \quad (3.60)$$

Linhas onde ϕ é constante são chamadas de linhas potenciais de fluxo. Para um fluxo irrotacional, descrito por apenas duas componentes, tanto ψ como ϕ ambas existem, e a função de corrente e potencial são mutuamente perpendiculares, exceto em pontos de estagnação, onde $u_1 = u_2 = u_3 = 0$. Uma linha onde ϕ é constante apresenta $d\phi = 0$.

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} dx_2 = 0 \quad (3.61)$$

Da mesma forma para ψ ,

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} dx_2 = 0 \quad (3.62)$$

$$u_1 dx_1 + u_2 dx_2 = 0 \quad (3.63)$$

$$\left(\frac{dx_2}{dx_1} \right)_{\phi=cte} = - \frac{\frac{\partial \phi}{\partial x_1}}{\frac{\partial \phi}{\partial x_2}} = - \frac{u_1}{u_2} = - \frac{\frac{\partial \psi}{\partial x_2}}{-\frac{\partial \psi}{\partial x_1}} = - \frac{u_2}{u_1} = - \frac{1}{\left(\frac{dx_2}{dx_1} \right)_{\psi=cte}} \quad (3.64)$$

A equação anterior é a condição de ortogonalidade entre ψ e ϕ .

3.6 Casos particulares

3.6.1 Campo de Velocidade Uniforme I

Um campo de velocidade uniforme ao longo da direção x_1 , $\vec{u} = u_1 \hat{i}$, possui definidas a função de corrente e a velocidade potencial. As relações são apresentadas a seguir:

$$u_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad (3.65)$$

$$u_2 = \frac{\partial \phi}{\partial x_2} = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}. \quad (3.66)$$

A velocidade potencial e a função de corrente são obtidas a partir das equações 4.52 e 4.53.

$$\partial \phi = u_1 \partial x_1 \quad (3.67)$$

$$\int \partial \phi = \int u_1 \partial x_1 \quad (3.68)$$

$$\phi = (u_1 x_1) + C \quad (3.69)$$

$$\partial \psi = u_1 \partial x_2 \quad (3.70)$$

$$\int \partial \psi = \int u_1 \partial x_2 \quad (3.71)$$

$$\psi = (u_1 x_2) + k \quad (3.72)$$

Nas equações 4.56 e 4.59, x_1 e x_2 são constantes.

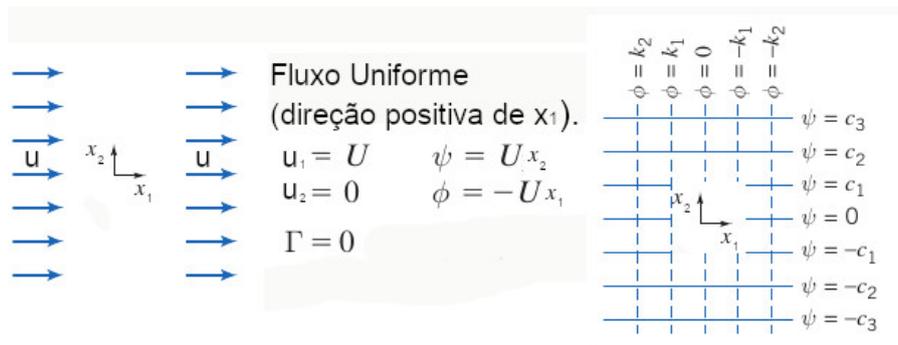


Figura 3.6: Fluxo uniforme.

3.6.2 Fonte ou Sorvedouro na Origem I

Uma fonte é um modelo de fluxo no plano- x_1x_2 , em que o fluxo é radial e para fora do eixo x_3 , e simétrico em todas as direções (figura 3.6). A intensidade Q da fonte é o fluxo volumétrica por unidade de profundidade. Para qualquer raio r de uma fonte, a velocidade tangencial u_θ é zero; a velocidade radial u_r é o fluxo volumétrica por unidade de profundidade Q dividida pela área de fluxo por unidade de profundidade $2\pi r$. Portanto, $u_r = Q/2\pi r$ para uma fonte. Conhecendo u_r e u_θ obtemos diretamente ψ e ϕ respectivamente.

Em um sorvedouro, o fluxo é radialmente para dentro; um sorvedouro é uma fonte negativa. As funções ψ e ϕ são as funções negativas correspondentes a um fluxo fonte. A origem tanto da fonte quanto do sorvedouro é um ponto singular, visto que a velocidade radial se aproxima do infinito conforme o raio se aproxima de zero. Portanto, embora um fluxo real possa se assemelhar a uma fonte ou sorvedouro para alguns valores de r , as fontes e sorvedouros não possuem homólogos fisicamente exatos. O principal valor do conceito de fontes e sorvedouros é que, quando combinados com outros fluxos, produzem modelos que representam adequadamente fluxos reais.

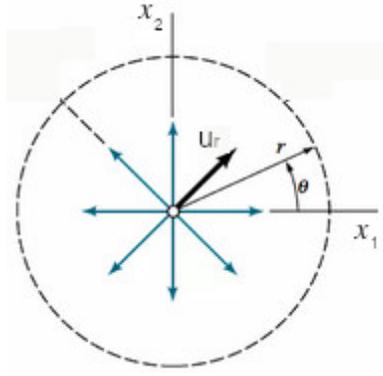


Figura 3.7: Apenas a componente radial da velocidade é não nula.

A relação entre as componentes da velocidade, ψ e ϕ são expressas na forma a seguir.

$$u_r = \frac{Q}{2\pi r} = \frac{m}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (3.73)$$

$$u_\theta = 0 = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \quad (3.74)$$

Resolvendo para ψ e ϕ ,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{m}{r}, \quad (3.75)$$

$$\partial \psi = m \partial \theta, \quad (3.76)$$

$$\psi = (m\theta) + C, \quad (3.77)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{m}{r}, \quad (3.78)$$

$$\partial \phi = \frac{m}{r} \partial r, \quad (3.79)$$

$$\phi = m \ln(r) + k. \quad (3.80)$$

Nas equações anteriores, $m = Q/2\pi$.

3.6.3 Linha de Vórtice I

Um modelo de fluxo em que as linhas de corrente são círculos concêntricos é um vórtice; em um vórtice livre (irrotacional), as partículas fluidas não giram enquanto transladam em uma trajetória circular em torno do centro do vórtice. As funções de corrente representam linhas circulares, onde $u_\theta = f(r)$ somente, e $u_r = 0$. Neste caso, o rotacional de $u_\theta(r)$ é zero, e $u_\theta = K/r$, sendo K uma constante denominada força de vórtice.

$$u_r = 0 = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (3.81)$$

$$u_\theta = K/2\pi r = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \quad (3.82)$$

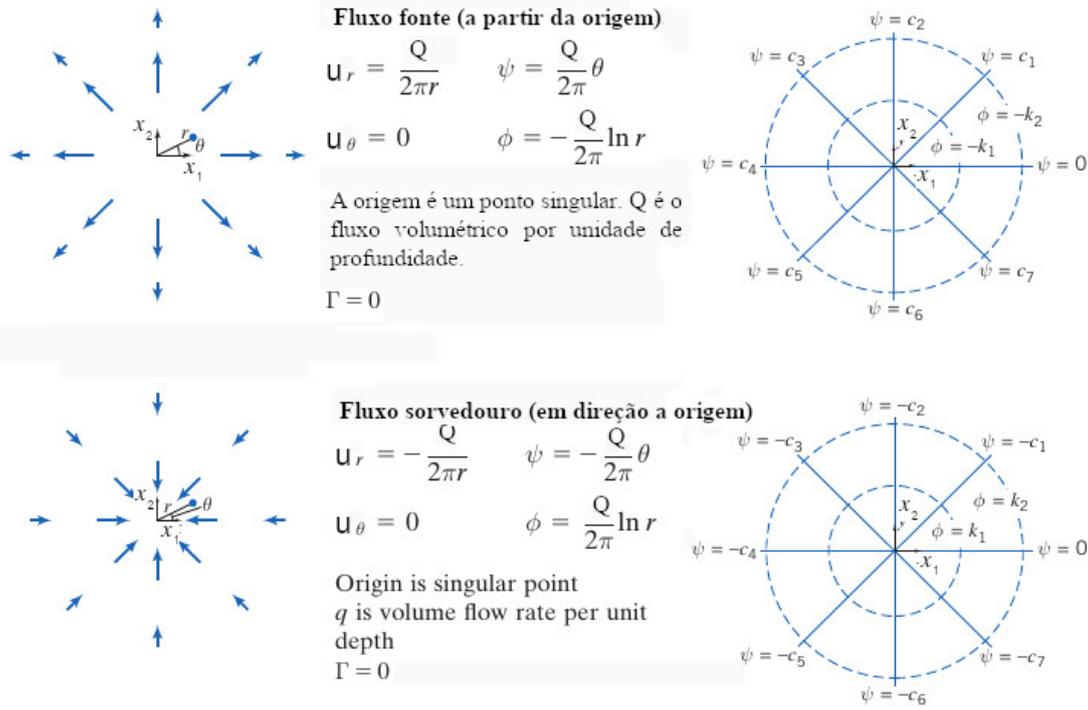


Figura 3.8: Fonte ou sorvedouro.

$$-\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{K}{r} \tag{3.83}$$

$$\partial \psi = -\frac{K}{2\pi} \frac{\partial r}{r} \tag{3.84}$$

$$\psi = -\frac{K}{2\pi} \ln(r) + C \tag{3.85}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{K}{2\pi r} \tag{3.86}$$

$$\partial \phi = K \partial \theta \tag{3.87}$$

$$\phi = \frac{K}{2\pi} \theta + k \tag{3.88}$$

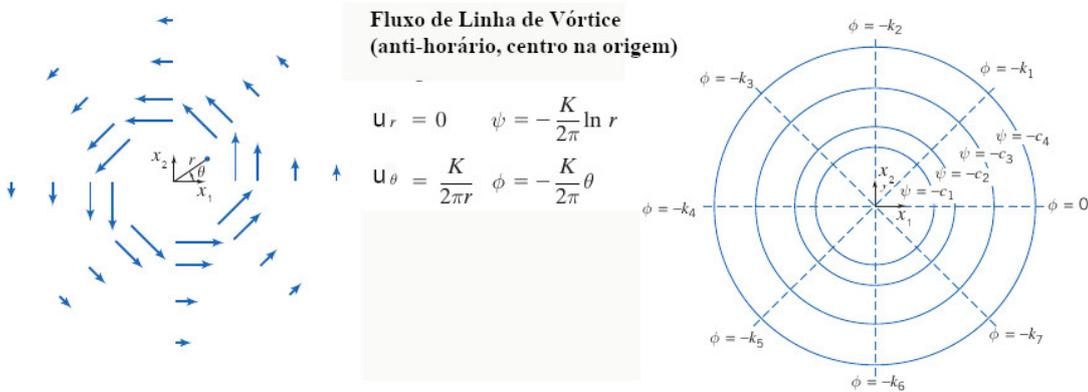


Figura 3.9: Fluxo de linha de vórtice.

A intensidade K do vórtice é definida como $K = 2\pi r u_\theta$; as dimensões de K são L^2/t (vazão volumétrica por unidade de profundidade). Mais uma vez, conhecendo u_r e u_θ se obtém ψ e ϕ

respectivamente. O vórtice irrotacional é uma aproximação razoável para o campo de fluxo em um tornado (exceto na região da origem; a origem é um ponto singular).

3.7 Relações de Cauchy-Riemann

Neste seção, z denotará uma variável complexa

$$z \equiv x_1 + ix_2 = re^{i\theta}, \quad (3.89)$$

onde $i = \sqrt{-1}$, (x_1, x_2) são coordenadas cartesianas, e, (r, θ) são coordenadas polares. Na forma complexa, o número complexo z representa um ponto no plano- x_1x_2 cujo eixo real é x_1 e o eixo imaginário é x_2 (9). Na forma polar, z representa vetor posição Ox_3 , cuja magnitude é $r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$ e cujo ângulo com o eixo x_1 é $\tan^{-1}(x_2/x_1)$.

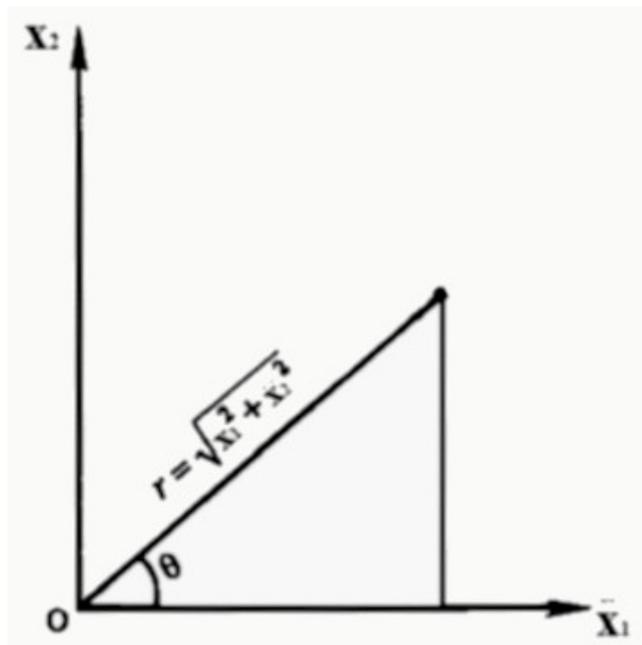


Figura 3.10: Plano complexo z .

O produto de dois números complexos z_1 e z_2 é

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}. \quad (3.90)$$

Portanto, o processo de multiplicar um número complexo z_1 por outro número complexo z_2 pode ser considerado como uma operação que leva a magnitude de r_1 para $r_1 r_2$ e aumenta o argumento de θ_1 para $\theta_1 + \theta_2$. Quando x_1 e x_2 são consideradas variáveis, a quantidade complexa $z = x_1 + ix_2$ é chamada de variável complexa. Suponha que definimos outra variável complexa w cujas partes real e imaginária sejam ψ e ϕ :

$$w \equiv \phi + i\psi. \quad (3.91)$$

Se ϕ e ψ são funções de x_1 e x_2 , então w também é. Da teoria de variáveis complexas é demonstrado que w é uma função da combinação $x_1 + ix_2 = z$, e em particular tem derivada única e finita dw/dz quando suas partes reais e imaginárias satisfazem o par de relações,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_1} = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad (3.92)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_2} = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \quad (3.93)$$

conhecidas como relações de *Cauchy-Riemann*. Aqui, a derivada dw/dz é única se o valor de $\delta w/\delta z$ não depender da orientação do diferencial δz à medida que se aproxima de zero. Uma função de valor único $w = f(z)$ é chamado de função analítica da variável complexa z em uma região se a derivada finita dw/dz existe em todos os pontos da região. Pontos onde w ou dw/dz são zero ou infinitos são chamados de singularidades, onde ϕ e ψ não são ortogonais. Por exemplo, $w = \text{Ln}(z)$ e $w = 1/z$ são analíticos em todos os lugares, exceto em um ponto singular $z = 0$, onde as relações de Cauchy-Riemann não são satisfeitas.

3.8 Potenciais Complexos

A combinação $w = \phi + i\psi$ é chamada de potencial complexo para um fluxo. Visto que a função de corrente e a velocidade potencial satisfazem as relações de Cauchy-Riemann, e que a parte real e a parte imaginária de qualquer função $w(z) = \phi + i\psi$ também satisfazem as mesmas relações, segue que qualquer função analítica de z representa um potencial complexo de um fluxo bidimensional. A derivada dw/dz é uma importante quantidade na descrição de fluxos irrotacionais. Por definição,

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\delta z \rightarrow 0} \frac{\delta w}{\delta z}. \quad (3.94)$$

Como a derivada é independente da orientação de δz no plano- x_1x_2 , nos podemos assumir δz paralelo ao eixo x_1 , levando a:

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\delta z \rightarrow 0} \frac{\delta w}{\delta z} = \frac{\partial w}{\partial x_1} = \frac{\partial(\phi + i\psi)}{\partial x_1}, \quad (3.95)$$

o que leva a

$$\frac{dw}{dz} = u_1 - iu_2. \quad (3.96)$$

É fácil mostrar que tomando δz paralelo ao eixo x_2 obtemos o mesmo resultado. A derivada dw/dz é, portanto, uma quantidade complexa cujas partes reais e imaginárias representam as componentes cartesianas da velocidade local; dw/dz é, portanto, chamado de velocidade complexa. Em princípio, qualquer fluxo potencial pode ser resolvido pelo método da transformação conforme, usando-se variáveis complexas.

3.8.1 Campo de Velocidade Uniforme II

Se o vetor velocidade local tiver um módulo r um ângulo α com respeito ao eixo x , então

$$\frac{dw}{dz} = re^{-i\alpha} = r \cos \alpha - ir \sin \alpha \quad (3.97)$$

3.8.2 Fonte ou Sorvedouro na Origem II

Considere o potencial complexo

$$w = \frac{Q}{2\pi} \text{Ln } z = \frac{Q}{2\pi} \text{Ln}(re^{i\theta}). \quad (3.98)$$

$$w = \frac{Q}{2\pi} \text{Ln}(re^{i\theta}) = \frac{Q}{2\pi} \text{Ln}(r) + \frac{Q}{2\pi} \text{Ln}(e^{i\theta}), \quad (3.99)$$

$$w = \frac{Q}{2\pi} \text{Ln}(r) + i \frac{Q}{2\pi} \theta. \quad (3.100)$$

As componentes real e imaginária são:

$$\phi = \frac{Q}{2\pi} \text{Ln}(r), \quad (3.101)$$

$$\psi = \frac{Q}{2\pi} \theta = m\theta, \quad \text{com } m = \frac{Q}{2\pi}. \quad (3.102)$$

As componentes da velocidade são:

$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{Q}{2\pi r}, \quad (3.103)$$

$$u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0. \quad (3.104)$$

3.8.3 Linha de Vórtice II

Considere o potencial complexo

$$w = \frac{iK}{2\pi} \text{Ln } z, \quad (3.105)$$

o qual representa uma linha de vórtice com circulação $\Gamma = K$, no sentido anti-horário. As componentes real e imaginária são:

$$\psi = -\frac{K}{2\pi} \ln r, \quad (3.106)$$

$$\phi = \frac{K}{2\pi} \theta, \quad (3.107)$$

com as componentes da velocidade dadas por

$$u_r = 0, \quad (3.108)$$

$$u_\theta = \frac{K}{2\pi r}. \quad (3.109)$$

3.9 Lista de Problemas

1. Converta do sistema de coordenadas retangulares para plano polares as seguintes funções e coordenadas:

(a) $x_1 + x_2 = 0$

(b) $x_1^2 + x_2^2 = c$

(c) $3x_1 + (3/x_2) = 0$

(d) (x, y)

(e) $(3, 4)$

(f) $\vec{u} = \frac{1}{x \text{den}} + \frac{1}{y}$

(g) $\vec{u} = \frac{1}{x \text{den}} + \frac{x}{y}$

(h) $\vec{u} = y^2 + x^2$

2. Um fluxo idealizado incompressível tem a distribuição tridimensional de velocidade proposta

$$\vec{u} = 4x_1x_2^2\hat{e}_1 + f(x_2)\hat{e}_2 - x_3x_2^2\hat{e}_3. \quad (3.110)$$

Encontre a forma apropriada da função $f(y)$ que satisfaz a relação da continuidade.

3. Após descartar quaisquer constantes de integração, determine o valor apropriado das velocidades desconhecidas u_1 ou u_2 que satisfaçam a equação da continuidade incompressível bidimensional para:

(a) $u_1 = x_1^2x_2$;

(b) $u_2 = x_1^2x_2$;

(c) $u_1 = x_1^2 - x_1x_2$;

(d) $u_2 = x_2^2 - x_1x_2$;

4. Um campo de velocidade bidimensional é dado por:

$$u_1 = -\frac{Kx_2}{x_1^2 + x_2^2}$$

$$u_2 = \frac{Kx_1}{x_1^2 + x_2^2}$$

em que K é constante. Esse campo satisfaz a continuidade incompressível? Transforme essas velocidades em componentes polares u_r e u_θ .

5. Considere a distribuição de velocidade em coordenadas plano polares,

$$u_r = \frac{C}{r}, \quad u_\theta = \frac{K}{r}, \quad u_3 = 0$$

em que C e K são constantes. (a) Determine se a equação da continuidade é satisfeita. (b) Fazendo o esboço de algumas direções do vetor velocidade, faça um gráfico de uma única linha de corrente para $C = K$.

6. Um campo de fluxo incompressível tem as componentes em coordenadas cilíndricas $u_\theta = Cr$, $u_3 = K(R^2 - r^2)$, $u_r = 0$ em que C e K são constantes e $r \leq R$, $x_3 \leq L$. Esse fluxo satisfaz a continuidade?

7. Um fluxo incompressível em coordenadas polares é dado

$$u_r = K \cos \theta \left(1 - \frac{b}{r^3} \right)$$

$$u_\theta = -K \sin \theta \left(1 + \frac{b}{r^3} \right)$$

Esse campo satisfaz a continuidade? Para a consistência, quais devem ser as dimensões das constantes K e b ? Faça um esboço da superfície em que $u_r = 0$ e interprete.

8. Considere o seguinte fluxo incompressível bidimensional, que claramente satisfaz a continuidade: $u_1 = U_0 = \text{constante}$, $u_2 = V_0 = \text{constante}$. Encontre a função corrente $\psi(r, \theta)$ para esse fluxo usando coordenadas polares.

9. Investigue a função corrente $\psi = K(x_1^2 - x_2^2)$, com $K = \text{constante}$. Trace o gráfico de algumas linhas de corrente no plano x_1x_2 completo, determine quaisquer pontos de estagnação.
10. Investigue a função corrente em coordenadas polares $\psi = Kr^{\frac{1}{2}} \text{sen } \frac{1}{2}\theta$, com $K = \text{constante}$. Trace o gráfico de algumas linhas de corrente no plano x_1x_2 completo, determine quaisquer pontos de estagnação e interprete.
11. Para o campo de velocidades

$$u_1 = U_0 \left(1 + \frac{x_1}{L} \right)$$

$$u_2 = -U_0 \frac{x_2}{L}$$

$$u_3 = 0$$

determine se existe uma função corrente e, se existir, encontre uma expressão para $\psi(x_1, x_2)$ e faça o esboço da linha de corrente que passa pelo ponto $(x_1, x_2) = (L/2, L/2)$.

12. Investigue o potencial de velocidade $\phi = Kx_1x_2$, $K = \text{constante}$. Faça um esboço das linhas equipotenciais no plano x_1x_2 completo, encontre quaisquer pontos de estagnação e faça um esboço aproximado das linhas de corrente ortogonais.
13. Um campo de fluxo incompressível bidimensional é definido pelos componentes de velocidade

$$u_1 = 2V \left(\frac{x_1}{L} - \frac{x_2}{L} \right)$$

$$u_2 = -2V \frac{x_2}{L}$$

em que V e L são constantes. Se elas existem, encontre a função corrente e o potencial de velocidade.

14. Encontre o potencial de velocidade bidimensional $\phi(r, \theta)$ para o padrão de fluxo em coordenadas polares $u_r = Q/r$, $u_\theta = K/r$, em que Q e K são constantes.

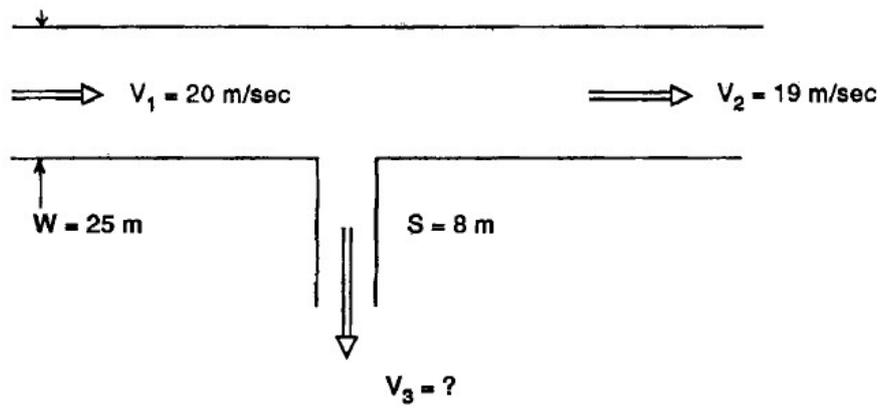
15. Um fluxo incompressível bidimensional é definido por

$$u_1 = -\frac{Kx_2}{x_1^2 + x_2^2}$$

$$u_2 = \frac{Kx_1}{x_1^2 + x_2^2}$$

em que K é constante. Esse fluxo é irrotacional? Em caso afirmativo, encontre seu potencial de velocidade, faça um esboço de algumas linhas equipotenciais e interprete o padrão de fluxo.

16. Problema de aplicação: O vento está soprando na rua principal com fluxo de um lado rua, como mostra a figura. Qual é uma estimativa da velocidade no lado da rua mostrado? Assuma fluxo 2-D e densidade constante.



Capítulo 4

Fluidos Ideais

4.1 Equação de Euler

Partindo da segunda Lei de Newton, a qual diz que a soma de todas as forças agindo sobre uma partícula de fluido com volume dV é igual a taxa de variação do seu momento linear. Desde que $D\vec{u}/Dt$ é a aceleração da partícula a equação de Newton fica:

$$\int_V \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} dV = \int_S -p\vec{n}dA + \int_V \rho\vec{g}dV. \quad (4.1)$$

Aplicado o teorema da divergência,

$$\int_V \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} dV = \int_V -\nabla p dV + \int_V \rho\vec{g} dV, \quad (4.2)$$

$$\int_V \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} dV = \int_V (-\nabla p + \rho\vec{g})dV. \quad (4.3)$$

No limite onde $dv \rightarrow 0$,

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho\vec{g} \quad (4.4)$$

A equação anterior é conhecida como equação de Euler e governa o momento linear de uma partícula de fluido. A mesma não considera efeitos de viscosidade, para os quais, o termo $\mu\nabla^2\vec{u}$ deve ser adicionado.

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho\vec{g} + \mu\nabla^2\vec{u} \quad (4.5)$$

4.2 Teorema de Transporte de Reynolds

Tem por finalidade converter a análise de sistema infinitesimal em uma análise sobre um volume de controle. Essa transformação, chamada de teorema de transporte de Reynolds, pode ser aplicada a todas as leis básicas de conservação. Relaciona a derivada temporal de uma grandeza extensiva do sistema infinitesimal à taxa de variação da mesma grandeza no interior de uma certa região conhecida como volume de controle. A fórmula de conversão desejada difere ligeiramente, caso o volume de controle seja fixo, móvel ou se deforme.

O volume de controle fixo da figura 4.1(a), engloba uma região estacionária de interesse para o fluxo através de um bocal. O mesmo volume é envolvido por uma superfície de controle, a qual é um conceito abstrato e não interfere no fluxo de modo algum.

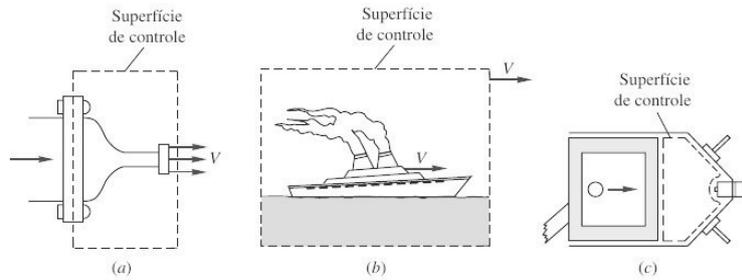


Figura 4.1: Volumes de controle fixo, em movimento e deformável: (a) volume de controle fixo, para análise de esforços em bocais; (b) volume de controle em movimento, para análise da força de arrasto; (c) volume de controle deformável no interior de um cilindro, para análise da variação transiente de pressão.

A figura 4.1(b) ilustra um volume de controle móvel. Nesse caso, o interesse está no navio, não no oceano, de forma que a superfície de controle persegue o navio com velocidade V . O volume de controle é constante, mas o movimento relativo entre a água e o navio deve ser considerado. Se V é constante, esse movimento relativo assume um padrão de fluxo estável, o que simplifica a análise. Se V é variável, o movimento relativo é não estável, de modo que os resultados variam com o tempo.

A figura 4.1(c) mostra um volume de controle que se deforma. O movimento relativo nas fronteiras torna-se um fator importante, e a taxa de variação da forma do volume de controle entra na análise.

4.2.1 Teorema de Transporte de Reynolds para um Volume Fixo Arbitrário

A Figura 4.2 mostra um volume de controle fixo generalizado sendo atravessado por um fluxo padrão arbitrário. Há fluxo variável na entrada e na saída, ao longo da superfície de controle. Em geral, em cada elemento de área dA da superfície haverá uma velocidade \vec{V} diferente, formando um ângulo θ diferente com a normal local $\hat{n}dA$. Assim, em determinadas áreas elementares, haverá fluxo volumétrico ¹ de entrada, $(V A \cos \theta dt)_{entrada}$, e em outras haverá fluxo de volume de saída, $(V A \cos \theta dt)_{saida}$, conforme a figura 4.2. Algumas áreas poderão corresponder a linhas de corrente ($\theta = 90^\circ$) ou a paredes sólidas ($V = 0$), sem fluxo de entrada ou de saída.

Seja B uma propriedade qualquer do fluido (energia, momento linear etc.), e seja $\beta = dB/dm$ a grandeza intensiva correspondente, definida pela quantidade de B por unidade de massa em qualquer porção pequena do fluido, a quantidade total de B no volume de controle (a curva sólida na figura 4.2) será:

$$B_{VC} = \int_{VC} \beta dm = \int_{VC} \beta \rho d\mathcal{V} \quad (4.9)$$

¹Fluxo volumétrico ou de volume através de uma superfície dA é,

$$d\mathcal{V} = (\vec{V} \cdot \hat{n})dA dt \quad (4.6)$$

$$\frac{d\mathcal{V}}{dt} = (\vec{V} \cdot \hat{n})dA \quad (4.7)$$

$$\frac{d\mathcal{V}}{dt} = Q = \int (\vec{V} \cdot \hat{n})dA \quad (4.8)$$

Se $(\vec{V} \cdot \hat{n}) > 0$, o fluxo é para fora da superfície, caso contrário, o fluxo é para dentro da mesma.

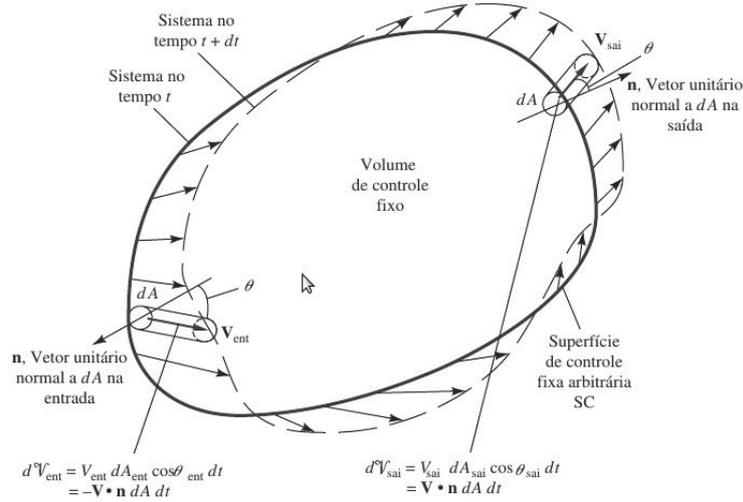


Figura 4.2: Volumes de controle fixo, em movimento e deformável: (a) volume de controle fixo, para análise de esforços em bocal; (b) volume de controle em movimento na velocidade de um navio, para análise de força de arrasto; (c) volume de controle deformável no interior de um cilindro, para análise da variação transiente de pressão.

A grandeza B na figura 4.2 possui três fontes de variação:

- Variação no volume de controle;

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{VC} \beta \rho d\mathcal{V} \right) \quad (4.10)$$

- Fluxo de saída de β no volume de controle;

$$\int_{SC} \beta \rho V \cos(\theta) dA_{sai} \quad (4.11)$$

- Fluxo de entrada de β no volume de controle;

$$- \int_{SC} \beta \rho V \cos(\theta) dA_{entrada} \quad (4.12)$$

Observe, na figura, que o sistema se moveu um pouco, ganhando uma porção no fluxo na saída e perdendo uma porção no fluxo na entrada. No limite quando $dt \rightarrow 0$, a variação instantânea de B no sistema é a soma de sua variação no interior do VC com o fluxo líquido de B através da superfície de controle:

$$\frac{d}{dt}(B_{sis}) = \frac{d}{dt} \left(\int_{VC} \beta \rho d\mathcal{V} \right) + \int_{SC} \beta \rho V \cos(\theta) dA_{sada} - \int_{SC} \beta \rho V \cos(\theta) dA_{entrada} \quad (4.13)$$

A equação 4.13 é o teorema de transporte de Reynolds. A quantidade B (ou β) pode ser qualquer grandeza vetorial ou escalar do fluido. Duas formas alternativas são possíveis para os termos de fluxo. Primeiro, podemos notar que $V \cos(\theta)$ é a componente de \mathcal{V} normal ao elemento de área da superfície de controle. Logo, podemos escrever

$$\text{Termos de Fluxo} = \int_{SC} \beta \rho V_n dA_{sada} - \int_{SC} \beta \rho V_n dA_{entrada} = \int_{SC} \beta d\dot{m}_{sada} - \int_{SC} \beta d\dot{m}_{entrada}, \quad (4.14)$$

em que $V_n = (\vec{V} \cdot \hat{n})$ e $d\dot{m} = \rho V_n dA$ representando o fluxo de massa através da superfície. De forma compacta, o teorema de Reynolds fica:

$$\frac{d}{dt}(B_{sis}) = \frac{d}{dt} \left(\int_{VC} \beta \rho d\mathcal{V} \right) + \int_{SC} \beta \rho (\vec{V} \cdot \hat{n}) dA. \quad (4.15)$$

O termo da derivada temporal para um volume de controle fixo, no qual, os elementos de volume $d\mathcal{V}$ não variam no tempo toma a forma

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{VC} \beta \rho d\mathcal{V} \right) = \int_{VC} \left(\frac{\partial}{\partial t} (\beta \rho) \right) d\mathcal{V}, \quad (4.16)$$

levando ao teorema de Reynolds, escrito na forma compacta como:

$$\frac{d}{dt}(B_{sis}) = \int_{VC} \frac{\partial}{\partial t} (\beta \rho) d\mathcal{V} + \int_{SC} \beta \rho (\vec{V} \cdot \hat{n}) dA. \quad (4.17)$$

4.2.2 Teorema de Transporte de Reynolds para um Volume de Controle em Movimento com Velocidade Constante

No caso onde o volume de controle se move com velocidade constante \vec{V}_s , a velocidade relativa do fluido para um observador no volume de controle será:

$$\vec{V}_r = \vec{V} - \vec{V}_s, \quad (4.18)$$

sendo V a velocidade do fluxo em relação ao mesmo referencial no qual o movimento V_s do volume de controle é observado. Note que a equação 4.18 representa uma subtração vetorial. Os termos de fluxo serão proporcionais a V_r , mas a integral de volume ficará inalterada, pois o volume de controle move-se com uma forma fixa, sem deformação. O teorema de Reynolds fica portanto como na equação a seguir.

$$\frac{d}{dt}(B_{sis}) = \frac{d}{dt} \left(\int_{VC} \beta \rho d\mathcal{V} \right) + \int_{SC} \beta \rho (\vec{V}_r \cdot \hat{n}) dA. \quad (4.19)$$

4.2.3 Teorema de Transporte de Reynolds para um Volume de Controle de Forma Constante mas Velocidade Variável

No caso onde o volume de controle possui velocidade $V_s(\vec{t})$, sem se deformar, os elementos de volume não se alteram com o tempo, mas a velocidade relativa $\vec{V}_r = \vec{V}(r, t) - \vec{V}_s(t)$ na fronteira torna-se uma função complicada, dificultando o cálculo das integrais de fluxo. A forma do teorema de Reynolds não se altera com respeito a equação 4.19.

4.2.4 Teorema de Transporte de Reynolds para Movimentos e Deformações Arbitrárias

Para um volume de controle que tanto se move quanto se deforma arbitrariamente (figura 4.3), o fluxo de volume através da superfície de controle é ainda proporcional ao componente normal da velocidade relativa, $(\vec{V}_r \cdot \hat{n})$. Por sua vez, a superfície de controle se deforma, sendo sua velocidade $\vec{V}_s = \vec{V}_s(r, t)$, de modo que a velocidade relativa, $\vec{V}_r = \vec{V}(r, t) - \vec{V}_s(r, t)$, pode ser uma função complicada, apesar da integral de fluxo ter a mesma forma que na equação 4.19. Entretanto, a integral de volume na mesma equação deve agora considerar a distorção dos elementos de volume com o tempo. Logo, a derivada temporal deve ser aplicada após a

integração. Assim, o teorema de transporte para um volume de controle deformável assume a forma:

$$\frac{d}{dt}(B_{sis}) = \frac{d}{dt} \left(\int_{VC} \beta \rho d\mathcal{V} \right) + \int_{SC} \beta \rho (\vec{V}_r \cdot \hat{n}) dA. \quad (4.20)$$

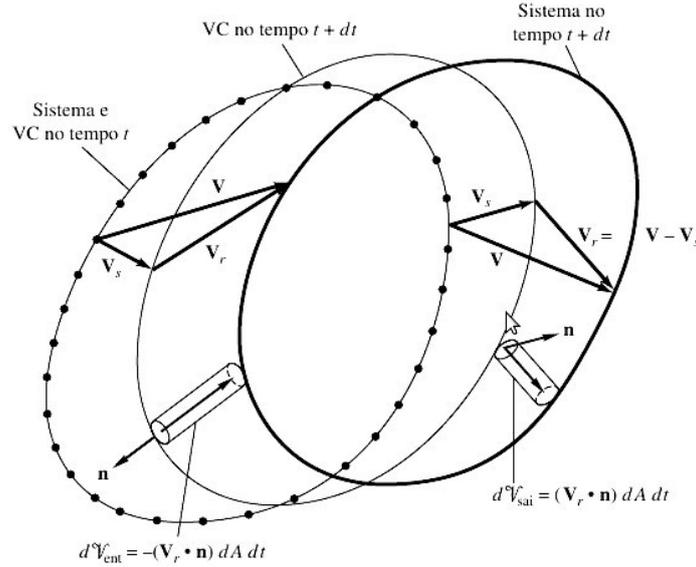


Figura 4.3: Efeitos da velocidade relativa entre um sistema e um volume de controle quando ambos se movem e se deformam. As fronteiras do sistema movem-se à velocidade \vec{V} , e a superfície de controle move-se à velocidade \vec{V}_s .

O volume de controle móvel e deformável, equação 4.20, deve considerar que a derivada temporal da primeira integral à direita deve ser efetuada do lado de fora e que a segunda integral envolve a velocidade relativa V_r entre o fluxo e a superfície de controle.

4.2.5 Aproximação unidimensional para termos de fluxo

Em certas situações, o fluxo que atravessa as fronteiras da superfície de controle apenas em certas regiões simplificadas, que são aproximadamente unidimensionais, isto é, as propriedades do fluxo são aproximadamente uniformes ao longo destas regiões de entrada ou de saída. Logo, os dois termos de integral de fluxo requeridos na equação 4.20 se reduzem a uma simples soma de termos com sinal positivo (saída) e termos com sinal negativo (entrada), dados por produtos das propriedades do fluxo nestas regiões.

Para um volume de controle onde tais regiões representam entradas e saídas unidimensionais, como na figura 4.4, o teorema de Reynolds assume a forma:

$$\frac{d}{dt}(B_{sis}) = \frac{d}{dt} \left(\int_{VC} \beta dm \right) + \sum_{sada} \beta \dot{m}|_{sada} - \sum_{entrada} \beta \dot{m}|_{entrada}, \quad (4.21)$$

em que $\dot{m}_i = \rho_i A_i V_i$.

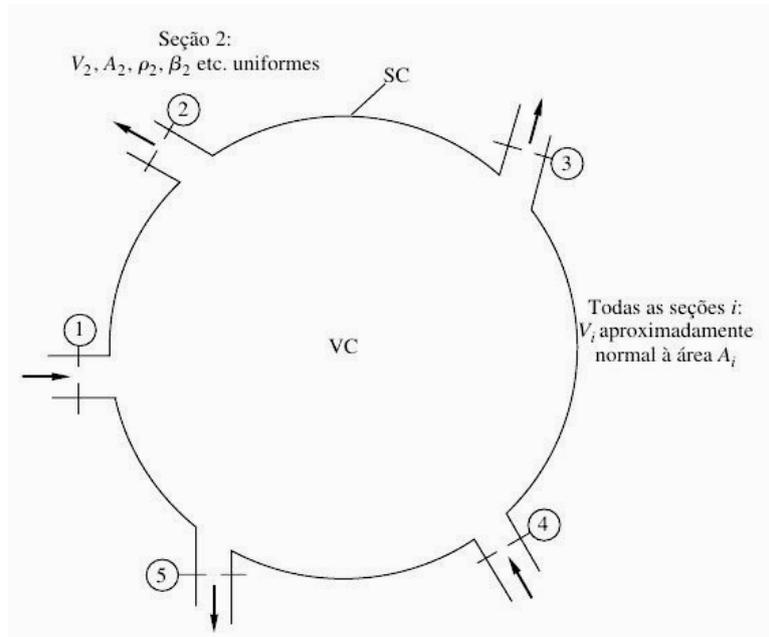


Figura 4.4: Volume de controle com entradas e saídas unidimensionais simplificadas.

Então, ainda com base na figura 4.4, com $\rho = \rho_1 = \dots = \rho_5$ e $A = A_1 = \dots = A_5$, expressamos o teorema como:

$$\frac{d}{dt}(B_{sis}) = \frac{d}{dt} \left(\int_{VC} \beta dm \right) + \beta_2(\rho AV)_2 + \beta_3(\rho AV)_3 + \beta_5(\rho AV)_5 - \beta_1(\rho AV)_1 - \beta_4(\rho AV)_4. \quad (4.22)$$

4.3 Equação do Momento Linear

A segunda lei de Newton ou equação do momento linear relaciona a força líquida sobre um sistema à taxa de variação do momento do sistema, medido em um referencial inercial.

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{u}}{dt} \quad (4.23)$$

De forma a escrevermos a equação de momento em termos do volume de controle fazemos $B = m\vec{u}$ e $\beta = d(m\vec{u})/dm = \vec{u}$. Agora aplicamos o teorema de Reynolds sobre o volume de controle, de forma que:

$$\sum \vec{F} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{VC} \vec{u} \rho d\mathcal{V} \right) + \sum (\dot{m}\vec{u})_{saida} - \sum (\dot{m}\vec{u})_{entrada}. \quad (4.24)$$

Fazendo $d\mathcal{V} \rightarrow 0$, reduzimos a integral sobre o volume de controle a forma,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{u} \rho d\mathcal{V}) \approx \frac{\partial}{\partial t} (\vec{u} \rho) dx_1 dx_2 dx_3. \quad (4.25)$$

Os fluxos de momento linear ocorrem nas seis faces, três entradas e três saídas, considerando uma partícula de fluido de forma cúbica. Uma tabela de fluxos de momento linear é apresentada a seguir para cada uma das faces.

Face	Fluxo de momento linear na entrada	Fluxo de momento linear na saída
x_1	$\rho u_1 \vec{u} dx_2 dx_3$	$[\rho u_1 \vec{u} + \frac{\partial}{\partial x_1}(\rho u_1 \vec{u}) dx_1] dx_2 dx_3$
x_2	$\rho u_2 \vec{u} dx_1 dx_3$	$[\rho u_2 \vec{u} + \frac{\partial}{\partial x_2}(\rho u_2 \vec{u}) dx_2] dx_1 dx_3$
x_3	$\rho u_3 \vec{u} dx_1 dx_2$	$[\rho u_3 \vec{u} + \frac{\partial}{\partial x_3}(\rho u_3 \vec{u}) dx_3] dx_1 dx_2$

Tabela 4.1: Tabela de fluxos de momento linear.

Levando estes termos e a condição 4.25 na equação 4.24 obtemos como resultado,

$$\sum \vec{F} = dx_1 dx_2 dx_3 \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{u}) + \frac{\partial}{\partial x_1}(\rho u_1 \vec{u}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\rho u_2 \vec{u}) + \frac{\partial}{\partial x_3}(\rho u_3 \vec{u}) \right] \quad (4.26)$$

Resolvendo os termos entre colchetes,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{u}) + \frac{\partial}{\partial x_1}(\rho u_1 \vec{u}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\rho u_2 \vec{u}) + \frac{\partial}{\partial x_3}(\rho u_3 \vec{u}) = \quad (4.27)$$

$$\vec{u} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \left(\rho u_1 \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_1} + \vec{u} \frac{\partial(\rho u_1)}{\partial x_1} \right) + \left(\rho u_2 \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_2} + \vec{u} \frac{\partial(\rho u_2)}{\partial x_2} \right) + \left(\rho u_3 \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_3} + \vec{u} \frac{\partial(\rho u_3)}{\partial x_3} \right) = \quad (4.28)$$

$$\vec{u} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\rho u_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(\rho u_3)}{\partial x_3} \right] + \rho \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_3} \right] \quad (4.29)$$

O primeiro termo a direita entre colchetes em 4.29 é a equação da continuidade (a qual se anula identicamente), enquanto que o segundo é a aceleração.

$$\sum \vec{F} = dx_1 dx_2 dx_3 \left\{ \vec{u} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\rho u_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(\rho u_3)}{\partial x_3} \right] + \rho \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_3} \right] \right\} \quad (4.30)$$

$$\sum \vec{F} = dx_1 dx_2 dx_3 \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} \quad (4.31)$$

A Equação 4.31, é a forma diferencial da equação de momento para uma partícula de fluido. A determinação da força, lado direito da equação 4.31, consistirá de duas contribuições; uma associada as forças de corpo (\vec{F}_b) e outra as forças de superfície (\vec{F}_s).

As forças de corpo agem igualmente em cada elemento da partícula de fluido. Esta força é representada por um vetor força por unidade de volume atuando no centro da partícula de fluido. Podemos citar como forças de corpo a força de gradiente de pressão ∇p e a força da gravidade ρg .

As forças de superfície decorrem das tensões sobre a superfície da partícula de fluido (figura 4.5). Essas tensões são a soma da pressão hidrostática e das tensões viscosas (σ_{ij}) que surgem do movimento com gradientes de velocidade. Assim, a expressão da força líquida por unidade de volume sobre a partícula de fluido pode ser escrita como:

$$\vec{F} = \rho \vec{F}_b + \vec{F}_s \quad (4.32)$$

As forças de superfície, \vec{F}_s decorrem das tensões sobre as faces da superfície de controle da partícula (figura 4.5). Essas tensões são a soma da pressão hidrostática mais as tensões viscosas σ_{ij} que surgem do movimento com gradientes de velocidade:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} -p + \sigma_{x_1x_1} & \sigma_{x_2x_1} & \sigma_{x_3x_1} \\ \sigma_{x_1x_2} & -p + \sigma_{x_2x_2} & \sigma_{x_3x_2} \\ \sigma_{x_1x_3} & \sigma_{x_2x_3} & -p + \sigma_{x_3x_3} \end{pmatrix}. \quad (4.33)$$

Não são essas tensões, mas seus gradientes, ou diferenças, que causam uma força líquida sobre a superfície da partícula infinitesimal. Isso pode ser visto na figura 4.5, que mostra apenas as tensões na direção x_1 .

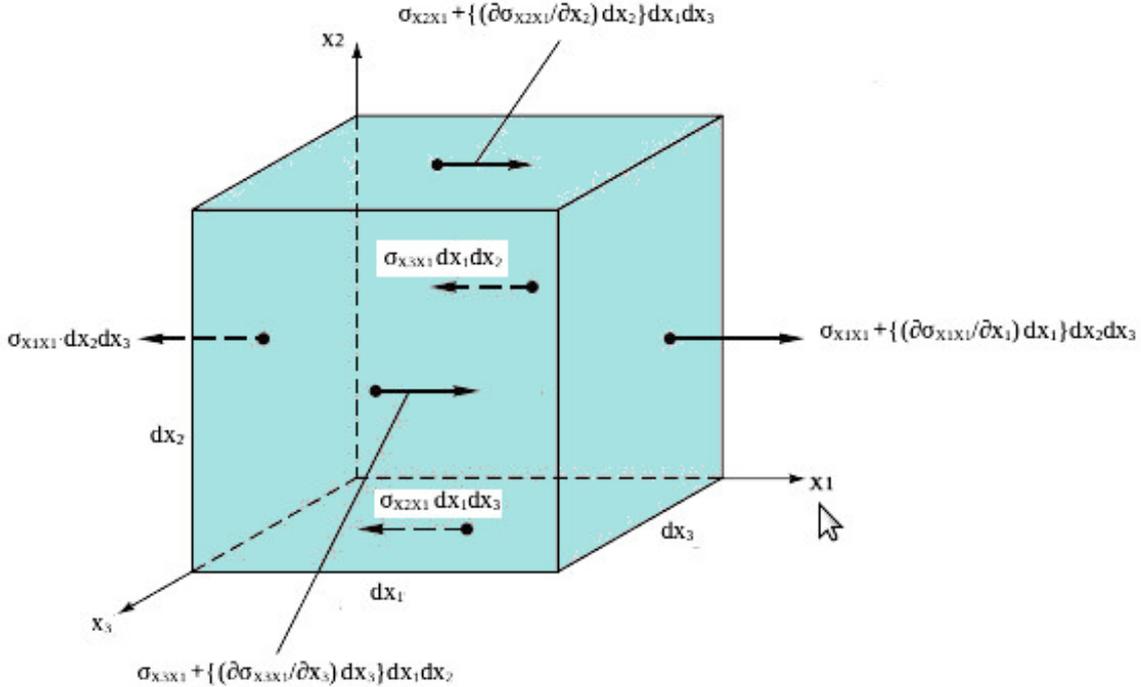


Figura 4.5: Partícula de fluido infinitesimal que apresenta as tensões viscosas ao longo da direção x_1 .

A força $(\sigma_{x_1x_1} dx_2 dx_3)$ para a esquerda sobre a face esquerda está equilibrada pela força $\sigma_{x_1x_1} dx_2 dx_3$ para a direita sobre a face direita, deixando apenas a força líquida para a direita $(\partial \sigma_{x_1x_1} / \partial x_1) dx_1 dx_2 dx_3$ sobre a face direita. A mesma coisa acontece nas demais faces, de modo que a força de superfície líquida na direção x_1 é

$$dF_{x_1, sup} = \left[\frac{\partial}{\partial x_1}(\sigma_{x_1x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\sigma_{x_2x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_3}(\sigma_{x_3x_1}) \right] dx_1 dx_2 dx_3. \quad (4.34)$$

A força é proporcional ao volume do elemento. Note que os termos de tensão são obtidos a partir da primeira linha da matriz 4.33. Adicionando a tensão decorrente da pressão as tensões viscosas, podemos reescrever a equação 4.34 como:

$$\frac{dF_{x_1, sup}}{dV} = \left[-\frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_1}(\sigma_{x_1x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\sigma_{x_2x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_3}(\sigma_{x_3x_1}) \right]. \quad (4.35)$$

Para as demais direções,

$$\frac{dF_{x_2, sup}}{dV} = \left[-\frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_1}(\sigma_{x_1x_2}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\sigma_{x_2x_2}) + \frac{\partial}{\partial x_3}(\sigma_{x_3x_2}) \right], \quad (4.36)$$

$$\frac{dF_{x_3, sup}}{dV} = \left[-\frac{\partial p}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_1}(\sigma_{x_1x_3}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\sigma_{x_2x_3}) + \frac{\partial}{\partial x_3}(\sigma_{x_3x_3}) \right]. \quad (4.37)$$

A equação para o vetor força líquida de superfície é:

$$\left(\frac{d\vec{F}}{d\mathcal{V}}\right)_{sup} = -\nabla p + \left(\frac{d\vec{F}}{d\mathcal{V}}\right)_{sup}, \quad (4.38)$$

onde a força de tensões viscosas é composta de nove termos.

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{F}}{d\mathcal{V}}\right)_{sup} &= \hat{e}_1 \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(\sigma_{x_1x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\sigma_{x_2x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_3}(\sigma_{x_3x_1}) \right) \\ &+ \hat{e}_2 \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(\sigma_{x_1x_2}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\sigma_{x_2x_2}) + \frac{\partial}{\partial x_3}(\sigma_{x_3x_2}) \right) \\ &+ \hat{e}_3 \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(\sigma_{x_1x_3}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\sigma_{x_2x_3}) + \frac{\partial}{\partial x_3}(\sigma_{x_3x_3}) \right) \end{aligned} \quad (4.39)$$

Como cada termo entre parênteses representa o divergente de um vetor componente de tensão agindo sobre as faces ao longo de x_1 , x_2 e x_3 respectivamente, a equação 4.39 pode ser expressa na forma divergente como:

$$\left(\frac{d\vec{F}}{d\mathcal{V}}\right)_{sup} = \nabla \cdot \sigma_{ij}, \quad (4.40)$$

onde σ_{ij} é o tensor de tensões viscosas agindo sobre a partícula. A força de superfície é, então, a soma do gradiente de pressão e o divergente do tensor de tensões viscosas. Então, a equação diferencial básica do momento linear para uma partícula de fluido tem a forma:

$$\rho g - \nabla p + \nabla \cdot \sigma_{ij} = \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} \quad (4.41)$$

A equação 4.41 é a forma compacta da equação de momento linear, sendo que sua complexidade é quase imperceptível. Ela é uma equação vetorial, em que cada uma das equações componentes contém nove termos. As equações componentes ilustram as dificuldades matemáticas inerentes a equação do momento linear:

$$\begin{aligned} \rho g_{x_1} - \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_1}(\sigma_{x_1x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\sigma_{x_2x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_3}(\sigma_{x_3x_1}) &= \rho \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) \\ \rho g_{x_2} - \frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_1}(\sigma_{x_1x_2}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\sigma_{x_2x_2}) + \frac{\partial}{\partial x_3}(\sigma_{x_3x_2}) &= \rho \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) \\ \rho g_{x_3} - \frac{\partial p}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_1}(\sigma_{x_1x_3}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\sigma_{x_2x_3}) + \frac{\partial}{\partial x_3}(\sigma_{x_3x_3}) &= \rho \left(\frac{\partial u_3}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \end{aligned}$$

4.4 Equação da Energia

Aplicamos o teorema de transporte de Reynolds à primeira lei da termodinâmica², onde a variável B torna-se a energia E , e a energia por unidade de massa é $\beta = dE/dm = e$.

$$E = Q - W \quad (4.42)$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt} \quad (4.43)$$

²Q positivo significa calor adicionado ao sistema, e W positivo significa trabalho realizado pelo sistema.

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{VC} e \rho dV \right) + \int_{SC} e \rho (\vec{u} \cdot \hat{n}) dA \quad (4.44)$$

A energia por unidade de massa do sistema é dada por vários fatores.

$$e = e_{interna} + e_{cinetica} + e_{potencial} + e_{outras} \quad (4.45)$$

A energia interna \hat{u} é a energia armazenada em um sistema por atividade molecular e forças de ligação moleculares. A energia potencial é igual ao trabalho necessário para mover o sistema de massa m da origem até uma posição $\vec{r} = \hat{e}_1 x_1 + \hat{e}_2 x_2 + \hat{e}_3 x_3$ contra o campo gravitacional \vec{g} . Seu valor é $-m\vec{g} \cdot \vec{r}$, ou $-\vec{g} \cdot \vec{r}$ por unidade de massa. A energia cinética é igual ao trabalho necessário para variar a velocidade da massa de zero até a velocidade $|\vec{u}|$. Seu valor $1/2m|\vec{u}|^2$, ou $1/2|\vec{u}|^2$ por unidade de massa. Então, por convenção, a energia total armazenada e por unidade de massa é a soma desses três termos:

$$e = \hat{u} + \frac{1}{2}|\vec{u}|^2 - (\vec{g} \cdot \vec{r}) \quad (4.46)$$

Usando por conveniência o “ponto em cima” para denotar derivadas temporais, dividiremos o termo de trabalho em duas partes:

$$\dot{W} = \dot{W}_p + \dot{W}_s \quad (4.47)$$

O trabalho das forças gravitacionais já foi incluído na forma de energia potencial na equação 4.46. A taxa de trabalho \dot{W}_p realizada pelas forças de pressão ocorrem apenas na superfície; todos os trabalhos das porções internas de material no volume de controle realizam-se por forças iguais e opostas e se cancelam.

O trabalho da pressão é igual ao produto da força de pressão sobre um elemento de superfície dA , pelo componente normal da velocidade entrando no volume de controle.

$$\dot{W}_p = \int_{SC} d\dot{W}_p = \int_{SC} -p(-\vec{u} \cdot \hat{n}) dA \quad (4.48)$$

O trabalho das tensões viscosas ocorre na superfície de controle, com os termos de trabalho interno se cancelando, sendo o produto de cada tensão viscosa (uma normal e duas tangenciais) pelo respectivo componente de velocidade.

$$\dot{W}_s = - \int_{SC} (\sigma \cdot \vec{u}) dA \quad (4.49)$$

σ é o vetor de tensões agindo sobre o elemento de superfície dA . Esse termo pode desaparecer ou ser desprezível, de acordo com o tipo particular de superfície naquela parte do volume de controle:

- Superfície sólida. Para todas as partes da superfície de controle que são paredes sólidas de confinamento, $\vec{u} = 0$, devido à condição de não deslizamento; logo, $\dot{W}_s = 0$;
- Entradas ou saídas. Em uma entrada ou saída, o fluxo é aproximadamente normal ao elemento dA ; logo, o único termo viscoso vem das tensões normais, $\sigma_{nn} u_n dA$. Uma vez que as tensões viscosas normais são extremamente pequenas na grande maioria dos casos, exceto em casos raros, tais como no interior de uma onda de choque, é costume desprezar o trabalho viscoso nas entradas e saídas do volume de controle.
- Superfície de corrente. Se a superfície de controle corresponde a uma linha de corrente, o termo de trabalho viscoso deve ser avaliado e retido, caso as tensões viscosas forem significativas ao longo dessa linha.

Como resultado,

$$\dot{W} = \int_{SC} p(\vec{u} \cdot \vec{n})dA - \int_{SC} (\sigma \cdot \vec{u})dA \quad (4.50)$$

O termo de calor pode ser escrito considerando-se dois mecanismos: o primeiro é a absorção ou transferência de calor por fontes ou sumidouros ao longo do volume da partícula de fluido.

$$\dot{Q}_R = \int_{VC} \rho R dV \quad (4.51)$$

O segundo mecanismo se deve a condução de calor.

$$\dot{Q}_k = \int_{SC} (\vec{K} \cdot \hat{n})dA \quad (4.52)$$

Na equação 4.52, $\vec{K} = k_h \nabla T$, sendo k_h o coeficiente de condução de calor. Dessa forma,

$$\dot{Q} = \int d\dot{Q} = \int_{VC} \rho R dV - \int_{SC} (\vec{K} \cdot \hat{n})dA. \quad (4.53)$$

Por fim, a equação da energia na forma integral pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \dot{Q} - \dot{W} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{VC} e \rho dV \right) + \int_{SC} e \rho (\vec{u} \cdot \hat{n})dA = & - \int_{SC} p(\vec{u} \cdot \vec{n})dA + \int_{SC} (\sigma \cdot \vec{u})dA \\ & \int_{VC} \rho R dV - \int_{SC} (\vec{K} \cdot \hat{n})dA. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Agrupando os dois termos adjacentes a igualdade em 4.49,

$$\begin{aligned} \dot{Q} - \dot{W} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{VC} e \rho dV \right) + \int_{SC} \left(e + \frac{p}{\rho} \right) \rho (\vec{u} \cdot \hat{n})dA = & - \int_{SC} (\sigma \cdot \vec{u})dA \\ & \int_{VC} \rho R dV - \int_{SC} (\vec{K} \cdot \hat{n})dA. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Considerando que $e = \hat{u} + \frac{1}{2}|\vec{u}|^2 - (\vec{g} \cdot \vec{r})$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{VC} \left(\hat{u} + \frac{1}{2}|\vec{u}|^2 - (\vec{g} \cdot \vec{r}) \right) \rho dV \right) + \int_{SC} \left(\hat{u} + \frac{1}{2}|\vec{u}|^2 - (\vec{g} \cdot \vec{r}) + \frac{p}{\rho} \right) \rho (\vec{u} \cdot \hat{n})dA \\ = \int_{SC} p(\vec{u} \cdot \vec{n})dA - \int_{SC} (\sigma \cdot \vec{u})dA + \int_{VC} \rho R dV - \int_{SC} (\vec{K} \cdot \hat{n})dA. \end{aligned} \quad (4.56)$$

A entalpia, definida como $\hat{h} = \hat{u} + (p/\rho)$, pode ser substituída no segundo termo do lado esquerdo da igualdade na equação 4.56 para chegarmos a uma expressão geral para a equação da energia na forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{VC} \left(\hat{u} + \frac{1}{2}|\vec{u}|^2 - (\vec{g} \cdot \vec{r}) \right) \rho dV \right) + \int_{SC} \left(\hat{h} + \frac{1}{2}|\vec{u}|^2 - (\vec{g} \cdot \vec{r}) \right) \rho (\vec{u} \cdot \hat{n})dA \\ = \int_{SC} p(\vec{u} \cdot \vec{n})dA - \int_{SC} (\sigma \cdot \vec{u})dA + \int_{VC} \rho R dV - \int_{SC} (\vec{K} \cdot \hat{n})dA. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Se o volume de controle tem uma série de entradas e saídas unidimensionais, como na figura 4.4, a integral de superfície em 4.52 se reduz a um somatório de fluxos de saída subtraídos de fluxos de entrada:

$$\int_{SC} \left(\hat{h} + \frac{1}{2} |\vec{u}|^2 - (\vec{g} \cdot \vec{r}) \right) \rho (\vec{u} \cdot \hat{n}) dA = \sum (\hat{h} + \frac{1}{2} |\vec{u}|^2 - (\vec{g} \cdot \vec{r}))_{sada} \dot{m}_{sada} - \sum (\hat{h} + \frac{1}{2} |\vec{u}|^2 - (\vec{g} \cdot \vec{r}))_{entrada} \dot{m}_{entrada} \quad (4.58)$$

Para transformarmos do enfoque de volume de controle para sistema infinitesimal, aplicamos o teorema da divergência aos termos contendo integrais de superfície na equação 4.57, de forma que:

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{VC} e \rho dV \right) + \int_{VC} \nabla \cdot \left(e + \frac{p}{\rho} \right) \rho \vec{u} dV = - \int_{VC} \nabla \cdot (\sigma \cdot \vec{u}) dV - \int_{VC} \rho R dV - \int_{VC} \nabla \cdot \vec{K} dV. \quad (4.59)$$

No limite onde $dV \rightarrow 0$, a forma diferencial da equação da energia é:

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{\partial}{\partial t} (e \rho) + \nabla \cdot \left(e + \frac{p}{\rho} \right) \rho \vec{u} = - \nabla \cdot (\sigma \cdot \vec{u}) + \rho R - \nabla \cdot \vec{K}. \quad (4.60)$$

4.5 Equação de Bernoulli

É uma equação relacionada à conservação da energia para fluxo estável. A mesma apresenta uma relação entre pressão, velocidade e elevação para um fluido sem atrito, conhecida como a equação de Bernoulli. A equação de Bernoulli é muito famosa e bastante usada, mas é necessário estar atento às suas restrições — todos os fluidos são viscosos e, portanto, todos os fluxos apresentam algum efeito de atrito. Para usarmos corretamente a equação de Bernoulli, devemos restringi-la a regiões de fluxo aproximadamente sem atrito.

Considere a figura 4.6, na qual um volume de controle formado por um tubo de corrente elementar, fixo, de área variável $A(s)$ e comprimento ds , em que s é uma coordenada natural na direção das linhas de corrente. As propriedades (r, u, p) podem variar com s e com o tempo, mas são consideradas uniformes sobre a seção transversal A . A orientação u do tubo de corrente é arbitrária, com uma variação de elevação $dx_3 = ds \operatorname{sen}(\theta)$. Os efeitos de viscosidade são desprezados — uma hipótese altamente restritiva. Observe que, no limite quando a área tende a zero, o tubo de corrente é equivalente a uma linha de corrente do fluxo. A equação de Bernoulli é válida para ambos e usualmente é enunciada como válida “ao longo de uma linha de corrente” em um fluxo invíscido (sem viscosidade). A conservação da massa para esse volume de controle elementar, conduz a:

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{VC} \rho dV \right) + \dot{m}_{saida} - \dot{m}_{entrada} = 0 \approx \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + d\dot{m}, \quad (4.61)$$

em que $\dot{m} = \rho AV$ e $dV \approx A ds$. A conservação da massa toma a forma

$$d\dot{m} = d(\rho AV) = - \frac{\partial \rho}{\partial t} A ds \quad (4.62)$$

A quantidade de momento linear na direção das linhas de corrente é:

$$\sum dF_s = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{VC} u \rho dV \right) + \sum (\dot{m}u)_{saida} - \sum (\dot{m}u)_{entrada} \approx \frac{\partial}{\partial t} A ds + d(\dot{m}u), \quad (4.63)$$

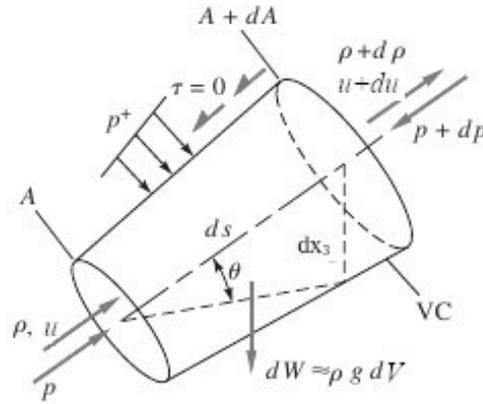


Figura 4.6: Volume de controle formado por um tubo de corrente elementar, fixo, de área variável $A(s)$ e comprimento ds , em que s é uma coordenada natural na direção das linhas de corrente.

em que $u_s = u$, pois s está na direção da própria linha de corrente. Se desprezarmos os efeitos de viscosidade nas paredes, as forças se devem à pressão e à gravidade. A força de gravidade na direção da linha de corrente é igual ao correspondente componente do peso do fluido no interior do volume de controle:

$$dF_{s,gravidade} = -dP \operatorname{sen}(\theta) = -\gamma A ds \operatorname{sen}(\theta) = -\gamma A dx_3 \quad (4.64)$$

A força de pressão é visualizada, na figura 4.7, subtraindo antes um valor uniforme p de todas as superfícies. A força de pressão ao longo da lateral inclinada do tubo de corrente tem um componente na direção das linhas de corrente, que age não sobre A , mas sobre o anel externo correspondente à variação de área dA . A força de pressão resultante é, portanto,

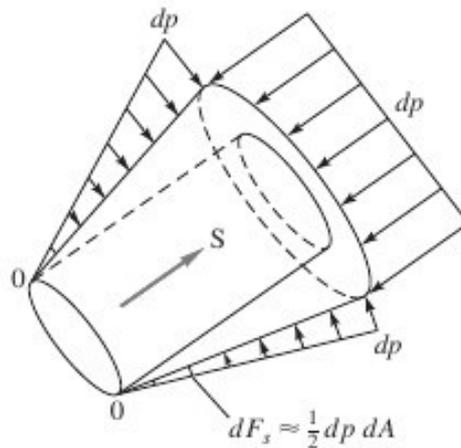


Figura 4.7: Força líquida de pressão após subtração uniforme de p .

$$dF_{s,presso} = \frac{1}{2} dp dA - dp(A + dA) \approx -Adp \quad (4.65)$$

Substituindo esses dois termos de força na relação de momento linear:

$$\sum F_s = -\gamma A dx_3 - A dp = \left(\frac{\partial}{\partial t}(\rho u A) \right) ds + d(\dot{m}u) = \frac{\partial \rho}{\partial t}(uA) ds + \frac{\partial u}{\partial t}(\rho A) ds + \dot{m} du + u d\dot{m} \quad (4.66)$$

O primeiro e o último termos da direita se cancelam, em virtude da relação da continuidade. Dividindo o que resta por ρA e rearranjando, obtém-se a relação final desejada:

$$-g dx_3 - \frac{dp}{\rho} = \frac{\partial u}{\partial t} ds + u du \quad (4.67)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} ds + \frac{dp}{\rho} + u du + g dx_3 = 0 \quad (4.68)$$

Essa é a equação de Bernoulli para fluxo sem efeitos de viscosidade, instável, ao longo de uma linha de corrente. Ela está na forma diferencial e pode ser integrada entre dois pontos 1 e 2 quaisquer sobre a linha de corrente:

$$\int_1^2 \frac{\partial u}{\partial t} ds + \int_1^2 \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2}(u_2^2 - u_1^2) + g(x_{32} - x_{31}) = 0 \quad (4.69)$$

Para calcularmos as duas integrais restantes, devemos estimar o efeito da dependência com o tempo $\partial u/\partial t$ e a variação da densidade com a pressão. Por ora, consideramos apenas o caso de um fluxo estável em regime uniforme $\partial u/\partial t = 0$ e incompressível (densidade constante), para o qual a equação 4.69 torna-se

$$\frac{(p_2 - p_1)}{\rho} + \frac{1}{2}(u_2^2 - u_1^2) + g(x_{32} - x_{31}) = 0, \quad (4.70)$$

ou

$$\frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2}u_2^2 + g x_{32} = \frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2}u_1^2 + g x_{31}. \quad (4.71)$$

A relação anterior é a equação de Bernoulli para um fluxo incompressível, sem viscosidade, em regime uniforme ao longo de uma linha de corrente.

4.6 Equação da Vorticidade

Para estabelecer uma equação para a vorticidade, partimos da expressão da aceleração de uma partícula de fluido.

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}, \quad (4.72)$$

o segundo termo a direita na equação pode ser reescrito a partir da seguinte identidade vetorial:

$$\vec{u} \times (\nabla \times \vec{u}) = \nabla \left(\frac{|\vec{u}|^2}{2} \right) - (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}, \quad (4.73)$$

$$(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} = \nabla \left(\frac{|\vec{u}|^2}{2} \right) - (\vec{u} \times \vec{w}) \quad (4.74)$$

Da equação de Euler,

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{|\vec{u}|^2}{2} \right) - (\vec{u} \times \vec{w}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \rho \vec{g} \quad (4.75)$$

Aplicando o rotacional a ambos os lados da equação anterior,

$$\nabla \times \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{|\vec{u}|^2}{2} \right) - (\vec{u} \times \vec{w}) \right] = \nabla \times \left(-\frac{1}{\rho} \nabla p + \rho \vec{g} \right), \quad (4.76)$$

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} - \nabla \times (\vec{u} \times \vec{w}) = 0, \quad (4.77)$$

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{w} - (\vec{w} \cdot \nabla) \vec{u} + (\nabla \cdot \vec{u}) \vec{w} - (\nabla \cdot \vec{w}) \vec{u} = 0 \quad (4.78)$$

Para fluxos incompressíveis $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ e, adicionalmente, $\nabla \cdot \vec{w} = 0$ com $\vec{w} = \nabla \times \vec{u}$. Assim,

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{w} = (\vec{w} \cdot \nabla) \vec{u} \quad (4.79)$$

Essa é a equação geral da vorticidade. Ela relaciona a mudança da vorticidade de uma partícula de fluido aos gradientes do vetor \vec{u} na direção de \vec{w} .

4.7 Propriedades da Equação da Vorticidade

i. Se $\vec{w} = 0$ em qualquer ponto, então \vec{w} permanece constante. Assim um fluxo que inicia rotacional se mantém irrotacional;

ii. Em um fluxo planar bidimensional, $\vec{u} = (u_1(x_1, x_2), u_2(x_1, x_2), 0)$, o vetor vorticidade tem apenas um componente,

$$\vec{w} = \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \hat{e}_{x_3}, \quad (4.80)$$

de forma que

$$(\vec{w} \cdot \nabla) \vec{u} = \vec{w} \frac{d}{dx_3} \vec{u}(x_1, x_2) = 0. \quad (4.81)$$

Com isso, a equação da vorticidade se reduz a

$$\frac{D\vec{w}}{Dt} = \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{w} = 0. \quad (4.82)$$

O resultado anterior mostra que a vorticidade de uma partícula de fluido permanece constante. Adicionalmente, se o fluxo for uniforme, $\partial \vec{w} / \partial t = 0$, a vorticidade permanece constante ao longo de uma linha de corrente.

iii. Alongamento de vórtice

"O alongamento de um vórtice leva ao crescimento de sua vorticidade".

Considere, por exemplo, um fluxo estável e incompressível em um cone convergente, função da distância radial em coordenadas polares. A velocidade radial é:

$$\vec{u}(r) = u_r \hat{e}_r + u_\phi \hat{e}_\phi \quad (4.83)$$

A componente u_r representa a velocidade radial de entrada, enquanto que u_ϕ é a velocidade de giro. Desde que $\nabla \times (u_r(r) \hat{e}_r) = 0$, apenas o movimento de giro contribui para o vetor vorticidade,

$$\vec{w}(r) = \nabla \times \vec{u} = \nabla \times (u_\phi(r') \hat{e}_\phi) = w_r \hat{e}_r + w_\phi \hat{e}_\phi. \quad (4.84)$$

Da equação de conservação de massa para um fluxo de entrada incompressível e simétrico obtemos,

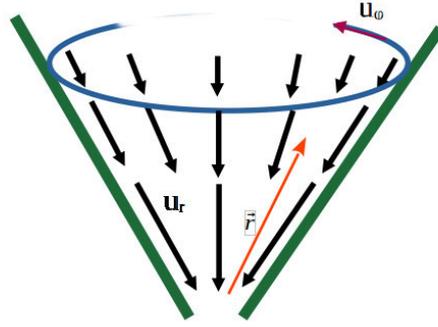


Figura 4.8: Cone convergente.

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr}(r^2 u_r) = 0 \iff u_r = \frac{-k}{r^2} \quad (4.85)$$

onde $k > 0$ e uma constante. Visto que o fluxo é estável, $\partial \vec{w} / \partial t = 0$, a equação para a evolução da componente da velocidade, w_r , se torna:

$$\frac{Dw_r}{Dt} = u_r \frac{dw_r}{dr} = w_r \frac{du_r}{dr} \iff \frac{d}{dr} \ln \left| \frac{w_r}{u_r} \right| = 0 \iff \frac{w_r}{u_r} = \alpha \quad (4.86)$$

Assim,

$$w_r = \alpha u_r = -\frac{\alpha k}{r^2}, \quad (4.87)$$

a qual demonstra que a vorticidade w_r cresce com o crescimento de u_r ; o vórtice inicial é alongado pelo fluxo de entrada.

4.8 Teorema de Circulação de Kelvin

Relembrando, a circulação é uma grandeza definida como

$$\Gamma = \oint \vec{u} \cdot d\vec{l}. \quad (4.88)$$

O teorema de circulação de Kelvin implica que a circulação em torno de uma curva material fechada permanece constante. Isso para um fluxo inviscido, com densidade uniforme e sujeito a forças conservativas. Então,

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_{C(t)} \vec{u} \cdot d\vec{l} = 0, \quad (4.89)$$

desde que $C(t)$ seja um caminho fechado e formado por partículas de fluido.

Prova: Seja $C(t)$ uma curva material, formada de partículas de fluxo, de representação paramétrica $\chi(s, t)$ com $s \in [0, 1]$. Usando esta representação paramétrica, a taxa de variação da circulação em torno de $C(t)$ pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_0^1 \vec{u}(\chi(s, t), t) \cdot \frac{\partial}{\partial s} \chi(s, t) ds = \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} \left[\vec{u}(\chi(s, t), t) \cdot \frac{\partial}{\partial s} \chi(s, t) \right] ds = \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \frac{d}{dt} (\vec{u}(\chi((s, t), t))) \cdot \frac{\partial}{\partial s} \chi(s, t) + \vec{u} \cdot \frac{\partial^2 \chi}{\partial s \partial t}$$

$$\frac{d}{dt} (\vec{u}(\chi((s, t), t))) = \frac{\partial \vec{u}}{\partial \chi} \frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \left(\frac{\partial \chi}{\partial t} \cdot \nabla \right) \vec{u} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial s \partial t} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial s}$$

$$\int_0^1 \left\{ \left[\left(\frac{\partial \chi}{\partial t} \cdot \nabla \right) \vec{u} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right] \cdot \frac{\partial \chi}{\partial s} + \vec{u} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial s} \right\} ds =$$

$$\int_0^1 \left\{ \left[(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right] \cdot \frac{\partial \chi}{\partial s} + \vec{u} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial s} \right\} ds$$

Usando a expressão de Euler,

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \nabla \left(-\frac{p}{\rho} + \vec{g} \cdot \chi \right),$$

encontramos

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_0^1 \left[\nabla \left(-\frac{p}{\rho} + \vec{g} \cdot \chi \right) \cdot \frac{\partial \chi}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{|\vec{u}|^2}{2} \right) \right] ds.$$

Considerando que,

$$\nabla \left(-\frac{p}{\rho} + \vec{g} \cdot \chi \right) \cdot \frac{\partial \chi}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial \chi} \left(-\frac{p}{\rho} + \vec{g} \cdot \chi \right) \cdot \frac{\partial \chi}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \left(-\frac{p}{\rho} + \vec{g} \cdot \chi \right),$$

chegamos a:

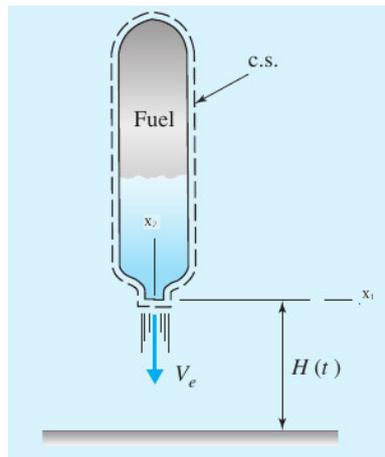
$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(-\frac{p}{\rho} + \vec{g} \cdot \chi \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{|\vec{u}|^2}{2} \right) \right] ds,$$

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_0^1 \left[d \left(-\frac{p}{\rho} + \vec{g} \cdot \chi + \frac{|\vec{u}|^2}{2} \right) \right] ds = 0;$$

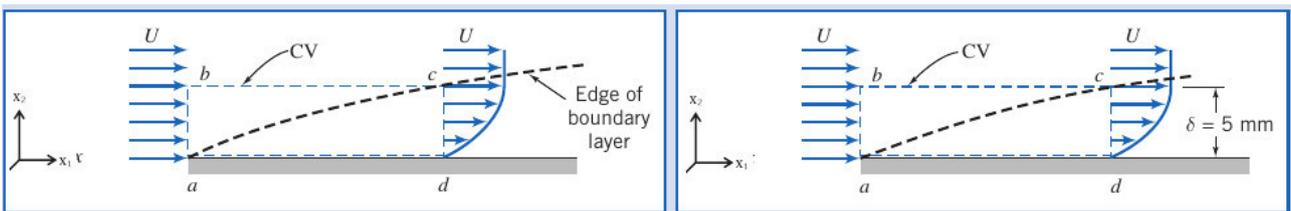
demonstrando que o fluxo de vorticidade através da superfície que abrange a curva material é constante.

4.9 Lista de Problemas

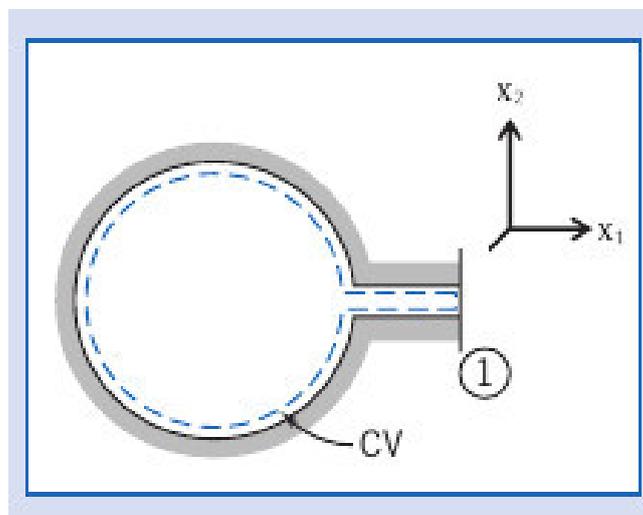
1. Escreva a equação diferencial de momento linear para um fluxo compressível na forma compacta usando notação vetorial.
2. Suponha um fluxo estável com densidade constante. Integre a equação de Euler ao longo de uma linha de corrente no plano do fluxo.
3. O foguete abaixo com massa inicial de 150kg queima combustível em uma taxa de 10kg/s com velocidade constante de exaustão de 700m/s . Qual é a aceleração inicial do foguete e sua velocidade após 1 s. Desconsidere a força de resistência do ar sobre o foguete.



4. O fluido em contato direto com uma fronteira sólida estacionária tem velocidade zero; não há deslizamento na fronteira. Por isso o fluxo sobre uma placa plana adere à superfície da placa e forma uma camada limite, conforme ilustrado abaixo. O fluxo à frente da placa a placa é uniforme com velocidade $\vec{V} = U\hat{i}$; $U = 30m/s$. A distribuição de velocidade dentro da camada limite ($\leq x_2 \leq \delta$ ao longo de cd é aproximado como $u/U = 2(x_2/\delta) - (\gamma/\delta)^2$. A espessura da camada-limite na posição d é $\delta = 5mm$. O fluido é ar com massa específica $\rho = 1,24kg/m^3$. Supondo que a largura da placa perpendicular ao papel seja $w = 0,6m$, calcule a vazão mássica através da superfície bc do volume de controle $abcd$.

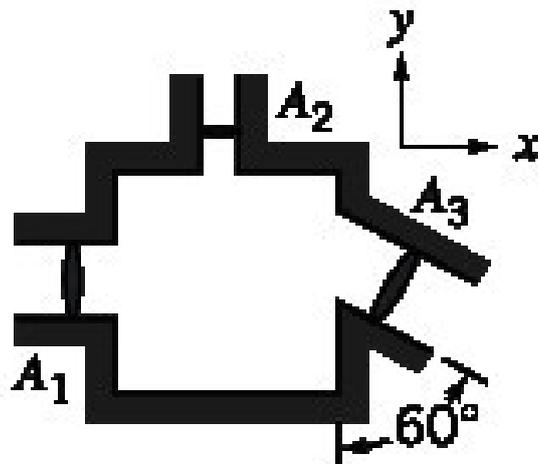


5. Um tanque com volume de $0.05m^3$ contém ar a $800kPa$ (absoluta) e $15^\circ C$. Em $t = 0s$, o ar começa a escapar do tanque através de uma válvula com área de fluxo de $65mm^2$. O ar que passa pela válvula tem uma velocidade de $300m/s$ e uma densidade de $6kg/m^3$. Determine a taxa instantânea de variação da densidade no tanque em $t = 0s$.

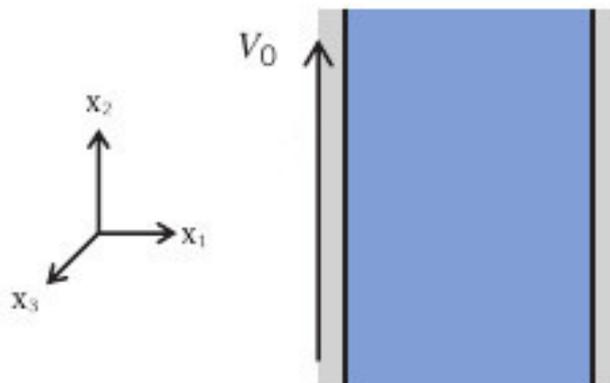


6. Um fluido com densidade de $1.041g/cm^3$ em um fluxo estável flui através da caixa retangular uniforme na figura a seguir. Sendo $A_1 = 0.5m^2$, $A_2 = 0.1m^2$ e $A_3 = 0.6m^2$, $u_1 = 10\hat{i}m/s$, e

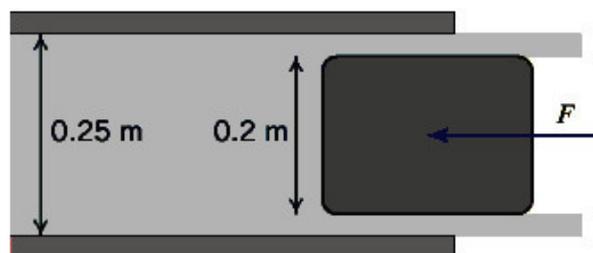
$u_1 = 20\hat{j}m/s$, determine u_3 . Calcule a taxa líquida de fluxo de momento através a superfície de controle.



7. Considere um fluxo estável, laminar, totalmente desenvolvido, incompressível entre duas placas infinitas, como mostrado abaixo. O fluxo é devido ao movimento da placa esquerda, bem como a uma o gradiente de pressão aplicado na direção x_2 . Dadas as condições de que $\vec{u} \neq \vec{u}(z)$, $u_3 = 0$ e a gravidade aponta no direção de x_2 negativo, prove que $u_1 = 0$ e que o gradiente de pressão na direção y deve ser constante.



8. Ache a força necessária para manter em repouso na saída de um tubo de água. O fluxo volumétrico (Q) é $1.5m^3/s$, e a pressão na entrada (Diâmetro=0.25m) é 3.5 MPa.



9. Um tanque de teste de laboratório contém água do mar de salinidade S e densidade ρ . A água entra no tanque nas condições (S_1, ρ_1, A_1, V_1) e presume-se que se mistura imediatamente no tanque. A água deixa o tanque por uma saída A_2 com velocidade V_2 . Se o sal for uma

propriedade “que se conserva” (não pode ser criado nem destruída), use o teorema do transporte de Reynolds para encontrar uma expressão para a taxa de variação da massa de sal M_{sal} dentro do tanque.

10. O campo de velocidade a seguir,

$$u_1 = \frac{10x_1}{x_1^2 + x_2^2}$$

$$u_2 = -\frac{10x_2}{x_1^2 + x_2^2}$$

representam um possível fluxo incompressível? Se sim, encontre o gradiente de pressão ∇p assumindo um fluxo sem viscosidade e com forças de corpo desprezíveis.

11. O campo de velocidade a seguir,

$$u_r = 10 \left(1 - \frac{1}{r^2} \right) \cos(\theta)$$

$$u_\theta = -10 \left(1 + \frac{1}{r^2} \right) \sin(\theta)$$

representam um possível fluxo incompressível? Se sim, encontre o gradiente de pressão ∇p assumindo um fluxo sem viscosidade e com forças de corpo desprezíveis.

12. O campo de velocidade a seguir,

$$u_r = 10 \left(1 - \frac{8}{r^3} \right) \cos(\theta)$$

$$u_\theta = -10 \left(1 + \frac{1}{r^3} \right) \sin(\theta)$$

$$u_\phi = 0$$

representam um possível fluxo incompressível? Se sim, encontre o gradiente de pressão ∇p assumindo um fluxo sem viscosidade e com forças de corpo desprezíveis.

13. Derive uma expressão para variação vertical de pressão na atmosfera como função da temperatura partindo da equação de momento para um fluido estático considerando a lei do gás ideal. Assuma que $T = T_0 - \gamma x_3$, onde γ é a temperatura de lapso. Faça um gráfico da pressão versus temperatura.

γ ($^{\circ}\text{K}/\text{km}$)	z range (km)
6.5	0–12
0	12–22
-1	22–32

14. Um campo de velocidade é dado por $\vec{u} = 30(x_2 - 24x_2^2)ft/s$, $u_2 = 0$ e $u_3 = 0$. Apresente as componentes da tensão em $x_2 = 0.1in$ usando $\mu = 1 \times 10^{-5}lb \cdot s/ft^2$ e $p = 30psi$. Ache a razão entre $\tau_{x_1x_2}/\sigma_{x_1x_1}$.

15. O campo de velocidades próximo a superfície é aproximado por $u_1 = 10(2x_2/\delta - x_2^2/\delta^2)$, onde $\delta = Cx_1^{4/5}$. Se $\delta = 8m$ em $x_1 = 1000m$, ache $u_2(x_1, x_2)$ assumindo que $x_3 = 0$ e $u_2(x_1, 0) = 0$. Adicionalmente, calcule as componentes da tensão em $(1000, 0)$ usando $\mu = 2 \times 10^{-5}N \cdot s/m^2$ e $p = 100kPa$. Assuma o fluxo como incompressível.

16. Um vento com velocidade de $40m/s$ sopra paralelo ao telhado de uma casa. A área do telhado é de $250m^2$. Supondo que a pressão dentro da casa seja a pressão atmosférica, calcule

a força exercida pelo vento no telhado e a direção da força. ($\rho_{ar} = 1.2 \text{ kg/m}^3$) 17. A água flui a uma taxa de 2 m/s através de um tubo com diâmetro de 1 m . Se a pressão neste ponto for 80 kPa , qual será a pressão da água depois que o tubo se estreitar até atingir um diâmetro de 0.5 m ? $\rho_{H_2O} = 1.0 \text{ kg/l}$. Calcule a circulação por unidade de área em torno de um caminho fechado sem incluir o centro, nos dois tipos de vórtices: (i) $\vec{u}_s = Cr$ (ii) $\vec{u}_s = C/r$, onde u_s é a velocidade tangencial a uma distância r e $C = a$ constante.

Capítulo 5

Equação de Navier-Stokes

5.1 Tensor de Tensão

As forças básicas fundamentais envolvidas no movimento de fluidos são a força de gradiente de pressão, a força da gravidade e a força de tensões viscosas. A partir de agora iremos discutir em mais detalhes cada uma delas.

5.1.1 Força de Gradiente de Pressão (força de corpo)

Partindo das equações 1.18, para a variação de pressão em um ponto de um fluido a menos da gravidade, podemos escrever

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) = \rho a_x + \rho a_y + \rho a_z. \quad (5.1)$$

O termo da esquerda na equação anterior é o gradiente de pressão, enquanto que o termo da direita pode ser escrito em termos da segunda Lei de Newton, de forma que obtemos a seguinte expressão para a força de gradiente de pressão.

$$-\frac{1}{\rho} \nabla p = \frac{\vec{F}}{m} \quad (5.2)$$

É importante notar que a força é proporcional ao gradiente de pressão e não a pressão em si. Passando a densidade para o numerador a direita da igualdade na equação 5.2, obtemos a força de gradiente de pressão por unidade de volume.

$$-\nabla p = \rho \frac{\vec{F}}{m} = \frac{m}{V} \frac{\vec{F}}{m} = \frac{\vec{F}}{V} \quad (5.3)$$

5.1.2 Força da Gravidade (força de corpo)

Esta implícito na lei da gravitação universal de Newton que massas tendem a se atrair por meio de uma força que é proporcional ao produto destas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas. Se considerarmos que a massa da Terra é M , e a massa de uma parcela da atmosfera é m , a força gravitacional por unidade de massa, o campo gravitacional, será dado por:

$$\frac{\vec{F}_g}{m} = \vec{g} = \frac{-GM}{r^2} \left(\frac{\vec{r}}{r}\right) \quad (5.4)$$

Em meteorologia dinâmica é comum usar a altitude com respeito a superfície do mar como coordenada vertical. Se considerarmos que o raio médio da Terra é a , e a distância acima do nível do mar x_3 , podemos escrever r na anterior como $(a + x_3)$, de forma que:

$$\vec{g} = \frac{-GM}{(a + x_3)^2} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) = \frac{-GM}{\left[\frac{a}{a} (a + x_3) \right]^2} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) = \frac{-GM}{\left[a \left(1 + \frac{x_3}{a} \right) \right]^2} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) = \frac{-GM}{a^2 \left[\left(1 + \frac{x_3}{a} \right) \right]^2} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right). \quad (5.5)$$

Definindo

$$\vec{g}_0 = \frac{-GM}{a^2} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right), \quad (5.6)$$

\vec{g}_0 é a gravidade média ao nível do mar. Então, a aceleração da gravidade em um ponto x_3 da atmosfera é:

$$\vec{g} = \frac{\vec{g}_0}{\left(1 + \frac{x_3}{a} \right)^2} \quad (5.7)$$

5.1.3 Força de Viscosidade ou de Tensões Viscosas (força de superfície)

A força líquida de tensão viscosa por unidade de massa ao longo de uma direção particular pode ser escrita na forma:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}. \quad (5.8)$$

Definimos o **coeficiente de viscosidade cinética** como:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}. \quad (5.9)$$

Para a condição padrão da atmosfera, ao nível do mar, $\nu = 1.46 \times 10^{-5} m^2 s^{-1}$, e as componentes da força de tensão viscosa são escritas como:

$$\begin{aligned} F_{x_1} &= \nu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right) \\ F_{x_2} &= \nu \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} \right) \\ F_{x_3} &= \nu \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \right) \end{aligned} \quad (5.10)$$

5.2 Referencial não Inercial

Ao formular as leis da dinâmica da atmosférica, é natural usar uma referência geocêntrica, ou seja, um sistema de referência que se encontra em repouso em relação aos eixos de rotação da Terra. A primeira Lei do Movimento de Newton afirma que uma massa em movimento uniforme em relação a um sistema de referência fixo no espaço permanecerá em movimento uniforme na ausência de quaisquer forças. Tal movimento é referido como movimento inercial. Já a referência fixa é definida como um referencial inercial ou absoluto. É claro, no entanto, que um objeto em repouso ou em movimento uniforme em relação à superfície da Terra em rotação

não está em repouso ou em movimento uniforme em relação a um sistema de coordenadas fixo no espaço. Portanto, um movimento que parece ser um movimento inercial para um observador em um referencial geocêntrico é um movimento realmente acelerado. Portanto, um referencial geocêntrico é um sistema de referência não-inercial. As leis do movimento de Newton só podem ser aplicadas em tais circunstâncias se a aceleração do sistema de coordenadas é levada em conta. A maneira mais satisfatória de incluir os efeitos não inerciais é a introdução de forças "aparentes" na equação da Segunda Lei de Newton. Estas forças aparentes são a força centrífuga e a força de Coriolis. Além disso, devemos fazer uma correção no termo de força gravitacional. O problema esta ilustrado na figura a seguir.

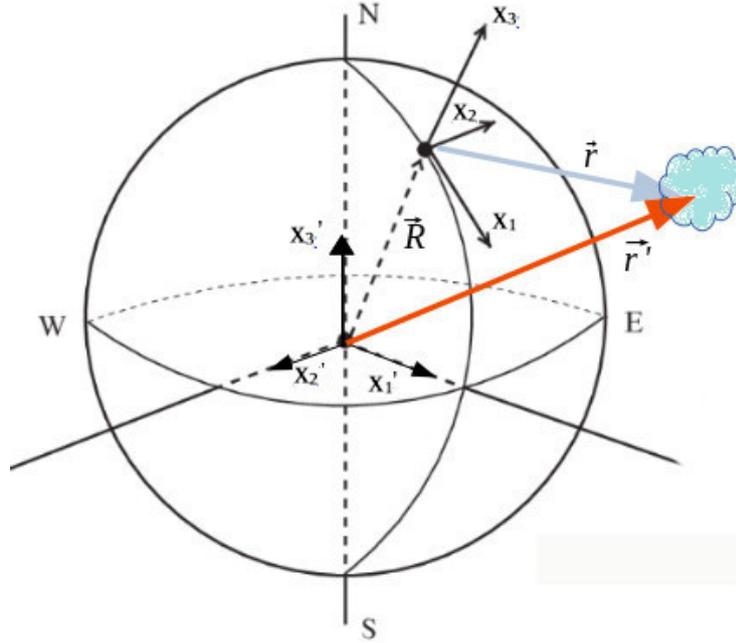


Figura 5.1: Movimento que um observador no referencial inercial (fixo no centro da Terra) detecta para uma massa unitária que se desloca em relação a superfície.

A velocidade de uma partícula de fluido escrita com respeito ao referencial inercial (fixo no centro da terra) será:

$$v_{fixo} = \vec{V} + \vec{v}_r + (\vec{\omega} \times \vec{r}). \quad (5.11)$$

onde \vec{V} é velocidade linear da origem do sistema em rotação (referencial na superfície da terra), \vec{v}_r velocidade relativa aos eixos em rotação e $(\vec{\omega} \times \vec{r})$ velocidade devido a rotação dos eixos. A segunda Lei de Newton neste contexto é:

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}_f}{dt}. \quad (5.12)$$

Por sua vez, para o cálculo da derivada de \vec{v}_f procedemos como a seguir:

$$\left(\frac{d\vec{v}_f}{dt}\right)_{inercial} = \left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_{inercial} + \left(\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right)_{inercial} + \left(\frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r})\right)_{inercial} \quad (5.13)$$

O segundo termo do lado direito da equação 5.16 fica:

$$\left(\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right)_{inercial} = \left(\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right)_{rotação} + \vec{\omega} \times \vec{v}_r. \quad (5.14)$$

Reescrevendo,

$$\left(\frac{d\vec{v}_f}{dt}\right)_{inercial} = \left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_{inercial} + \left(\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right)_{em\ rotação} + (\vec{w} \times \vec{v}_r) + \left(\frac{d}{dt}(\vec{w} \times \vec{r})\right)_{inercial}. \quad (5.15)$$

Agora devemos resolver o último termo a direita de 5.18.

$$\left(\frac{d}{dt}(\vec{w} \times \vec{r})\right)_{inercial} = \vec{w} \times \vec{r} + \vec{w} \times \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{inercial} = \vec{w} \times \vec{r} + \vec{w} \times \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{em\ rotação} + \vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r}). \quad (5.16)$$

Retornando a equação de força de Newton,

$$\left(\frac{d\vec{v}_f}{dt}\right)_{inercial} = \left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_{inercial} + \left(\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right)_{em\ rotação} + (\vec{w} \times \vec{v}_r) + (\vec{w} \times \vec{r}) + \left(\vec{w} \times \frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{inercial} + [\vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r})]. \quad (5.17)$$

Entretanto,

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{em\ rotação} = \vec{v}_r, \quad (5.18)$$

levando a:

$$\left(\frac{d\vec{v}_f}{dt}\right)_{inercial} = \left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_{inercial} + \left(\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right)_{em\ rotação} + (\vec{w} \times \vec{v}_r) + \vec{w} \times \vec{r} + (\vec{w} \times \vec{v}_r) + \vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r}). \quad (5.19)$$

Reduzindo os termos,

$$\left(\frac{d\vec{v}_f}{dt}\right)_{inercial} = \left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_{inercial} + \left(\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right)_{em\ rotação} + 2(\vec{w} \times \vec{v}_r) + (\vec{w} \times \vec{r}) + \vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r}). \quad (5.20)$$

Definindo neste ponto a aceleração da massa unitária com respeito ao sistema de referência em rotação como

$$\vec{a}_r = \left(\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right)_{em\ rotação} \quad (5.21)$$

e

$$\vec{R} = \left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_{inercial} \quad (5.22)$$

$$\left(\frac{d\vec{v}_f}{dt}\right)_{\Sigma'} = \vec{R} + \vec{a}_r + 2(\vec{w} \times \vec{v}_r) + \vec{w} \times \vec{r} + \vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r}). \quad (5.23)$$

Retornando a segunda lei de Newton,

$$F = m\vec{R} + m\vec{a}_r + 2m(\vec{w} \times \vec{v}_r) + m(\vec{w} \times \vec{r}) + m(\vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r})). \quad (5.24)$$

Esta seria a equação de movimento que um observador no referencial inercial (fixo no centro da Terra) acharia para determinar o movimento de uma massa unitária que se desloca em relação a superfície. Por outro lado, um observador fixo na superfície da Terra (no sistema em rotação) acharia uma força efetiva dada por:

$$\vec{F}_{efetiva} = m\vec{a}_r, \quad (5.25)$$

com $\vec{F}_{efetiva}$ igual a:

$$\vec{F}_{efetiva} = \vec{F} - m\vec{\ddot{R}} - m(\vec{\dot{w}} \times \vec{r}) - m(\vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r})) - 2m(\vec{w} \times \vec{v}_r) \quad (5.26)$$

Na equação anterior, o primeiro termo é a soma de todas as forças que agem sobre a partícula no referencial inercial. O segundo e terceiro termos vem da aceleração translacional e angular do sistema de referência em rotação com respeito ao sistema fixo. O termo $m(\vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r}))$ é a força centrífuga e aponta para fora dos eixos em rotação. O termo $2m(\vec{w} \times \vec{v}_r)$ é a força de Coriolis e vem do movimento em um referencial não inercial. Os termos não inerciais então dão conta da força centrífuga e de Coriolis. Fazendo $\vec{F} = m\vec{g}$, a força efetiva em um referencial não inercial será:

$$F_{efetiva}^{\vec{}} = m\vec{g} - m\vec{\ddot{R}}_f - m(\vec{\dot{w}} \times \vec{r}) - m(\vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r})) - 2m(\vec{w} \times \vec{v}_r) \quad (5.27)$$

considerando que

$$\vec{\ddot{R}}_f = \vec{w} \times \vec{R}, \quad (5.28)$$

e

$$\vec{\ddot{R}}_f = \vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{R}), \quad (5.29)$$

a equação 5.31 pode ser reescrita como:

$$F_{efetiva}^{\vec{}} = m\vec{g} - m(\vec{w} \times \vec{w} \times (\vec{r} + \vec{R})) - 2m(\vec{w} \times \vec{v}_r) \quad (5.30)$$

Na equação anterior, o termo contendo $\vec{\dot{w}}$ foi desprezado, visto que \vec{w} é aproximadamente constante. O primeiro e o segundo termos da equação 5.34 é o que experimentamos como gravidade efetiva na superfície da Terra.

$$\vec{g}_k = \vec{g} - (\vec{w} \times \vec{w} \times (\vec{r} + \vec{R})) \quad (5.31)$$

Para movimentos próximos da superfície da Terra, $r \ll R$, e a força centrífuga domina. Para situações muito distantes da superfície da Terra, devemos considerar a variação de \vec{g} com a altitude. Portanto, a equação 5.34 pode ser reescrita como:

$$\vec{F}_{efetiva}^{\vec{}} = m\vec{g}_k - 2m(\vec{w} \times \vec{v}_r). \quad (5.32)$$

Devido a força centrífuga, a direção de \vec{g}_k é ligeiramente diferente de \vec{g} . A situação é representada esquematicamente na figura a seguir.

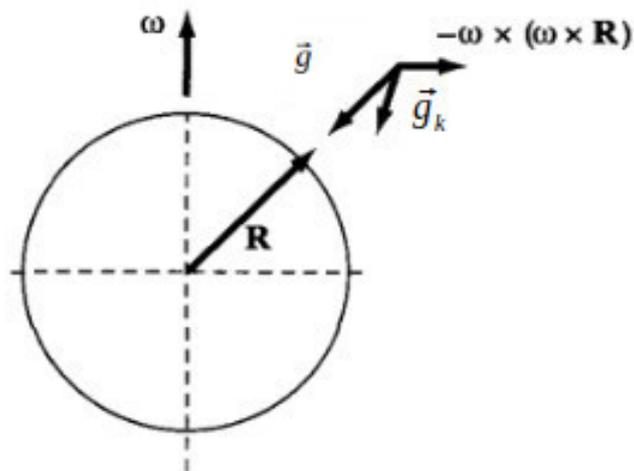


Figura 5.2: Influência da aceleração centrífuga sobre \vec{g}_k

O vetor aceleração angular, que representa a rotação da Terra em torno do seu eixo, é direcionado para o norte. Portanto no hemisfério norte existe uma componente deste vetor direcionada para fora ao longo da vertical local, w . Se uma partícula está projetado ao longo do plano horizontal com respeito ao sistema de coordenadas local na superfície da Terra com velocidade v_r , a força de Coriolis terá uma componente de magnitude $2mw_zv_r$ direcionada à direita do movimento da partícula, resultando em uma deflexão a partir da direção original do movimento. Pelo fato de que a magnitude da componente horizontal da força de Coriolis depende de \vec{w} , esta apresentará uma dependência com a latitude sendo máxima no polo norte e zero no equador. Na figura a seguir são apresentadas demais casos associados aos desvios causados pela força de coriolis.

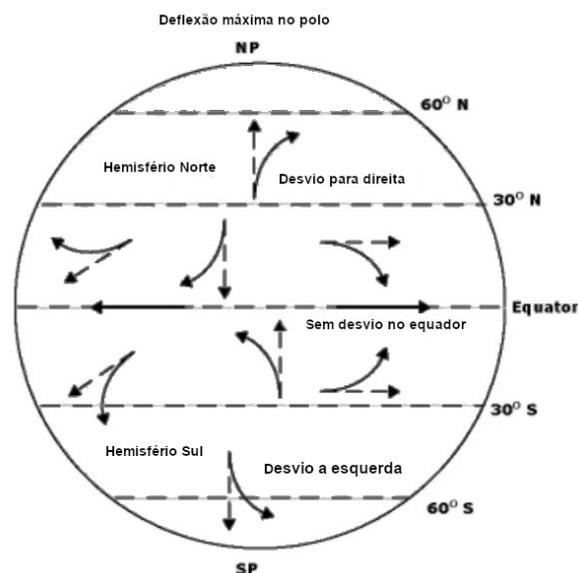


Figura 5.3: Deflexão causada pela força de Coriolis.

5.3 O Termo de Tensão para Líquidos e Gases

No capítulo 1 definimos tensão como sendo proporcional a taxa de deformação. A parametrização da tensão em uma dimensão apresentada no capítulo 1 pode ser estendida para três dimensões. Neste caso, a definição deverá incluir todas as possíveis componentes da tensão. As componentes da tensão serão proporcional as componentes do tensor gradiente de velocidade. No capítulo 2, demonstramos que este tensor é responsável pela deformação e rotação de uma partícula de fluido, sendo possível separa-lo em uma parte simétrica e uma anti-simétrica. Ainda com respeito a deformação da partícula de fluido, podemos classificar esta deformação em termos de duas componentes, *deformação volumétrica* e *distorção*.

A primeira componente, deformação volumétrica, já foi abordado em seções anteriores (equação 4.12) e definida como:

$$\frac{1}{\delta V} \frac{D(\delta V)}{Dt} = \frac{\partial u_j}{\partial x_j}. \quad (5.33)$$

Ou seja, a medida da deformação volumétrica da partícula de fluido é dada pela soma das componentes da diagonal do tensor gradiente de velocidades.

A segunda componente é a distorção que deforma o parcel mantendo seu volume constante. Essa é sempre a componente cinemática mais importante, pois esta diretamente relacionada a força de deformação sobre o parcel. Considere uma distorção bi-dimensional de um parcel.

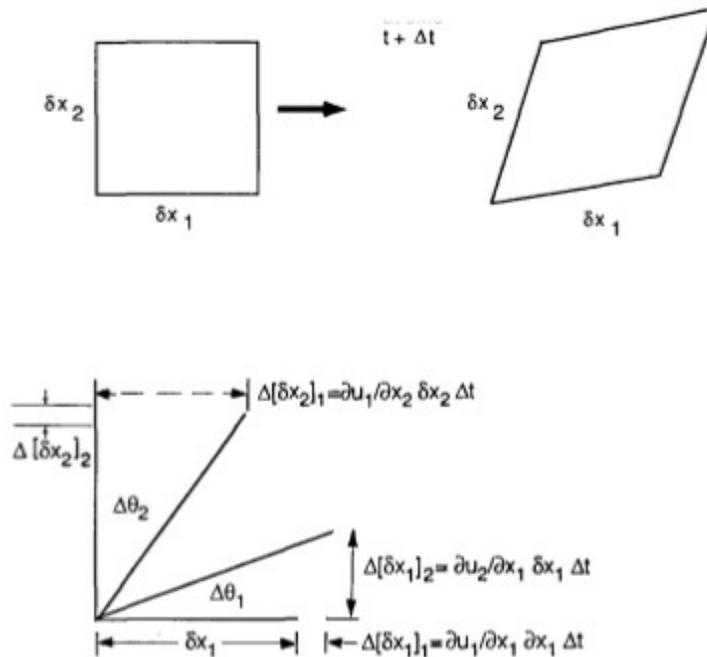


Figura 5.4: Componentes da distorção da partícula de fluido.

A deformação δx_1 inclui os efeitos de alongamento produzidos por $\partial u_1/\partial x_1$ e $\partial u_1/\partial x_2$. De forma similar, a componente δx_2 se deve a $\partial u_2/\partial x_2$ e $\partial u_2/\partial x_1$. A deformação resultante pode ser relatada a mudança do ângulo entre δx_1 e δx_2 , o qual é $\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2$, na figura 4.4.

$$\tan \theta_1 = \left[\frac{\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \delta x_1 \Delta t}{\delta x_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \delta x_1 \Delta t} \right], \quad (5.34)$$

$$\tan \theta_1 \approx \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \Delta t \quad (5.35)$$

$$\tan \theta_1 \approx \Delta\theta_1 \quad (5.36)$$

No limite onde $\Delta\theta$ e $\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta\theta_1/\Delta t = d\theta_1/dt = \partial u_2/\partial x_1$.

Da mesma forma, $d\theta_2/dt = \partial u_1/\partial x_2$. A distorção média da partícula de fluido é proporcional a variação angular,

$$\Gamma_{21} \equiv \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2), \quad (5.37)$$

$$\frac{d\Gamma_{21}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d(\theta_1 + \theta_2)}{dt}, \quad (5.38)$$

$$\frac{d\Gamma_{21}}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right). \quad (5.39)$$

Da mesma forma,

$$\frac{d\Gamma_{31}}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right), \quad (5.40)$$

$$\frac{d\Gamma_{23}}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right), \quad (5.41)$$

e generalizando,

$$\frac{d\Gamma_{ij}}{dt} = \frac{d\Gamma_{ji}}{dt}. \quad (5.42)$$

Este tensor, tensor de tensões desviatório, consiste dos elementos fora da diagonal do tensor taxa de deformação, o qual definimos como *def* \vec{u} . Por fim, a relação entre tensão e deformação pode ser representada de forma geral como:

$$\tau_{ij} \equiv \mu \frac{d\Gamma_{ij}}{dt}, \quad (5.43)$$

Este tensor representa todas as distorções da superfície da partícula de fluido devido as tensões internas.

5.4 Tensor de Tensões Geral

Para um fluido Newtoniano, o tensor de tensões é construído com base nas seguintes hipóteses:

1. Em um fluido estático, existem apenas forças normais a superfície da partícula de fluido, denominadas forças de pressão;
2. σ_{ij} é independente do fluxo de calor, depende apenas dos estados locais cinemáticos e termodinâmicos;
3. Não existem direções preferenciais;
4. A tensão é proporcional ao gradiente de velocidade.

Uma análise da equação de momento a seguir, deixa claro que a solução da dinâmica de um fluido passa pela determinação das nove componentes do tensor de tensões viscosas. Em princípio, hipóteses adicionais devem ser feitas de forma a diminuir o número de termos indeterminados. Se a partícula de fluido estiver em equilíbrio $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. Isto reduz o número de componentes indeterminadas do tensor de tensões para seis. Entretanto, mesmo que as forças de corpo sejam conhecidas, ainda existem nove termos indeterminados, seis componentes do tensor de tensões e as três componentes da velocidade u_i . Assim, para a solução completa da dinâmica, precisamos achar uma relação entre σ_{ij} e u_i .

$$\begin{aligned} \rho g_{x_1} - \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_1}(\sigma_{x_1x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\sigma_{x_2x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_3}(\sigma_{x_3x_1}) &= \rho \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) \\ \rho g_{x_2} - \frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_1}(\sigma_{x_1x_2}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\sigma_{x_2x_2}) + \frac{\partial}{\partial x_3}(\sigma_{x_3x_2}) &= \rho \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) \\ \rho g_{x_3} - \frac{\partial p}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_1}(\sigma_{x_1x_3}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\sigma_{x_2x_3}) + \frac{\partial}{\partial x_3}(\sigma_{x_3x_3}) &= \rho \left(\frac{\partial u_3}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \end{aligned}$$

5.4.1 Pressão

Da definição de fluido Newtoniano, assumimos que em um fluido estático, existem apenas forças normais a superfície da partícula de fluido, denominadas forças de pressão, de forma que:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}, \quad \sigma_{13} = \sigma_{12} = \sigma_{23} = 0, \quad (5.44)$$

e apenas $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33}$ são não nulos.

Em um fluido em movimento, a componente normal da tensão sobre uma face da partícula de fluido dependerá da orientação espacial desta face. A tensão em uma direção se relaciona ao gradiente de velocidades na mesma direção. As forças internas sobre o parcel criam tensões tangenciais e normais sobre as superfícies da partícula de fluido, sendo que a pressão será dependente da direção. Entretanto é possível obter um número que representará a pressão média para um fluido em movimento.

$$\sigma = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} \equiv -p, \quad (5.45)$$

onde σ é invariante frente rotação. Daqui para frente será definido como a pressão para um fluido estático ou em movimento.

5.4.2 Tensões de deformação

Para caso geral de um fluido em movimento, é conveniente separar a pressão das contribuições relativas as tensões de deformação pela definição através do tensor de tensões desviatório. Este é obtido do tensor de tensões viscosas a menos dos termos relativos de pressão. Em notação matricial,

$$\sigma = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix}, \quad (5.46)$$

com $\tau_{ii} = 0$. O problema agora é relacionar as componentes de τ_{ij} , as tensoes de deformação devido ao movimento do fluido, com as velocidade u_i . Dessa

5.5 Formulação da Equação de Navier-Stokes

Inicialmente iremos usar a aproximação de Stokes para reescrever o termo de tensão na equação de momento. A premissa básica da Lei de Stokes é de que a tensão é proporcional a taxa de deformação. Em notação matricial, a tal relação assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} u_{11} & u_{21} & u_{31} \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} \end{pmatrix} \\ &+ \alpha \begin{pmatrix} \nabla \cdot \vec{u} & 0 & 0 \\ 0 & \nabla \cdot \vec{u} & 0 \\ 0 & 0 & \nabla \cdot \vec{u} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Em notação simbólica,

$$\sigma = -p\mathbf{I} + \mu[\nabla\vec{u} + \nabla^*\vec{u}] + \alpha\mu\nabla \cdot \vec{u}\mathbf{I}, \quad (5.48)$$

ou

$$\sigma = -p\mathbf{I} + \mu \operatorname{def} \vec{u} + \alpha\mu\nabla \cdot \vec{u}\mathbf{I} = -p\mathbf{I} + \tau. \quad (5.49)$$

Nas equações 5.48 e 5.49, \mathbf{I} é o tensor identidade, $\mathbf{I}_{ij}=1$ se $i = j$ ou 0 se $i \neq j$. O parâmetro α é conhecido como *segunda viscosidade*. Desde que $\tau_{ii} = 0$, e

$$(2\mu + 3\alpha)\nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad (5.50)$$

$$\alpha = \frac{2}{3}. \quad (5.51)$$

Para aplicação a problemas atmosféricos, podemos sempre considerar que $\nabla \cdot \vec{u} = 0$. Isso é verdadeiro se observarmos o termo de deformação.

A equação 5.49 fornece nove equações para as nove componentes desconhecidas do tensor de tensões (somente seis são independentes). Quando é assumido a existência de viscosidade, o conjunto de equações terá solução (número igual de parâmetros e equações).

$$\rho\vec{g} - \nabla p + \nabla \cdot \{\mu \operatorname{def} \vec{u} + \alpha\nabla \cdot (\vec{u}\mathbf{I})\} = \rho \frac{D\vec{u}}{Dt}. \quad (5.52)$$

Em notação indicial,

$$g\delta_{i3} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \alpha \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right\} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \quad (5.53)$$

5.5.1 Viscosidade Turbulenta

As equações de conservação de momentum apresentadas anteriormente são válidas apenas para fluxos laminares. Na presença de turbulência, a conservação de momentum deve ser escrita em termos das velocidades médias, as quais são usualmente medidas. Para isso devemos escrever as equações com as velocidades de turbulência e obter seus valores médios. Entretanto, neste ponto assumimos que o movimento dos vórtices turbulentos transportam momentum de maneira análoga as moléculas. Assim, as tensões devido a presença de turbulência serão escritas com base na lei da fricção.

De forma geral, para fluxos atmosféricos, as tensões internas sobre o fluido são muito menores que as demais forças. Adicionalmente, as grandes escalas levam a grandes números de Reynolds, e conseqüentemente a turbulência. Ainda assim, iremos usar a conservação do momentum de duas formas:

1. Na aproximação para fluxos invícidados, onde o termo de viscosidade é desconsiderado;
2. Em regimes altamente turbulentos, onde assumimos que μ pode ser representado pela viscosidade turbulenta.

Quando usamos a aproximação para viscosidade turbulenta, o fator de viscosidade turbulenta K substitui μ . Isto implica que o fluxo é laminar-turbulento. Um fluxo médio laminar coexiste com um fluxo turbulento em pequena escala. A constante K é um tensor de ordem quatro, e representa de alguma forma a randomicidade do fluxo turbulento em pequenas escalas. Entretanto, um fator limitador para esta aproximação é o fato de que na atmosfera, K varia com a posição.

Assumindo então a presença de viscosidade turbulenta, o termo de tensão adquire a forma

$$\sigma = -p\mathbf{I} + K_1\nabla \cdot \vec{u}\mathbf{I} + K_2[\nabla\vec{u} + \nabla^*\vec{u}] = -p\mathbf{I} + \tau, \quad (5.54)$$

onde K_1 e K_2 são coeficientes escalares que substituem α e μ . Estes coeficientes dependem da distribuição da turbulência, que por sua vez depende do estado local do fluido. O termo de deformação será:

$$\nabla \cdot \tau = \nabla(K_1\nabla \cdot \vec{u}) + \nabla \cdot \{K_2(\nabla\vec{u} + \nabla^*\vec{u})\}. \quad (5.55)$$

Uma simplificação que pode ser feita quando tratamos de fluxos atmosféricos é de que a viscosidade turbulenta varia apenas na direção vertical. Por meio de identidades vetoriais apropriadas, a equação 4.86 pode ser escrita na forma,

$$\nabla \cdot \tau = (K_1 + K_2)\{\nabla^2\vec{u}\} + K_2\nabla \times \nabla \times \vec{u} + k\frac{dK_1}{dz}\nabla \cdot \vec{u} + k\frac{dK_2}{dz}(\nabla\vec{u} + \nabla^*\vec{u}). \quad (5.56)$$

Como geralmente estamos trabalhando com fluxos onde $\nabla \cdot \vec{u} = 0$,

$$\nabla \cdot \tau = K\nabla^2\vec{u} + \frac{dK_2}{dz}(u_{31} + u_{13}, u_{32} + u_{23}, 2u_{33}). \quad (5.57)$$

Se K_2 for constante,

$$\nabla \cdot \tau = K\nabla^2\vec{u}. \quad (5.58)$$

5.5.2 O Termo de Coriolis

Vamos escrever a aceleração de Coriolis em notação tensorial.

$$2\vec{w} \times \vec{u} = \vec{u}\vec{w} = u_j w_{ji} = \epsilon_{ijk} k'_j u_k, \quad (5.59)$$

e

$$\vec{k}' \equiv (0, f', f), \quad (5.60)$$

$$w \equiv \begin{pmatrix} 0 & f & -f' \\ -f & 0 & 0 \\ f' & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.61)$$

onde

$$f = 2w \operatorname{sen} \theta, f' = 2w \operatorname{cos} \theta. \quad (5.62)$$

Em coordenadas cartesianas,

$$\vec{u}\vec{w} = \vec{k}' \times \vec{u} = (f'u_3 - fu_2, fu_1, -f'u_1). \quad (5.63)$$

Para a atmosfera, $f'u_3 \ll fu_2$, (em geral para movimento horizontal); $f'u_1 \ll$ outros termos na equação vertical de momentum; e

$$2\vec{w} \times \vec{u} = \vec{u}\vec{w} \approx \epsilon_{ijk} k'_j u_k f = \vec{k}' \times \vec{u} = (-fu_2, fu_1, 0). \quad (5.64)$$

Para $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ e μ constante e igual a $\rho\nu$, obtemos:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} - g\delta_{i3} - f\epsilon_{ijk} k'_j u_k = \frac{Du_i}{Dt}. \quad (5.65)$$

A equação anterior é conhecida como equação de Navier-Stokes. Em termos das componentes,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} - g_{x_1} + fu_2 + \nu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right) &= \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3}, \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2} - g_{x_2} - fu_1 + \nu \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} \right) &= \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_3} - g_{x_3} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \right) &= \frac{\partial u_3}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3}. \end{aligned} \quad (5.66)$$

Estas equações representam uma excelente aproximação para muitos dos problemas atmosféricos. Devemos por fim relembrar as hipóteses assumidas: viscosidade constante, assumimos que o $\nabla \cdot [\mu \operatorname{def} \vec{u}] \rightarrow \mu \nabla^2 \vec{u}$, pois $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ e a constância do termo de Coriolis.

5.6 Problemas Estacionários

5.6.1 Fluxo de uma Camada Plana de Fluido sob a Ação da Gravidade

Consideramos o fluxo estacionário bidimensional de um fluido viscoso incompressível entre placas paralelas. A Figura 5.5 mostra o domínio do fluxo. O limite inferior é fixo enquanto no superior a fronteira se move em seu próprio plano a uma dada velocidade constante U na direção x_1 . Como o fluxo é bidimensional, o vetor \vec{u} se reduz a duas componentes, $\vec{u} = (u_1, u_2, 0)$, porém $u_1 = u_1(x_2)$.

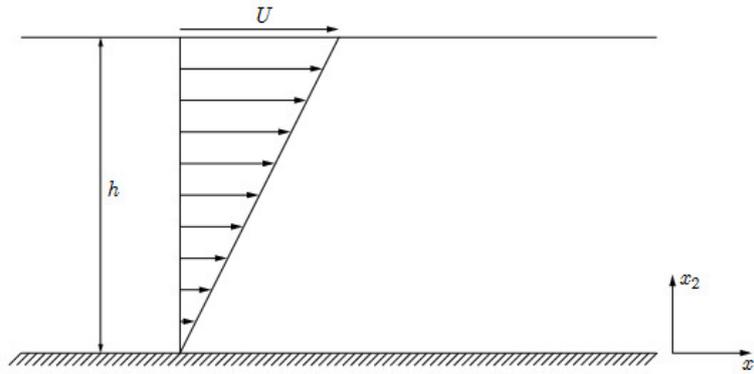


Figura 5.5: Fluxo de Couette

Da condição de compressibilidade, $\nabla \cdot \vec{u} = 0$,

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0, \quad (5.67)$$

indicando que u_2 não é função de x_2 ; é portanto uma função de x_1 . No entanto, desde que nas duas fronteiras u_2 é zero para todo x_1 , concluímos que $u_2 = 0$ em todos os lugares. A equação bidimensional de Navier-Stokes para a componente de velocidade u_1 será:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} - g_{x_1} + f u_2 + \nu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right) = \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3}. \quad (5.68)$$

Como a força gravitacional está orientada ao longo da direção negativa do eixo x_2 , $g_{x_1} = 0$. Além disso, o problema é estacionário, portanto $\partial u_1 / \partial t = 0$. O termo $u_1 \partial u_1 / \partial x_1 = 0$, pois $u_1 = u_1(x_2)$. Finalmente $u_2 \partial u_1 / \partial x_2 = 0$ pois $u_2 = 0$. Podemos assumir que a componente horizontal do gradiente de pressão é zero quando o fluxo é forçado cinematicamente pelo movimento da placa superior. Por fim, $u_3 = 0$, e a equação de Navier-Stokes fica:

$$\nu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \right) = 0 \quad (5.69)$$

Integrando,

$$\nu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) = C \quad (5.70)$$

O último resultado mostra que a tensão viscosa ao longo do fluxo é constante. Integrando 5.70,

$$\nu \int \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 = C \int dx_2 \quad (5.71)$$

$$u_1 = Ax_2 + B \quad (5.72)$$

Aplicando as condições de contorno $u_1(x_2) = 0$ e $u_1(x_2 = h) = U$, $B = 0$ e $A = U/h$, obtemos:

$$u_1 = \frac{Ux_2}{h}. \quad (5.73)$$

A tensão viscosa σ_{12} é constante e dada por:

$$\sigma_{12} = \mu \frac{du_1}{dx_2} = \mu \frac{U}{h} \quad (5.74)$$

A equação de Navier-Stokes para a direção x_2 fica:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2} - g_{x_2} = 0 \quad (5.75)$$

Integrando a última relação e considerando que p independe de x_1 ,

$$p = -\rho g x_2 + C. \quad (5.76)$$

A condição de contorno $p(x_2 = h) = 0$ impõe que $C = \rho g h$, de forma que:

$$p = \rho g (h - x_2). \quad (5.77)$$

5.6.2 Fluxo de Fluido entre Cilindros

Considere o fluxo estacionário de um fluido newtoniano viscoso incompressível entre dois cilindros concêntricos supostamente de comprimento axial infinito. Denotamos por R_1 e R_2 os raios interno e externo do cilindro, respectivamente, e w_1 e w_2 suas respectivas taxas de rotação angular, conforme mostrado na figura 5.6. Queremos calcular a velocidade u_θ . Este fluxo é conhecido pelo nome de fluxo circular de Couette. Nós desprezamos os efeitos das forças de corpo. O fluxo não tem velocidade axial, pois não há nenhum gradiente de pressão nessa direção. Além disso, devido à simetria do problema, também não depende da coordenada θ , portanto $\partial()/\partial\theta = 0$. As duas componentes de velocidades u_r e u_θ são estacionárias, e portanto independentes do tempo, sendo funções exclusivamente da coordenada radial, r , então $u_r = u_r(r)$ e $u_{theta} = u_\theta(r)$. As condições de contorno são:

$$u_r(R_1) = u_r(R_2) = 0 \quad u_\theta(R_1) = w_1 R_1 \quad u_\theta(R_2) = w_2 R_2, \quad (5.78)$$

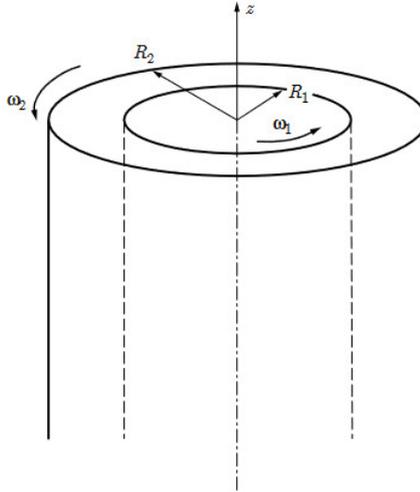


Figura 5.6: Fluxo circular de Couette.

A equação da continuidade em coordenadas cilíndricas é:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(u_\theta)}{\partial \theta} = 0, \quad (5.79)$$

mas

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} = 0, \quad (5.80)$$

e com base nas condições de contorno 5.78,

$$u_r = 0. \quad (5.81)$$

As equações de Navier-Stokes em coordenadas cilíndricas a menos da força de Coriolis são dadas na forma:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + g_r + \nu \left(\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) = \left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_{x_3} \frac{\partial u_r}{\partial x_3} - \frac{u_\theta^2}{r} \right), \quad (5.82)$$

$$-\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + g_\theta + \nu \left(\nabla^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) = \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_{x_3} \frac{\partial u_\theta}{\partial x_3} - \frac{u_\theta u_r}{r} \right). \quad (5.83)$$

Para o caso particular e questão, as equações de Navier-Stokes são aproximadas por:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{u_\theta^2}{r}, \quad (5.84)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) - \frac{u_\theta}{r^2} = 0. \quad (5.85)$$

A solução para a componente u_θ fica na forma:

$$u_\theta = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n r^n. \quad (5.86)$$

Levando a solução anterior na equação 5.85, e aplicando as condições de contorno, obtemos

$$u_\theta = Ar + \frac{B}{r} = \frac{w_2 R_2^2 - w_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} r - \frac{(w_2 - w_1) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r}, \quad (5.87)$$

depois de resolvermos as constantes A e B . O primeiro termo do lado direito corresponde à rotação de todo o fluido em torno do eixo central. Se $w_1 = w_2 = w$, a velocidade torna-se $u_\theta = wr$, o que mostra que o fluido gira como um corpo rígido em torno do eixo. O segundo termo do lado direito corresponde a uma deformação das partículas de fluido ao longo do tempo. Se $R_2 \rightarrow \infty$ e $w_2 = 0$, então temos o caso de um cilindro num fluido infinito. A velocidade $u_\theta = w_1 R_2 / r$ resulta em linhas de corrente circulares em torno do cilindro, e a distribuição de velocidade é irrotacional, ou seja, $\nabla \times \vec{u} = 0$.

O campo de pressão é obtido da equação 5.84, onde após a integração obtemos:

$$p(r) = \frac{p(R_1)}{\rho} + \frac{(R_2^2 w_2 - R_1^2 w_1)^2 r^2 - R_1^2}{(R_2^2 - R_1^2)^2} - \frac{R_1^4 R_2^4 (w_2 - w_1)^2}{2(R_2^2 - R_1^2)^2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R_1^2} \right) + \frac{2(R_2^2 w_2 - R_1^2 w_1) R_1^2 R_2^2 (w_1 - w_2)}{(R_2^2 - R_1^2)^2} \ln \frac{r}{R_1}. \quad (5.88)$$

Por sua vez, a tensão viscosa $\sigma_{\theta r}$ que age em um elemento de superfície com normal radial é:

$$\sigma_{\theta r} = \mu \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) = \mu \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_{theta}}{r} \right) = \mu r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right). \quad (5.89)$$

Combinando as equações 5.87 e 5.89, podemos escrever a seguinte equação final para a tensão viscosa:

$$\sigma_{\theta r} = -\frac{2Bu}{r^2}. \quad (5.90)$$

5.6.3 Fluxo de Poiseuille em um Tubo Cilíndrico

O fluxo de Poiseuille em um tubo circular com raio R está sujeito à ação de uma força imposta pelo gradiente de pressão na direção x_3 como representado na figura 5.7. Da equação de Navier-Stokes em coordenadas cilíndricas, determinamos que a única componente não nula da velocidade é u_3 . Considerando a simetria axial do problema e fluxo estacionário, $u_\theta = 0$, e as

únicas componentes da velocidade, u_r e u_z , são funções apenas de r . A equação da continuidade fica então:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} = 0. \quad (5.91)$$

Integrando,

$$ru_r = f(z). \quad (5.92)$$

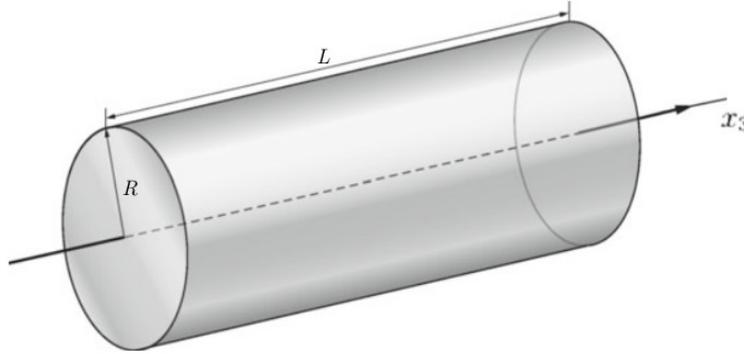


Figura 5.7:

Contudo, $u_r = 0$ para $r = R$, e concluímos que $f(z) = 0$ e, portanto, que u_r é zero em todo o fluxo. As equações de Navier-Stokes para a coordenada radial fica,

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad (5.93)$$

indicando que a pressão ao longo da direção radial é constante. A equação na direção x_3 fica,

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_3} + \nu \nabla^2 u_3 = 0. \quad (5.94)$$

O Laplaciano em coordenadas cilíndricas é,

$$\nabla^2 u_3 = \frac{1}{r} \frac{\partial u_3}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}, \quad (5.95)$$

e considerando a dependência de u_3 , o segundo termo da equação 9.94 se reduz a:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_3} + \nu \left(\frac{d^2 u_3}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_3}{dr} \right) = 0, \quad (5.96)$$

sendo o uso de derivadas ordinárias devido a dependência de u_3 com r . Ainda podemos reescrever a expressão anterior na forma:

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx_3} = \frac{\nu}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{r du_3}{dr} \right). \quad (5.97)$$

O termo do lado esquerdo depende apenas de x_3 ; do lado direito há apenas dependência de r . Portanto, os dois termos devem ser iguais a uma constante. Integrando, chegamos a:

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx_3} \int r dr = \nu \int d \left(\frac{r du_3}{dr} \right), \quad (5.98)$$

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{dp}{dx_3} \right) \frac{r^2}{2} = \nu \frac{r du_3}{dr} + A, \quad (5.99)$$

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{dp}{dx_3} \right) \frac{r^2}{2} = \nu \frac{r du_3}{dr} + A, \quad (5.100)$$

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{dp}{dx_3} \right) \int \frac{r}{2} dr = \nu \int du_3 + A \int \frac{dr}{r}, \quad (5.101)$$

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{dp}{dx_3} \right) \frac{r^2}{4} = \nu u_3 + (A) \ln(r) + B, \quad (5.102)$$

$$u_3 = \frac{1}{\nu \rho} \left(\frac{dp}{dx_3} \right) \frac{r^2}{4} + C_1 \ln(r) + C_2, \quad (5.103)$$

onde C_1 e C_2 são constantes de integração a serem determinadas pela aplicação das condições de contorno. No eixo, a velocidade não pode ser infinita, portanto C_1 deve ser zero. Além disso, o limite de não deslizamento na parede do tubo requer que $u_3(R) = 0$ e assim

$$C_2 = -\frac{1}{\rho \nu} \left(\frac{dp}{dx_3} \right) \frac{R^2}{4}, \quad (5.104)$$

e

$$u_3 = \frac{1}{4\nu\rho} \left(-\frac{dp}{dx_3} \right) (R^2 - r^2). \quad (5.105)$$

A equação anterior implica que no fluxo Poiseuille, o perfil de velocidade é parabólico. A velocidade máxima ocorre no centro do fluxo para $r = 0$.

$$u_{max} = \frac{1}{4\nu\rho} \left(-\frac{dp}{dx_3} \right) R^2 \quad (5.106)$$

O fluxo volumétrico (a quantidade de fluido deslocado através de dA , elemento infinitesimal de área do tubo, durante o tempo dt) é obtido a partir da integração da equação 5.106, ao longo de todo tubo.

$$dQ = \int (\vec{u} \cdot \hat{n}) dA dt \quad (5.107)$$

Por sua vez, a taxa de fluxo volumétrico, \dot{Q} fica:

$$\frac{dQ}{dt} = \dot{Q} = \int (\vec{u} \cdot \hat{n}) dA = 2\pi \int_0^R u_3 r dr = \frac{2\pi}{4\nu\rho} \left(-\frac{dp}{dx_3} \right) \left[R^2 \int_0^R dr - \int_0^R r^3 dr \right], \quad (5.108)$$

$$\dot{Q} = \frac{R^4 \pi}{8\nu\rho} \left(-\frac{dp}{dx_3} \right) \quad (5.109)$$

A velocidade média do fluxo, \bar{u} , é definida como:

$$\bar{u} = \frac{\dot{Q}}{A} = \frac{\frac{R^4 \pi}{8\nu\rho} \left(-\frac{dp}{dx_3} \right)}{\pi R^2}, \quad (5.110)$$

$$\bar{u} = \frac{R^2}{8\nu\rho} \left(-\frac{dp}{dx_3} \right), \quad (5.111)$$

que é exatamente $1/2$ de u_{max} . Ainda podemos escrever esta última equação na forma,

$$\Delta p = \frac{8\nu\rho L\bar{u}}{R^2}, \quad (5.112)$$

de forma a explicitar a queda de pressão no tubo ao longo de um comprimento L . A tensão ao longo da parede do cilindro (τ), escrita em termos da componente de tensão viscosa σ_{rx_3} é,

$$\tau = -\frac{\mu}{\nu\rho} \frac{du_3}{dr} \Big|_{r=R} = -\frac{dp}{dx_3} \frac{R}{2} = \frac{2\mu u_{max}}{R} = \frac{4\mu\bar{u}}{R} \quad (5.113)$$

O sinal negativo na equação 5.113 vem do fato de que τ representa a força de superfície exercida na parede do tubo pelo fluido.

Capítulo 6

Análise Dimensional e Semelhança

6.1 Introdução

É um método usado para reduzir o número e a complexidade de variáveis experimentais que afetam um determinado fenômeno físico ou experimento. Se um fenômeno depende de n variáveis dimensionais, a análise dimensional reduzirá o problema a apenas k variáveis adimensionais, onde a redução $n - k = 1, 2, 3$ ou 4 , dependendo da complexidade do problema. Na maioria das vezes, $n - k$ é igual ao número de dimensões diferentes (às vezes chamadas de básicas ou primárias ou fundamentais) que regem o problema. As quatro dimensões básicas são massa $\{M\}$, comprimento $\{L\}$, tempo $\{T\}$ e temperatura $\{\Theta\}$ ou sistema $\{MLT\Theta\}$ para abreviar. Às vezes, usa-se um sistema $\{FLT\}$, com a força $\{F\}$ sendo substituída pela massa.

A motivação para o uso da técnica é reduzir as variáveis e agrupá-las na forma adimensional, porém a economia de dinheiro e tempo são também algumas das vantagens da técnica.

A função de força F expressa a força sobre um determinado corpo imerso em um fluxo de fluido, e que dependa apenas do comprimento do corpo L , da velocidade do fluxo v , densidade do fluido ρ e viscosidade do fluido μ , ou seja, $F = f(L, v, \rho, \mu)$. Na situação onde a geometria e as condições de fluxo sejam tão complexas que as teorias não possam fornecer uma solução para a força, podemos encontrar a função $f(L, v, \rho, \mu)$ experimentalmente. De um modo geral, são necessários cerca de 10 pontos experimentais para definir uma curva. Para encontrarmos o efeito do comprimento do corpo na equação da força, temos que executar o experimento para 10 comprimentos L diferentes. Para cada L precisamos de 10 valores de v , 10 valores de ρ e 10 valores de μ , resultando em um total de 10^4 experimentos.

Por outro lado, a análise dimensional permite reduzir imediatamente a equação de força para uma forma equivalente adimensional.

$$\frac{F}{\rho v^2 L^2} = g \left(\frac{\rho v L}{\mu} \right) \quad (6.1)$$

$$C_F = g R_e \quad (6.2)$$

$$C_F = \frac{F}{\rho v^2 L^2} \quad (6.3)$$

$$R_e = \frac{\rho v L}{\mu} \quad (6.4)$$

Nesta forma, o coeficiente adimensional de força C_F é função apenas do número de Reynolds R_e . Precisamos apenas de 10 experimentos para apenas 10 valores da variável adimensional número de Reynolds $\frac{\rho v L}{\mu}$ de forma a determinarmos g . Neste caso precisamos apenas variar a

velocidade v . Isso implica na redução drástica de custos e tempo. A função g é diferente da função f , no entanto nenhuma informação é perdida com o uso da técnica. Adicionalmente, a análise dimensional fornece as leis de escala que permitem converter dados de um modelo pequeno e barato para obter as informações para um protótipo maior e mais valioso. Não precisamos construir um avião em escala real para determinarmos se ele tem ou não uma força de sustentação suficiente. Medimos a força de sustentação em um pequeno modelo e usamos a lei de escala para prever a força de sustentação em um protótipo do tamanho natural. Há algumas regras que precisamos explicar para determinar as leis de escala. Quando a lei de escala é válida, dizemos que existe uma relação de similaridade entre o modelo e o protótipo. No caso simples da equação 2.1, é obtida a similaridade se o número de Reynolds for o mesmo para o modelo e para o protótipo porque a função g requer que o coeficiente de força seja também o mesmo:

$$\text{Se } Re_m = Re_p, \text{ então } Cf_m = Cf_p$$

onde os índices m e p significam modelo e protótipo. Isto significa que:

$$\frac{F_p}{F_m} = \frac{\rho_p}{\rho_m} \left(\frac{v_p}{v_m} \right)^2 \left(\frac{L_p}{L_m} \right)^2$$

para os dados tomados quando $\rho_p V_p L_p / \mu_p = \rho_m V_m L_m / \mu_m$. A Equação anterior é uma lei de escala: se você medir a força no modelo para um certo número de Reynolds, a força no protótipo para o mesmo número de Reynolds é igual ao produto da força no modelo pela relação de massas específicas, pelo quadrado da relação entre as velocidades e pelo quadrado da relação de comprimentos.

Exemplo 1 - O Copépode é um crustáceo aquático com aproximadamente 1 mm de diâmetro. Queremos saber qual é a força de arrasto sobre o copépode quando ele se move lentamente em água doce. Um modelo em escala 100 vezes maior é construído e testado em glicerina com $v=30$ cm/s. O arrasto medido sobre o modelo é de 1,3 N. Para condições de similaridade, quais são a velocidade e o arrasto sobre o copépode real na água? Considere que a equação 2.1 se aplica e que a temperatura é de 20° .

Solução: Primeiro o cálculo da velocidade.

As escalas de comprimento são $L_m = 100\text{mm}$ e $L_p = 1\text{mm}$. Partindo do número de Reynolds,

$$Re_m = Re_p$$

$$Re_m = \frac{\rho_m v_m L_m}{\mu_m}$$

$$Re_p = \frac{\rho_p v_p L_p}{\mu_p}$$

Dados para o modelo: $\mu_{\text{água}} = 0.001\text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$ e $\rho_{\text{água}} = 998\text{kg}/(\text{m}^3)$. Dados para o protótipo: $\mu_{\text{glicerina}} = 1.5\text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$ e $\rho_{\text{água}} = 1263\text{kg}/(\text{m}^3)$.

$$Re_m = Re_p$$

$$\frac{\rho_m v_m L_m}{\mu_m} = \frac{\rho_p v_p L_p}{\mu_p}$$

$$\frac{(1263\text{kg}/\text{m}^3)(0.3\text{m}/\text{s})(0.1\text{m})}{1.5\text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s})} = \frac{(998\text{kg}/\text{m}^3)(v_p)(0.001\text{m})}{0.001\text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s})}$$

Resolvendo para v_p ,

$$v_p = 0.0253m/s = 2.53cm/s$$

Usando a velocidade calculada anteriormente, igualamos os coeficientes de força.

$$\begin{aligned} C_{F_m} &= \frac{F_m}{\rho_m v_m^2 L_m^2} = \frac{1.3N}{(1263kg/m^3)(0.3m/s)^2(0.1m)^2} = 1.14 = C_{F_m} \\ &= \frac{F_p}{\rho_p v_p^2 L_p^2} = \frac{F_p}{(998kg/m^3)(0.0253m/s)^2(0.001m)^2} \end{aligned}$$

Resolvendo para F_p ,

$$F_p = 7.3 \times 10^{-7} N$$

6.2 Análise Dimensional

Princípio da Homogeneidade Dimensional (PHD): Se uma equação realmente expressa uma relação adequada entre variáveis em um processo, será dimensionalmente homogêneo; ou seja, cada um de seus termos aditivos têm as mesmas dimensões.

Todas as equações da Mecânica seguem o PHD. A equação para queda livre dos corpos é um exemplo. Todos os termos possuem a mesma dimensão, que neste caso é comprimento $\{ L \}$.

$$Y = Y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \quad (6.5)$$

Isso significa que a equação é dimensionalmente homogênea. O mesmo é observado na equação de Bernoulli para um fluxo incompressível. Todos os termos possuem a dimensão $\{ ML^2 T^{-2} \}$,

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho} + z = C \quad (6.6)$$

o que indica que a equação é consistente para qualquer sistema de unidades.

Definições:

- **Variáveis Dimensionais:** São quantidades que variam durante um experimento e podem ser graficadas de forma a permitir a apresentação dos dados.
- **Constantes Dimensionais:** Podem variar de experimento para experimento, mas se mantêm constante ao longo de um experimento particular. Na equação 2.5 são Y_0 , v_0 e g , e na equação 2.6 ρ , g e C . Todas elas têm dimensões e, concebivelmente, podem ser adimensionais. São normalmente usados para ajudar a adimensionalizar as variáveis no problema.
- **Constantes Puras:** São constantes que não tem dimensão e nunca terão. Surgem da manipulação matemática. Na equação 2.5 são $\frac{1}{2}$ e o expoente 2. $\int t dt = \frac{1}{2} t^2$. Outras constantes puras são o número π e o número de Neper e .

A operação de integração e diferenciação podem mudar a dimensão de uma equação, mas não afetam a sua homogeneidade. Integrando ou diferenciando a equação 2.1, obtemos:

$$\int Y dt = Y_0 t + \frac{1}{2} v_0 t^2 + \frac{1}{6} g t^3 \quad (6.7)$$

$$\frac{dY}{dt} = v_0 + g t \quad (6.8)$$

A equação 2.7 possui agora dimensões de $\{LT\}$ enquanto que a forma derivada da equação 2.7 possui dimensões de $\{LT^{-1}\}$. A motivação por trás da Análise Dimensional reside no fato de que qualquer equação dimensionalmente homogênea pode ser apresentada em uma forma adimensional completamente equivalente a qual é mais compacta. Geralmente existe distintos métodos para a apresentação de dados adimensionais.

De forma ilustrativa, voltamos a equação 2.5. Do ponto de vista da análise dimensional, selecionamos 5 termos nesta equação (Y , Y_0 , v_0 , t , g). Podemos dividir estes termos entre variáveis (Y e t), ou seja, os dados que devem ser obtidos e serão graficados para análise, e parâmetros (Y_0 , v_0 , g) que são quantidades cujos os efeitos sobre as variáveis queremos determinar. Sempre podemos utilizar esta metodologia para início da análise.

Para obter uma forma adimensional para a equação 2.5, precisamos determinar quantas dimensões existem entre todos os termos da equação. Considerando cada termo, $\{Y\}=\{Y_0\}=\{L\}$, $\{t\}=\{T\}$, $\{v_0\}=\{LT^{-1}\}$, $\{g\}=\{LT^{-2}\}$, observamos que a equação possui apenas duas dimensões; comprimento $\{L\}$ e tempo $\{T\}$. Então, entre todos os parâmetros, selecionamos dois deles para serem usados como parâmetros de escala na determinação das variáveis adimensionais. O que sobra será o parâmetro básico, cujo efeito será apresentado no gráfico. A escolha dos parâmetros de escala não afeta os dados em si, mas sim a forma como serão apresentados. Na continuidade desta discussão apresentaremos três opções para a escolha dos parâmetros de escala.

Opção 1 - Parâmetros de escala Y_0 e v_0 ; efeito da gravidade g .

Tomando como parâmetros de escala Y_0 e v_0 , o deslocamento e o tempo respectivamente, existe apenas uma escolha para cada um de forma que a equação 2.5 se torne adimensional. Estas escolhas são:

$$Y^* = \frac{Y}{Y_0}, \quad t^* = \frac{v_0 t}{Y_0} \quad (6.9)$$

Retornando a equação 2.5,

$$Y = Y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \quad (6.10)$$

o que dimensionalmente é representado por:

$$(L) = (L) + \underbrace{\frac{(L)}{(T)}(T) + \frac{(L)}{(T^2)}(T^2)}_{m = m + \frac{m}{s} s + \frac{m}{s^2} s^2}$$

Substituindo 2.9 em 2.10, ou de outra forma, dividindo a equação 2.10 por Y_0 , chegamos a:

$$\frac{Y}{Y_0} = \frac{Y_0}{Y_0} + \frac{v_0 t}{Y_0} + \frac{1}{Y_0} \frac{1}{2} g t^2 \quad (6.11)$$

A equação adimensional equivalente a equação 2.10 toma a seguinte forma:

$$Y^* = 1 + \underbrace{t^*}_{\frac{v_0 t}{Y_0}} + \dots \quad (6.12)$$

O último termo é resolvido como:

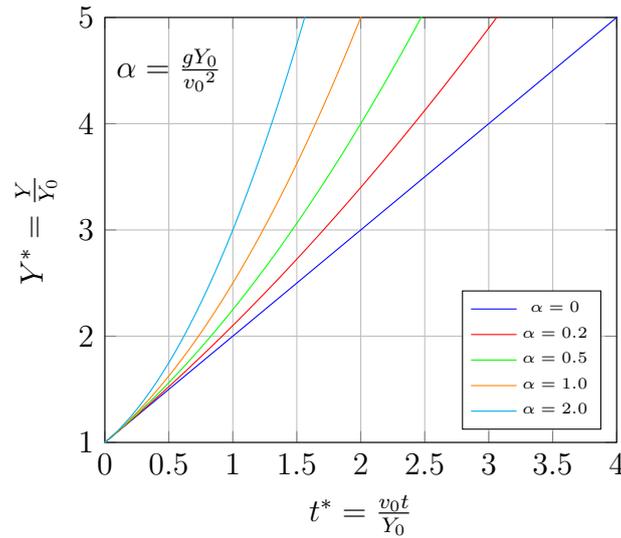


Figura 6.1: Forma equivalente adimensional de apresentação dos dados para o problema da queda dos corpos usando Y_0, v_0 como parâmetros de escala. Efeito da gravidade g .

$$t^* = \frac{v_0 t}{Y_0} \quad (6.13a)$$

$$t^{*2} = \left(\frac{v_0 t}{Y_0}\right)^2 = \frac{v_0^2 t^2}{Y_0^2} \quad (6.13b)$$

Isolamos t^2 , e substituímos no terceiro termo a direita de 2.11.

$$t^2 = \frac{Y_0^2 t^{*2}}{v_0^2} \quad (6.14)$$

$$\frac{1}{Y_0} \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{Y_0} \frac{1}{2} g \frac{Y_0^2 t^{*2}}{v_0^2} \quad (6.15)$$

Neste ponto definimos $\alpha = (g Y_0 / v_0^2)$ de forma que:

$$\frac{1}{Y_0} \frac{1}{2} g \frac{Y_0^2 t^{*2}}{v_0^2} = \frac{1}{2} \alpha t^{*2} \quad (6.16)$$

Assim, a equação adimensional para o movimento de queda livre fica:

$$Y^* = 1 + t^* + \frac{1}{2} \alpha t^{*2} \quad (6.17)$$

Os resultados do procedimento seguido são apresentados na figura 2.1.

Opção 2 - Parâmetros de escala v_0 e g ; efeito da posição inicial.

Novamente apenas uma escolha é possível.

$$Y^{**} = \frac{Y g}{v_0^2}, \quad t^{**} = t \frac{g}{v_0} \quad (6.18)$$

Utilizando o mesmo procedimento anterior, obtemos uma equação adimensional equivalente para a queda dos corpos que evidencia o efeito da posição inicial no movimento.

$$Y^{**} = \alpha + t^{**} + \frac{1}{2} t^{**2} \quad (6.19)$$

Na equação anterior o parâmetro alfa é definido como anteriormente. O resultado é apresentado na figura 2.2. O mesmo parâmetro único α aparece novamente, e explicita o efeito do deslocamento inicial, que apenas move as curvas para cima sem mudanças em suas formas.

$$\alpha = \frac{gY_0}{v_0^2}$$

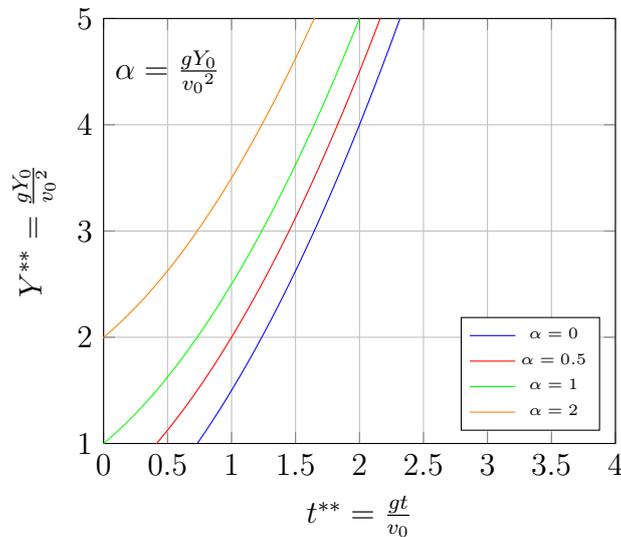


Figura 6.2: Forma equivalente adimensional de apresentação dos dados para o problema da queda dos corpos usando g, v_0 como parâmetros de escala. Efeito da posição inicial Y_0 .

Opção 3 - Parâmetros de escala Y_0 e g ; efeito da velocidade inicial.

Mais uma vez, apenas uma escolha é possível.

$$Y^{***} = 1 + \beta t^{***} + \frac{1}{2} t^{***2} \quad (6.20)$$

O parâmetro beta é definido em termos das constantes dimensionais Y_0 e g , e pela variável dimensional v_0 .

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \frac{v_0}{\sqrt{gY_0}} \quad (6.21)$$

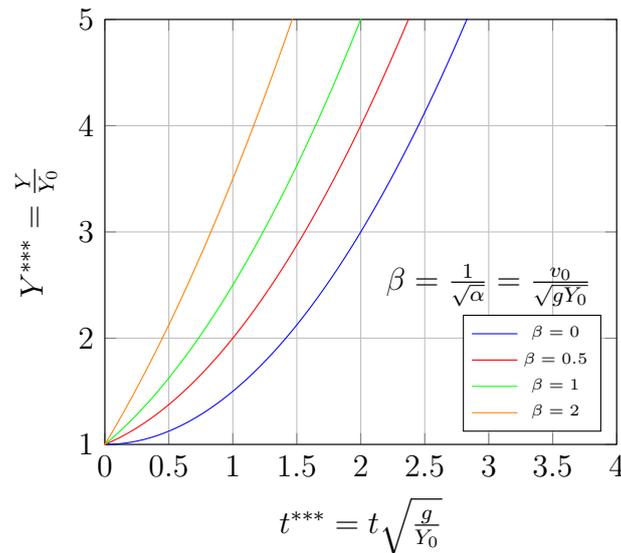


Figura 6.3: Forma equivalente adimensional de apresentação dos dados para o problema da queda dos corpos usando gY_0 como parâmetros de escala. Efeito da velocidade inicial.

A apresentação equivalente adimensional dos dados para a opção três se encontra na figura 2.3. Novamente o parâmetro α aparece nos cálculos. As escolhas dos parâmetros de escala são livres, e devem ser feitas de forma a evidenciar o efeito de um parâmetro dimensional sobre os demais. Os resultados apresentados na figura 2.3 evidenciam que o aumento da velocidade inicial leva a um aumento no deslocamento, sendo este aumento proporcional ao tempo.

Voltando ao problema original, o qual envolvia cinco quantidades, este foi reduzido por meio da análise dimensional a três quantidades na forma:

$$Y' = f(t', \alpha), \quad \alpha = \frac{gY_0}{v_0^2} \quad (6.22)$$

A redução $5 - 3 = 2$ deve ser igual ao número de dimensões envolvidas no problema $\{L, T\}$. A escolha dos parâmetros de escala é arbitrária, entretanto o significado do parâmetro adimensional é diferente em cada caso: gravidade adimensional, posição inicial e velocidade inicial. Todos os gráficos apresentam a mesma informação, porém mudam sua forma conforme a escolha dos parâmetros de escala.

6.3 Teorema dos Pi(II)

Primeira Parte do Teorema dos Pi - Se um processo físico satisfaz o Princípio da Homogeneidade Dimensional e envolve n variáveis dimensionais, esse pode ser reduzido a uma relação entre somente k variáveis adimensionais ou Π 's. A redução $j = n - k$ é igual ao maior número de variáveis que não formam grupos Π 's entre si, e é sempre menor ou igual ao número de dimensões usadas para descrever o problema.

Considere novamente a equação da força que age sobre um corpo de comprimento L imerso em um fluido que tem velocidade v , densidade ρ e viscosidade μ . Suponha que não existam teorias que possam apresentar uma solução para a equação da força. Neste contexto devemos determinar F experimentalmente. A expressão da força contém cinco variáveis, F , L , v , ρ e μ .

$$F = f(L, v, \rho, \mu) \quad (6.23)$$

Todas as variáveis são descritas por 3 dimensões $\{MLT\}$. Então, $n = 5$ e $j \leq 3$. Seguindo o teorema, devemos reduzir o problema a k grupos Π , onde $k = n - j \geq 5 - 3 = 2$. Como

resultado, obtemos duas variáveis adimensionais Π_1 e Π_2 .

Segunda Parte do Teorema dos Π - Ache a redução j , então selecione j parâmetros de escala os quais não formam grupos Π 's entre si. Cada grupo será um produto de potências destes j parâmetros de escala somados a um parâmetro ao qual é associado um expoente não nulo. Cada grupo Π encontrado é independente um do outro.

Suponha que um fenômeno físico envolve cinco variáveis, $v_1 = f(v_2, v_3, v_4, v_5)$. Adicionalmente, considere que existem três dimensões associadas ao problema, $\{MLT\}$. Logo, $k = 5 - 3 = 2$, e o teorema nos diz que neste caso teremos apenas dois grupos Π 's independentes. Assim, escolhamos por conveniência três variáveis dimensionais que não formam grupos Π 's entre si. Escolhamos v_2, v_3 e v_4 , e formamos os grupos Π por meio do produto de potências destas variáveis somados a uma variável adicional que pode ser v_1 ou v_5 .

$$\Pi_1 = (v_2)^a(v_3)^b(v_4)^c v_1, \quad \Pi_2 = (v_2)^a(v_3)^b(v_4)^c v_5 \tag{6.24}$$

6.4 Protocolo de Aplicação do Teorema dos $\Pi(\Pi)$

São seis os passos necessários para a aplicação do teorema.

1. Listar e contar todas as n variáveis que estão envolvidas no problema.
2. Listar a dimensão de cada variável envolvida de acordo com os sistemas $\{MLT\Theta\}$ ou $\{FLT\Theta\}$

Grandeza	Símbolo	Dimensões	
		$MLT\Theta$	$FLT\Theta$
Comprimento	L	L	L
Área	A	L^2	L^2
Volume	V	L^3	L^3
Velocidade	V	LT^{-1}	LT^{-1}
Aceleração	dV/dt	LT^{-2}	LT^{-2}
Velocidade do som	a	LT^{-1}	LT^{-1}
Vazão volumétrica	Q	L^3T^{-1}	L^3T^{-1}
Vazão mássica	\dot{m}	MT^{-1}	FTL^{-1}
Pressão, tensão	p, σ, τ	$ML^{-1}T^{-2}$	FL^{-2}
Taxa de deformação	$\dot{\epsilon}$	T^{-1}	T^{-1}
Ângulo	θ	Nenhuma	Nenhuma
Velocidade angular	ω, Ω	T^{-1}	T^{-1}
Viscosidade	μ	$ML^{-1}T^{-1}$	FTL^{-2}
Viscosidade cinemática	ν	L^2T^{-1}	L^2T^{-1}
Tensão superficial	γ	MT^{-2}	FL^{-1}
Força	F	MLT^{-2}	F
Momento, torque	M	ML^2T^{-2}	FL
Potência	P	ML^2T^{-3}	FLT^{-1}
Trabalho, energia	W, E	ML^2T^{-2}	FL
Massa específica	ρ	ML^{-3}	FT^2L^{-4}
Temperatura	T	Θ	Θ
Calor específico	c_p, c_v	$L^2T^{-2}\Theta^{-1}$	$L^2T^{-2}\Theta^{-1}$
Peso específico	γ	$ML^{-2}T^{-2}$	FL^{-3}
Condutividade térmica	k	$MLT^{-3}\Theta^{-1}$	$FT^{-1}\Theta^{-1}$
Coefficiente de expansão	β	Θ^{-1}	Θ^{-1}

Figura 6.4: Dimensões das grandezas físicas.

3. Determine j . Um possível procedimento inicial é assumir que j é igual ao número de dimensões presentes, e procure por j variáveis que não formam um produto Π entre si. Caso não obtenha sucesso, reduza j de 1 e continue.
4. Selecione os parâmetros de escala os quais não formam um produto Π entre si. Prefira escolher a densidade ρ , a velocidade v ou comprimento L .
5. Adicione uma variável a mais j e forme um produto de potências. Algebricamente ache os expoentes que tornam o produto adimensional. Realizado este passo sequencialmente de forma a determinar todos os produtos Π , a partir de $k = n - j$.

6. Apresente a equação adimensional final, e revise seu trabalho para garantir que todos os grupos Π são adimensionais.

Exemplo 2.1

A partir da função de força,

$$F = f(L, v, \rho, \mu)$$

determine os grupos Π independentes e apresente a equação adimensional equivalente.

1. Escreva a função e conte as variáveis:

$$F = f(L, v, \rho, \mu)$$

$$n = 5 \text{ variáveis}$$

2. Listar a dimensão das cinco variáveis:

F	L	v	ρ	μ
MLT^{-2}	L	LT^{-1}	ML^{-3}	$ML^{-1}T^{-1}$

Tabela 6.1: Dimensão das variáveis.

3. Ache j :

Nenhuma variável apresenta dependência com Θ , assim o número máximo de dimensões é três(3), de forma que $j \leq 3$. Observando a tabela, inferimos que as variáveis L , v e ρ não formam grupos Π entre si. As variáveis que formam grupos Π entre si possuem necessariamente as mesmas dimensões. Logo, $j = 3$, e $n - j = 5 - 3 = 2 = k$. O resultado indica que para este problemas podemos obter apenas dois grupos Π 's independentes entre si.

4. Não é necessário realizar o passo 4. O grupo L , v e ρ é suficiente.

5. Combine o grupo L , v e ρ com uma variável adicional para achar os grupos Π 's.

$$\Pi_1 = L^a v^b \rho^c F = (L)^a (LT^{-1})^b (ML^{-3})^c (MLT^{-2}) = M^0 L^0 T^0$$

Equação das Componentes:

Comprimento (L)

$$a + b - 3c + 1 = 0$$

Massa (M)

$$c + 1 = 0$$

Tempo (T)

$$-b - 2 = 0$$

Resolvendo explicitamente,

$$a = -2, \quad b = -2, \quad c = -1$$

Então, o primeiro grupo Π será:

$$\Pi_1 = L^{-2} v^{-2} \rho^{-1} F$$

$$\Pi_1 = \frac{F}{L^2 v^2 \rho}$$

$$\Pi_2 = L^a v^b \rho^c \mu^{-1} = (L)^a (LT^{-1})^b (ML^{-3})^c (ML^{-1}T^{-1})^{-1} = M^0 L^0 T^0$$

Equação das Componentes:

Comprimento (L)

$$a + b - 3c + 1 = 0$$

Massa (M)

$$c - 1 = 0$$

Tempo (T)

$$-b + 1 = 0$$

Resolvendo explicitamente,

$$a = b = c = 1$$

Então, o segundo grupo Π será:

$$\Pi_2 = L^1 v^1 \rho^1 \mu^{-1}$$

$$\Pi_2 = \frac{\rho v L}{\mu}$$

Por fim, o teorema dos Π garante a validade da função equivalente adimensional devido a independência entre os grupos Π .

$$\Pi_1 = g(\Pi_2)$$

$$\frac{F}{L^2 v^2 \rho} = g\left(\frac{\rho v L}{\mu}\right)$$

Por razões históricas, o primeiro grupo adimensional é conhecido como **coeficiente adimensional de força**, enquanto que o segundo grupo adimensional é conhecido como **número de Reynolds**. Dessa forma,

$$C_f = \frac{F}{L^2 v^2 \rho}$$

$$R_e = \frac{\rho v L}{\mu}$$

ou

$$C_F = g(R_e)$$

Observação: A função g só pode ser determinada experimentalmente.

Exemplo 2.2

Voltamos ao problema da queda livre, equação 2.1,

$$Y = f(Y_0, v_0, g, t)$$

Reduza a relação da queda dos corpos a uma função adimensional das variáveis. Por que existem três diferentes formulações?

1. Escreva a função e conte as variáveis:

$$Y = f(Y_0, v_0, g, t)$$

$n = 5$ variáveis

2. Listar a dimensão das cinco variáveis:

Y	Y ₀	v ₀	g	t
L	L	LT ⁻¹	LT ⁻²	T

Tabela 6.2: Dimensão das variáveis.

3. Ache j :

O número máximo de dimensões é dois(2), de forma que $j \leq 2$. Observando a tabela inferimos que as variáveis v_0 e g não formam grupos Π entre si. As variáveis que formam grupos Π entre si possuem necessariamente as mesmas dimensões. Logo, $j = 2$, e $n - j = 5 - 2 = 3 = k$. O resultado indica que para este problemas podemos obter três grupos Π 's independentes entre si.

4. Não é necessário realizar o passo 4. O grupo L , v e ρ é suficiente.

5. Combine o grupo Y_0 , v_0 com uma variável adicional para achar os grupos Π 's.

$$\Pi_1 = Y_0^a v_0^b Y^1 = (L)^a (LT^{-1})^b (L^1) = M^0 L^0 T^0$$

Equação das Componentes:

Comprimento (L)

$$a + b + 1 = 0$$

Tempo (M)

$$-b = 0$$

Resolvendo explicitamente,

$$a = -1, \quad b = 0$$

Então, o primeiro grupo Π_1 será:

$$\Pi_1 = Y_0^{-1} Y v_0^0 = \frac{Y}{Y_0} = Y^*$$

$$\Pi_2 = g^1 Y_0^c v_0^d = (LT^{-2})^1 (L)^c (LT^{-1})^d = L^0 T^0$$

Equação das Componentes:

Comprimento (L)

$$1 + c + d = 0$$

Tempo (M)

$$-2 - d = 0$$

Resolvendo explicitamente,

$$c = 1, \quad d = -2$$

O segundo grupo Π será:

$$\Pi_2 = gY_0v_0^{-2} = \frac{gY_0}{v_0^2} = \alpha$$

$$\Pi_3 = tY_0^e v_0^f = (T)(L)^e (LT^{-1})^f = L^0 T^0$$

Equação das Componentes:

Comprimento (L)

$$e + f = 0$$

Tempo (T)

$$1 - f = 0$$

Resolvendo explicitamente,

$$f = 1, \quad e = -1$$

Então, o terceiro grupo Π será:

$$\Pi_3 = tY_0^{-1}v_0 = \frac{tv_0}{Y_0} = t^*$$

A equação adimensional equivalente é escrita como:

$$\Pi_1 = fcn(t^*, \alpha) = fcn\left(\frac{tv_0}{Y_0}, \frac{gY_0}{v_0^2}\right)$$

A equação anterior é equivalente a equação 2.5, porém aqui a dependência com as variáveis não é explícita. A determinação de fcn só é possível por experimentação. Se, por outro lado escolhemos combinar V_0 e g com uma variável adicional,

$$\Pi_1 = Yv_0^a g^b, \quad \Pi_2 = tv_0^c g^d, \quad \Pi_3 = Y_0 v_0^e g^f,$$

e resolvemos os expoentes,

$$a = -2, \quad b = 1, \quad c = -1, \quad d = 1, \quad e = 1, \quad f = -2,$$

obtemos:

$$\Pi_1 = Y^{**} = \frac{Yg}{v_0^2}, \quad \Pi_2 = t^{**} = \frac{tg}{v_0}, \quad \Pi_3 = \alpha = \frac{gY_0}{v_0^2}$$

Combinando Y_0 e g com uma variável adicional,

$$\Pi_1 = YY_0^a g^b, \quad \Pi_2 = tY_0^c g^d, \quad \Pi_3 = v_0 Y_0^e g^f,$$

e resolvemos os expoentes,

$$a = -1, \quad b = 0, \quad c = -1/2, \quad d = 1/2, \quad e = -1/2, \quad f = -1/2,$$

obtemos:

$$\Pi_1 = Y^{***} = \frac{Y}{Y_0}, \quad \Pi_2 = t^{***} = t\sqrt{\frac{g}{Y_0}}, \quad \Pi_3 = \beta = \frac{v_0}{\sqrt{gY_0}}$$

A análise dimensional aqui produziu os mesmos grupos pi que o uso dos parâmetros de escala com a equação 2.5. Apareceram três formulações diferentes, porque podíamos escolher três diferentes pares de variáveis repetidas para completar o teorema dos Π .

6.5 Similaridade

Considere a figura 2.5 a seguir. Nesta figura é apresentado um protótipo de um segmento de uma asa. Podemos estar em uma situação na qual queremos determinar qual a força de arrasto $F = f(L, v, \rho, \mu)$ sobre o segmento em condições reais de voo. Poderíamos usar a análise dimensional para reduzir o número de variáveis como feito anteriormente, de forma a obtermos uma equação equivalente adimensional. Os benefícios deste procedimento já foram apresentados anteriormente. Adicionalmente, a análise dimensional estabelece leis de escala. Isto implica que podemos estudar e obter informações pertinentes sobre a força de arrasto no protótipo a partir de um modelo "barato e pequeno". De outra forma, se existe similaridade entre o modelo e o protótipo, leis de escala podem ser aplicadas e informações sobre o protótipo podem ser obtidas a partir do modelo.

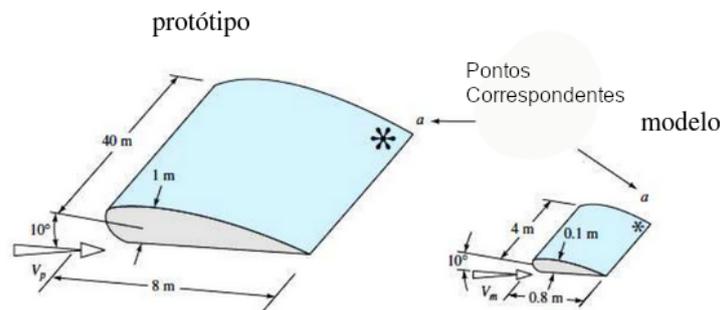


Figura 6.5: Componentes normal e tangencial da força.

Do ponto de vista matemático, a igualdade das variáveis adimensionais independentes assegura a similaridade completa. Isto é de fácil obtenção matematicamente, mas na maioria das vezes é impraticável via experimento. Por isso, ao invés de discutirmos similaridade completa, devemos tratar de tipos particulares como as similaridades geométrica, cinemática e dinâmica.

6.5.1 Similaridade Geométrica

A similaridade geométrica envolve dimensões geométricas. Neste contexto, um modelo e seu protótipo são geometricamente similares se e somente se todas as dimensões do modelo em todas as três coordenadas têm a mesma proporção de escala com o protótipo. Isso implica que todas as escalas de comprimento devem ser iguais. (É como se você tirasse uma fotografia do protótipo e reduzisse ou ampliasse até que este tivesse o mesmo tamanho do modelo). Se o modelo tiver 1/10 do tamanho do protótipo, seu comprimento, largura e altura devem ter esta mesma proporção. Não apenas isso, mas também toda a sua forma deve ter um décimo do tamanho e tecnicamente falamos de pontos homólogos, que são pontos que possuem a mesma relação de localização. Por exemplo, o nariz do protótipo é homólogo ao nariz do modelo. A ponta da asa esquerda do protótipo é homóloga à ponta da asa esquerda do modelo. Então, a similaridade geométrica requer que todos os pontos homólogos sejam relacionados pela mesma relação linear de escala. Isso se aplica à geometria do fluido, bem como à geometria do modelo. Observação: Todos os ângulos são preservados na similaridade geométrica. Todas as direções de fluxo são preservadas. As orientações do modelo e do protótipo em relação ao entorno devem ser idêntico.

6.5.2 Similaridade Cinemática

A similaridade cinemática implica que o modelo e o protótipo tenham a mesma razão de escala de comprimento e tempo. O resultado é que a relação de escala de velocidade será

a mesma para ambos. A equivalência de escala de comprimento simplesmente implica em similaridade geométrica, mas a equivalência em escala de tempo pode exigir considerações dinâmicas adicionais.

Geralmente, um modelo geometricamente semelhante é colocado em um de fluxo de laboratório para simular o objeto real dentro do regime de fluxo geralmente muito maior. Neste caso é necessário ter similaridade nos regimes de fluxo além de similaridade geométrica. Dois fluxos são ditos semelhantes quando as razões entre as velocidades e as acelerações são constantes. A similaridade de fluxo implica que a razão entre $v(x, t)$ e $a(x, t)$ do fluxo do modelo e $v'(x, t)$ e $a'(x, t)$ do fluxo do protótipo é constante no tempo. A figura a seguir representa o fluxo em torno de um edifício. Quando os fluidos usados no modelo e no protótipo são idênticos, suas linhas de fluxo em torno dos objetos parecerão idênticas e fica estabelecida a similaridade cinética.

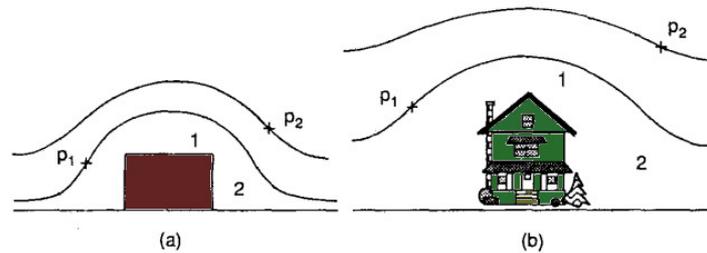


Figura 6.6: Fluxo de ar em torno do modelo (a) em um túnel de ar e (b) de uma casa na atmosfera.

Nestes casos, um campo de fluxo real em larga escala pode ser modelado em laboratório. No entanto, em muitos problemas, é necessário determinar as forças sobre os objetos. Neste caso, para modelar a força inercial no objeto de pequena escala, poderá ser necessário considerar a substituição do fluido usado no modelo. Esta generalização do modelo simples geometricamente similar nos leva a exigência de que a proporção das várias forças no modelo e no fluxo do protótipo tenham razões constantes.

6.5.3 Similaridade Dinâmica

A similaridade dinâmica implica que o modelo e o protótipo têm as mesmas razões de escala de comprimento, escala de tempo e escala de força (ou escala de massa). Novamente, a similaridade geométrica é um primeiro requisito; sem ela não se pode prosseguir. Então a similaridade dinâmica existe, simultaneamente com a similaridade cinemática, se os coeficientes de pressão e de força do modelo e do protótipo forem idênticos.

Matematicamente, a lei de Newton para qualquer partícula de fluido requer que a soma da força de pressão, da força de gravidade e da força de arrasto sejam iguais ao termo da aceleração ou força de inércia.

$$F_p + F_g + F_a = F_i \quad (6.25)$$

A similaridade dinâmica, se houver, garante que cada uma das forças estará na mesma razão e terão direções equivalentes entre o modelo e o protótipo. A figura a seguir apresenta um exemplo de similaridade dinâmica para o escoamento sob uma comporta de fundo. Os polígonos de força em pontos homólogos têm exatamente a mesma forma se os números de Reynolds e de Froude¹ forem iguais (desprezando a tensão superficial e a cavitação). A similaridade cinemática é também assegurada por essas leis de modelo.

¹É definido como um parâmetro adimensional dado por: $\frac{v^2}{gL}$

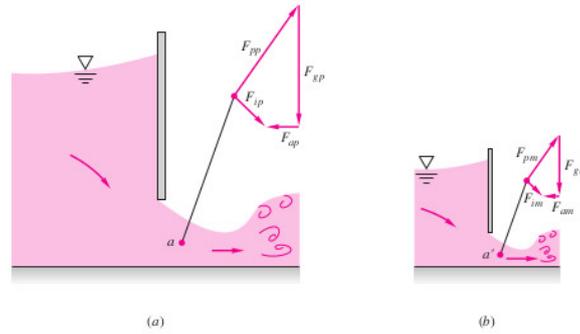


Figura 6.7: Similaridade dinâmica no escoamento sob uma comporta de fundo. O modelo e o protótipo produzem polígonos de força homólogos idênticos se os números de Reynolds e de Froude tiverem os mesmos valores correspondentes: (a) protótipo; (b) modelo. Deflexão causada pela força de Coriolis.

6.6 Lista de Problemas

1. Quando testada em água a 20°C escoando a 2 m/s , uma esfera de 8 cm de diâmetro apresenta um arrasto de 5 N . Qual será a velocidade e a força de arrasto sobre um balão meteorológico de $1,5\text{ m}$ de diâmetro atracado no ar nas condições padrão ao nível do mar sob condições dinamicamente semelhantes?

Solução:

A viscosidade da água e da atmosfera padrão a 20°C é $1.003 \times 10^{-3}\text{ N s/m}^2$ e $1.80 \times 10^{-5}\text{ N s/m}^2$ respectivamente. A densidade da água e da atmosfera por sua vez é 998 kg/m^3 e 1.20 kg/m^3 respectivamente. Para determinarmos a força de arrasto no balão, precisamos saber qual a velocidade do ar. Na condição de similaridade,

$$\begin{aligned} (Re)_m &= (Re)_p \\ \frac{(\rho_m v_m L_m)}{\mu_m} &= \frac{(\rho_p v_p L_p)}{\mu_p} \\ \frac{(\rho_m v_m L_m)}{\mu_m} &= \frac{(998\text{ kg/m}^3 2\text{ m/s} 0.8 \times 10^{-2}\text{ m})}{1.003 \times 10^{-3}\text{ N s/m}^2} = 1.6 \times 10^5 \\ \frac{(\rho_m v_m L_m)}{\mu_m} &= 1.6 \times 10^5 \\ v_m &= \frac{1.6 \times 10^5 1.8 \times 10^{-5}\text{ N s/m}^2}{1.20\text{ kg/m}^3 1.5\text{ m}} \\ v_m &= 1.59\text{ m/s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_m &= \frac{F_m}{\rho_m v_m^2 L_m^2} = \frac{5\text{ N}}{998\text{ kg/m}^3 (2\text{ m/s})^2 8 \times 10^{-2}\text{ m}} = 0.196 = C_p \\ \frac{F_p}{\rho_p v_p^2 L_p^2} &= 0.196 \\ F_p &= 0.196 \rho_p v_p^2 L_p^2 \\ F_p &= 0.196 1.20\text{ kg/m}^3 (1.59\text{ m/s})^2 (1.5\text{ m})^2 = 1.3\text{ N} \end{aligned}$$

2. Um corpo cai na superfície da lua ($g=1,62\text{ m/s}^2$) com uma velocidade inicial de 12 m/s . Usando as variáveis da opção 2, equações 2.18, o impacto com o solo ocorre em $t^{**}=0.34$ e

$Y^{**}=0.84$. Calcule (a) o deslocamento inicial, (b) O deslocamento final e (c) o instante do impacto.

Solução:

(a)

$$Y^{**} = \frac{gY_0}{v_0^2} + t^{**} + \frac{1}{2}t^{**2} = 0.84 = \frac{(1.62)Y_0}{12^2} + 0.34 + \frac{1}{2}(0.34)^2$$

$$0.84 = \frac{(1.62)Y_0}{12^2} + 0.34 + \frac{1}{2}(0.34)^2$$

Resolvendo para Y_0 ,

$$Y_0 = 39m$$

(b)

$$Y^{**} = \frac{gY_0}{v_0^2} = 0.84 = \frac{(1.62)Y}{12^2}$$

Resolvendo para Y ,

$$Y = 75m$$

(c)

$$t^{**} = \frac{gt}{v_0} = 0.34 = \frac{(1.62)t}{12}$$

Resolvendo para t ,

$$t = 2.52s$$

3. Determine a dimensão $\{MLT\Theta\}$ das seguintes grandezas:

(a) $\rho v \frac{\partial v}{\partial x}$

(b) $\int_1^2 (p - p_0) dA$

(c) $\rho C_p \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y}$

(d) $\int \int \int \rho \frac{\partial v}{\partial t} dx dy dz$

4. O período de oscilação T de uma onda de superfície na água é considerado uma função da massa específica ρ , do comprimento de onda λ , da profundidade h , da gravidade g e da tensão superficial γ . Reescreva essa relação na forma adimensional. Qual é o resultado se γ for desprezível? Dica: escolha ρ , λ e g como variáveis repetidas.

5. A potência P fornecida a uma bomba centrífuga é uma função da vazão volumétrica Q , do diâmetro do rotor D , da velocidade de rotação Ω , da massa específica ρ e da viscosidade μ do fluido:

$$P = f(Q, D, \Omega, \rho, \mu)$$

Apresente uma expressão adimensional para a potência. Sugestão: use Ω , ρ e D como variáveis repetidas.

6. A velocidade angular de rotação de um moinho de vento Ω , sem carga, é considerada uma função do diâmetro do moinho D , da velocidade do vento v , da massa específica do ar ρ , da altura do moinho H em comparação com a altura da camada limite atmosférica L e do número de pás N :

$$\Omega = f\left(D, v, \rho, \frac{H}{L}, N\right)$$

Os efeitos de viscosidade são desprezíveis. Encontre os grupos *Pi* apropriados para este problema e reescreva a função acima na forma adimensional.

7. A força de propulsão F de uma hélice geralmente é considerada uma função de seu diâmetro D e velocidade angular Ω , da velocidade v de avanço, da massa específica ρ e da viscosidade μ do fluido. Reescreva essa relação como uma função adimensional.

8. Durante a Segunda Guerra Mundial, sir Geoffrey Taylor, um engenheiro britânico especializado em mecânica dos fluidos, usou a análise dimensional para estimar a velocidade da onda de uma explosão de bomba atômica. Ele supôs que o raio R da onda de explosão era uma função da energia liberada E , da massa específica do ar ρ e do tempo t . Use o raciocínio da análise dimensional para mostrar como o raio da onda deve variar com o tempo.