Capítulo 5

Equação de Navier-Stokes

5.1 Tensor de Tensão

5.1.1 O Termo de Tensão para Líquidos e Gases

No capítulo 1 definimos tensão como sendo proporcional a taxa de deformação. A parametrização da tensão em uma dimensão apresentada no capítulo 1 pode ser estendida para três dimensões. Neste caso, a definição deverá incluir todas as possíveis componentes da tensão. As componentes da tensão serão proporcional as componentes do tensor gradiente de velocidade. No capítulo 3, aprendemos que este tensor é responsável pela deformação e rotação de um parcel, sendo possível separa-lo em uma parte simétrica e uma anti-simétrica. Ainda com respeito a deformação do parcel, podemos classificar esta deformação em termos de duas componentes, *deformação volumétrica* e *distorção*.

A primeira componente, deformação volumétrica, já foi abordado em seções anteriores (equação 4.12) e definida como:

$$\frac{1}{\delta V}\frac{D(\delta V)}{Dt} = \frac{\partial u_j}{\partial x_j}. \tag{5.1}$$

Ou seja, a medida da deformação volumétrica do parcel é dada pela soma das componentes da diagonal do tensor gradiente de velocidades.

A segunda componente é a distorção que deforma o parcel mantendo seu volume constante. Essa é sempre a componente cinemática mais importante, pois esta diretamente relacionada a força de deformação sobre o parcel. Considere uma distorção bi-dimensional de um parcel.

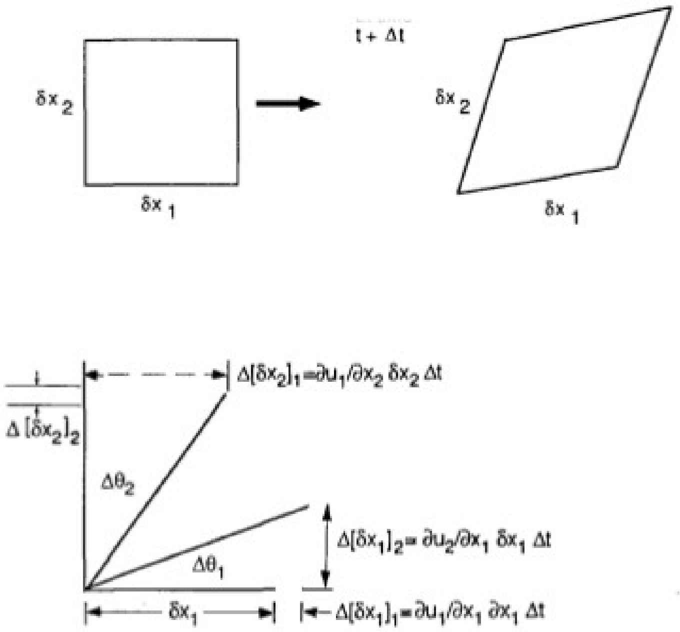

Figura 5.1: Componentes da distorção do parcel.

A deformação δx_1 inclui os efeitos de alongamento produzidos por $\partial u_1/\partial x_1$ e $\partial u_1/\partial x_2$. De forma similar, a componente δx_2 se deve a $\partial u_2/\partial x_2$ e $\partial u_2/\partial x_1$. A deformação resultante pode ser relatada a mudança do ângulo entre δx_1 e δx_2, o qual é $\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2$, na figura 4.4.

$$tan\ \theta_1 = \left[\frac{\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\delta x_1 \Delta t}{\delta x_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\delta x_1 \Delta t}\right], \tag{5.2}$$

$$tan\ \theta_1 \approx \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\Delta t \tag{5.3}$$

$$tan\ \theta_1 \approx \Delta\theta_1 \tag{5.4}$$

No limite onde $\Delta\theta$ e $\Delta t \to 0$, $\Delta\theta_1/\Delta t = d\theta_1/dt = \partial u_2/\partial x_1$.

Da mesma forma, $d\theta_2/dt = \partial u_1/\partial x_2$. A distorção média do parcel é proporcional a variação angular,

$$\Gamma_{21} \equiv \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2), \tag{5.5}$$

$$\frac{d\Gamma_{21}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d(\theta_1 + \theta_2)}{dt}, \tag{5.6}$$

$$\frac{d\Gamma_{21}}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right). \tag{5.7}$$

Da mesma forma,

$$\frac{d\Gamma_{31}}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right), \tag{5.8}$$

$$\frac{d\Gamma_{23}}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right), \tag{5.9}$$

e generalizando,

$$\frac{d\Gamma_{ij}}{dt} = \frac{d\Gamma_{ji}}{dt}. \tag{5.10}$$

Este tensor consiste dos elementos fora da diagonal do tensor tri-dimensional de deformação o qual definimos como $def\,\vec{u}$. Por fim, a relação entre tensão e deformação pode ser representada de forma geral como:

$$\tau_{ij} \equiv G\Gamma_{ij}, \tag{5.11}$$

onde G é uma constante conhecida como módulo de deformação. Trabalhando com fluidos, substuiremos G pela viscosidade e a deformação na equação 4.64 pela taxa de deformação. A distorção resultante será dada por:

$$\tau_{ij} \equiv \mu\frac{d\Gamma_{ij}}{dt}, \tag{5.12}$$

Este tensor representa todas as distorcões da superfície do parcel devido as tensões internas.

5.1.2 Tensor de Tensões Geral em Três Dimensões

Detalharemos as componentes do tensor de tensões para um fluido Newtoniano. As hipoteses iniciais que definem este tipo de fluido são:

1. Em um fluido estático, existem apenas forças normais a superfície do parcel, denominadas forças de pressão;

2. σ_{ij} é independente do fluxo de calor, depende apenas dos estados locais cinemáticos e termodinâmicos;

3. Não existem direções preferenciais;

4. A tensão é proporcional ao gradiente de velocidade.

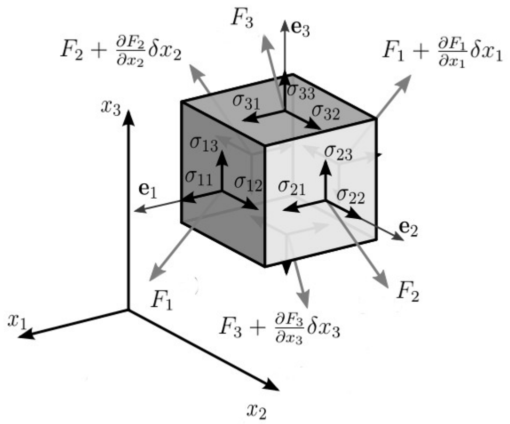

Figura 5.2: Forças e componentes do tensor de tensões agindo sobre um parcel.

As forças sobre cada uma das faces do parcel pode ser escrita como:

$$
\begin{aligned}
\vec{F_1} &= \hat{i}\sigma_{11} + \hat{i}\sigma_{12} + \hat{i}\sigma_{13}, \\
\vec{F_2} &= \hat{i}\sigma_{21} + \hat{i}\sigma_{22} + \hat{i}\sigma_{23}, \\
\vec{F_1} &= \hat{i}\sigma_{31} + \hat{i}\sigma_{32} + \hat{i}\sigma_{33}.
\end{aligned}
\tag{5.13}
$$

Ao longo da direção x_1 (ou seja sobre a face x_2x_3) a força resultante é,

$$\frac{\partial \vec{F_1}}{\partial x_1}\delta x_1(\delta x_2 \delta x_3) = \frac{\partial \vec{F_1}}{\partial x_1}\, dV.$$

O mesmo raciocínio vale para as demais direções de forma que a forca de superfície total sobre o parcel por unidade de volume é:

$$\vec{F}_{total} = \frac{\partial \vec{F_1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \vec{F_2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \vec{F_3}}{\partial x_3}, \tag{5.14}$$

ou

$$
\begin{aligned}
\vec{F}_{total} = \; & \hat{i}\left[\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_3} + \right] + ...X_1\text{componente} \\
+ \; & \hat{j}\left[\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{32}}{\partial x_3} + \right] + ...X_2\text{componente} \\
+ \; & \hat{i}\left[\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3} + \right] + ...X_3\text{componente.}
\end{aligned} \tag{5.15}
$$

Finalmente, a lei de Newton, $\vec{F} = m\vec{a}$, aplicada a um parcel de fluido, pode ser escrita como:

$$
\rho\frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho\vec{F_{bi}} + \nabla\cdot\sigma.
$$

ou em termos de suas componentes na forma,

$$
\begin{aligned}
\rho\frac{Du_1}{Dt} &= \rho F_1 + \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_3} \\
\rho\frac{Du_2}{Dt} &= \rho F_2 + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{32}}{\partial x_3} \\
\rho\frac{Du_3}{Dt} &= \rho F_3 + \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3}
\end{aligned} \tag{5.16}
$$

Uma análise das equações 4.69 indica que a solução da dinâmica de um fluido passa pela determinação das noves componentes do tensor de tensões. Em princípio, hipóteses adicionais devem ser feitas de forma a diminuir o número de termos indeterminados. Se o parcel estiver em equilíbrio $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. Isto reduz o número de componentes indeterminadas do tensor de tensões para seis. Entretando, mesmo que as forças de corpo sejam conhecidas, ainda existem nove termos indeterminados, seis componentes do tensor de tensões e as três componentes da velocidade u_i. Assim, para a solução completa de 4.69, precisamos achar uma relação entre σ_{ij} e u_i.

5.1.3 Pressão

Da definição de fluido Newtoniano, assumimos que em um fluido estático, existem apenas forças normais a superfície do parcel, denominadas forças de pressão, de forma que:

$$
\sigma_{ij} = -p\delta ij, \quad \sigma_{13} = \sigma_{12} = \sigma_{23} = 0, \tag{5.17}
$$

e apenas $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33}$ são não nulos.

Em um fluido em movimento, a componente normal da tensão sobre uma face do parcel dependerá da orientação espacial desta face. A tensão em uma direção se relaciona ao gradiente de velocidades na mesma direção. As forças internas sobre o parcel criam tensões tangenciais e normais sobre as superfícies do parcel, sendo que a pressão será dependente da direção. Entretato é possível obter um número que representará a pressão média para um fluido em movimento.

$$\sigma = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} \equiv -p, \tag{5.18}$$

onde σ é invariante frente rotação. Daqui para frente será definido como a pressão para um fluido estático ou em movimento.

Para caso geral de um fluido em movimento, é conveniente separar a pressão das contribuições relativas a tensão de deformação pela definição do *tensor de tensão de deformação*. Este é obtido do tensor de tensões a menos dos termos relativos de pressão. Em notação matricial,

$$\sigma = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix}, \tag{5.19}$$

com $\tau_{ii} = 0$. O problema agora é relacionar as componentes de τ_{ij}, as tensoes de deformação devido ao movimento do fluido, com as velocidade u_i.

5.1.4 Lei de Stokes da Fricção

A premissa básica da Lei de Stokes é de que a tensão é proporcional a taxa de deformação. Em notação matricial, a lei da fricção assume a seguinte forma:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} u_{11} & u_{21} & u_{31} \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} \end{pmatrix}$$
$$+ \alpha \begin{pmatrix} \nabla \cdot \vec{u} & 0 & 0 \\ 0 & \nabla \cdot \vec{u} & 0 \\ 0 & 0 & \nabla \cdot \vec{u} \end{pmatrix}. \tag{5.20}$$

Em notação simbólica,

$$\sigma = -p\mathbf{I} + \mu[\nabla\vec{u} + \nabla^*\vec{u}] + \alpha\mu\nabla \cdot \vec{u}\mathbf{I}, \tag{5.21}$$

ou

$$\sigma = -p\mathbf{I} + \mu \operatorname{def} \vec{u} + \alpha\mu\nabla \cdot \vec{u}\mathbf{I} = -p\mathbf{I} + \tau. \tag{5.22}$$

Na equação 4.75, **I** é o tensor identidade, $\mathbf{I}_{ij}$=1 se $i = j$ ou 0 se $i \neq j$. O parâmetro α é conhecido como *segunda viscosidade*. Desde que $\tau_{ii} = 0$, e

$$(2\mu + 3\alpha)\nabla \cdot \vec{u} = 0, \tag{5.23}$$

$$\alpha = \frac{2}{3}. \tag{5.24}$$

Para aplicação a problemas atmosféricos, podemos sempre considerar que $\nabla \cdot \vec{u} = 0$. Isso é verdadeiro se observarmos o termo de deformação.

A equação 4.75 fornece nove equações para as nove componentes desconhecidas do tensor de tensões (somente seis são independentes). Quando é assumido a existência de viscosidade, o conjunto de equações terá solução - número igual de parâmetros e equações.

$$\rho\frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho\vec{F_b} + \nabla \cdot \sigma = \rho\vec{F_b} + \nabla \cdot \{-p\mathbf{I} + \tau\},$$

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{F}_b - \nabla p + \nabla \cdot \{\mu \operatorname{def} \vec{u} + \alpha \nabla \cdot (\vec{u}\mathbf{I})\}.$$

Estas equações expressam a conservação de momentum aplicada a um parcel de fluido.

5.1.5 Derivação Alternativa do Termo de Tensão

Iremos expandir o tensor de tensões em termos de uma série de Taylor com respeito aos gradientes de velocidade próximos de um ponto.

$$\sigma = \mathbf{A} + \mathbf{B}\ \nabla \mathbf{U} + \mathbf{C}...... \tag{5.25}$$

ou

$$\sigma_{ij} = A_{ij} + B_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + C_{ijklm} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_l x_m} + ... \tag{5.26}$$

$$\sigma_{ij} \approx A_{ij} + \{\alpha \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{il} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \beta(\delta_{ik}\delta_{il} - \delta_{il}\delta_{jk})\} \frac{\partial u_j}{\partial xl} \tag{5.27}$$

Usando a condição limite sem fluxo, onde $Aij = -p\ \delta ij$, escrevemos:

$$\sigma_{ij} = -p\ \delta_{ij} + \alpha \frac{\partial u_k}{\partial x_k}\ \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \tag{5.28}$$

ou na forma

$$\sigma = -p\mathbf{I} + \alpha \nabla \cdot (\vec{u}\mathbf{I}) + 2\ \mu \operatorname{def} \vec{u}. \tag{5.29}$$

Agora podemos definir τ como:

$$\sigma = -p\mathbf{I} + \tau. \tag{5.30}$$

Substituindo $\alpha = 2/3\ \mu$,

$$\tau = 2\ \mu \operatorname{def} \vec{u} - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot (\vec{u}\ \mathbf{I}). \tag{5.31}$$

A divergência de σ é:

5.1.6 Viscosidade Turbulenta

As equações de conservação de momentum apresentadas anteriormente são válidas apenas para fluxos laminares. Na presença de turbulência, a conservação de momentum deve ser escrita em termos das velocidades médias, as quais são usualmente medidas. Para isso devemos escrever as equações com as velocidades de turbulência e obter seus valores médios. Entretanto, neste ponto assumimos que o movimento dos vórtices turbulentos transportam momentum de maneira análoga as moléculas. Assim, as tensões devido a presença de turbulência serão escritas com base na lei da fricção.

De forma geral, para fluxos atmosféricos, as tensões internas sobre o fluido são muito menores que as demais forças. Adicionalmente, as grandes escalas levam a grandes números de Reynolds, e consequentemente a turbulência. Ainda assim, iremos usar a conservação do momentum de duas formas:

1. Na aproximação para fluxos invícidos, onde o termo de viscosidade é desconsiderado;
2. Em regimes altamente turbulentos, onde assumimos que μ pode ser representado pela viscosidade turbulenta.

Quando usamos a aproximação para viscosidade turbulenta, o fator de viscosidade turbulenta K substitui μ. Isto implica que o fluxo é laminar-turbulento. Um fluxo médio laminar coexiste com um fluxo turbulento em pequena escala. A constante K é um tensor de ordem quatro, e representa de alguma forma a randomicidade do fluxo turbulento em pequeas escalas. Entretanto, um fator limitador para esta aproximação é o fato de que na atmosfera, K varia com a posição.

Assumindo então a presença de viscosidade turbulenta, o termo de tensão adquire a forma

$$\sigma = -p\mathbf{I} + K_1 \nabla \cdot \vec{u}\mathbf{I} + K_2[\nabla \vec{u} + \nabla^* \vec{u}] = -p\mathbf{I} + \tau, \tag{5.32}$$

onde K_1 e K_2 são coeficientes escalares que substituem α e μ. Estes coeficientes dependem da distribuição da turbulência, que por sua vez depende do estado local do fluido. O termo de deformação será:

$$\nabla \cdot \tau = \nabla(K_1 \nabla \cdot \vec{u}) + \nabla \cdot \{K_2(\nabla \vec{u} + \nabla^* \vec{u})\}. \tag{5.33}$$

Uma simplificação que pode ser feita quando tratamos de fluxos atmosféricos é de que a viscosidade turbulenta varia apenas na direção vertical. Por meio de identidades vetoriais apropriadas, a equação 4.86 pode ser escrita na forma,

$$\nabla \cdot \tau = (K_1 + K_2)\{\nabla^2 \vec{u}\} + K_2 \nabla \times \nabla \times \vec{u} + k\frac{dK_1}{dz}\nabla \cdot \vec{u} + k\frac{dK_2}{dz}(\nabla \vec{u} + \nabla^* \vec{u}). \tag{5.34}$$

Como geralmente estamos trabalhando com fluxos onde $\nabla \cdot \vec{u} = 0$,

$$\nabla \cdot \tau = K\nabla^2 \vec{u} + \frac{dK_2}{dz}(u_{31} + u_{13}, u_{32} + u_{23}, 2u_{33}). \tag{5.35}$$

Se K_2 for constante,

$$\nabla \cdot \tau = K\nabla^2 \vec{u}. \tag{5.36}$$

5.1.7 O Termo de Coriolis

Vamos escrever a aceleração de coriolis em notação tesorial. Lembrando que escrevemos a aceleração de coriolis como $2(\vec{w} \times \vec{u})$ no capítulo 1. Agora reescrevemos esta aceleração na forma

$$2\vec{w} \times \vec{u} = \vec{u}\vec{w} = u_j w_{ji} = \epsilon_{ijk} k'_j u_k, \tag{5.37}$$

e

$$\vec{k'} \equiv (0, f', f), \tag{5.38}$$

$$w \equiv \begin{pmatrix} 0 & f & -f' \\ -f & 0 & 0 \\ f' & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.39}$$

onde

$$f = 2w\ sen\ \theta, f' = 2w\ cos\ \theta. \tag{5.40}$$

Em coordenadas cartesianas,

$$\vec{u}\vec{w} = \vec{k'} \times \vec{u} = (f'u_3 - fu_2, fu_1, -f'u_1). \tag{5.41}$$

Para a atmosfera, $f'u_3 \ll fu_2$, (em geral para movimento horizontal); $f'u_1 \ll$ outros termos na equação vertical de momentum; e

$$2\vec{w} \times \vec{u} = \vec{u}\vec{w} \approx \epsilon_{ijk} k'_j u_k f = \vec{k'} \times \vec{u} = (-fu_2, fu_1, 0). \tag{5.42}$$

Neste caso, podemos escrever $\vec{k'} \times \vec{u} = f\vec{k} \times \vec{u}$. Incluindo a força da gravidade $\rho g \delta_{i3}$, a equação de momentum se torna:

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + u_j \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\{\mu(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}) + \alpha \frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\} - \rho\ g\ \delta_{i3} - \rho f \epsilon_{ijk} k_j u_k. \tag{5.43}$$

Usando a continuidade para simplificar a equação anterior,

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_j}\{\mu(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}) + \alpha \frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\} - g\ \delta_{i3} - f \epsilon_{ijk} k_j u_k. \tag{5.44}$$

Para $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ e μ constante e igual a $\rho\nu$, obtemos:

$$\frac{Du_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} - g\delta i3 - f\epsilon_{ijk} k_j u_k. \tag{5.45}$$

A equação anterior é conhecida como equação de Navier-Stokes. Em termos das componentes,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_3\frac{\partial u_1}{\partial x_3} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_1} + fu_2 + \nu\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2}\right), \\
\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + u_3\frac{\partial u_2}{\partial x_3} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_2} - fu_1 + \nu\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2}\right), \\
\frac{\partial u_3}{\partial t} + u_1\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + u_2\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + u_3\frac{\partial u_3}{\partial x_3} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_3} - g \quad + \nu\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}\right).
\end{aligned} \tag{5.46}$$

Estas equações representam uma excelente aproximação para muitos dos problemas atmosféricos. Devemos por fim relembrar as hipóteses assumidas: viscosidade constante, assumimos que o $\nabla \cdot [\mu\ 2\ def\ \vec{u}] \rightarrow \mu \nabla^2 \vec{u}$, pois $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ e a constância do termo de coriolis.