

Capítulo 4

Fluidos Ideais

4.1 Introdução

4.2 Forças Fundamentais

As forças básicas fundamentais envolvidas no movimento de fluidos na atmosfera são a força de gradiente de pressão \vec{F}_p , a força da gravidade \vec{F}_g e a força de tensões viscosas \vec{F}_v . A partir de agora detalharemos estas forças tendo em mente que elas se classificam como força de corpo (forças que agem no centro de massa do sistema da partícula de fluido de fluido) e forças de superfície (que agem na superfície da partícula de fluido).

4.2.1 Força de Gradiente de Pressão (força de corpo)

Partindo das equações 1.12, para a pressão em um ponto de um fluido a menos da gravidade, podemos escrever

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) = \rho a_x + \rho a_y + \rho a_z. \quad (4.1)$$

O termo da esquerda na equação anterior é o gradiente de pressão, enquanto que o termo da direita pode ser escrito em termos da segunda Lei de Newton, de forma que obtemos a seguinte expressão para a força de gradiente de pressão.

$$-\frac{1}{\rho} \nabla p = \frac{\vec{F}}{m} \quad (4.2)$$

É importante notar que a força é proporcional ao gradiente de pressão e não a pressão em si. Passando a densidade para o numerador a direita da igualdade na equação 4.2, obtemos a força de gradiente de pressão por unidade de volume.

$$-\nabla_p = \rho \frac{\vec{F}}{m} = \frac{m}{V} \frac{\vec{F}}{m} = \frac{\vec{F}}{V} \quad (4.3)$$

4.2.2 Força da Gravidade (força de corpo)

Esta implícito na lei da gravitação universal de Newton que massas tendem a se atrair por meio de uma força que é proporcional ao produto destas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas. Se considerarmos que a massa da Terra é M , e a massa de uma parcela da atmosfera é m , a força gravitacional por unidade de massa, o campo gravitacional será dado por:

$$\frac{\vec{F}_g}{m} = \vec{g} = \frac{-GM}{r^2} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) \quad (4.4)$$

Em meteorologia dinâmica é comum usar a altitude com respeito a superfície do mar como coordenada vertical. Se considerarmos que o raio médio da Terra é a , e a distância acima do nível do mar x_3 , podemos escrever r na anterior como $(a + x_3)$, de forma que:

$$\vec{g} = \frac{-GM}{(a + x_3)^2} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) = \frac{-GM}{\left[\frac{a}{a} (a + x_3) \right]^2} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) = \frac{-GM}{[a(1 + \frac{x_3}{a})]^2} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) = \frac{-GM}{a^2 [1 + \frac{x_3}{a}]^2} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right). \quad (4.5)$$

Definindo

$$\vec{g}_0 = \frac{-GM}{a^2} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right), \quad (4.6)$$

\vec{g}_0 é a gravidade média ao nível do mar. Então, a aceleração da gravidade em um ponto x_3 da atmosfera é:

$$\vec{g} = \frac{\vec{g}_0}{\left(1 + \frac{x_3}{a} \right)^2} \quad (4.7)$$

4.2.3 Força de Viscosidade ou de Tensões Viscosas (força de superfície)

Considere o elemento de fluido incompressível a seguir.

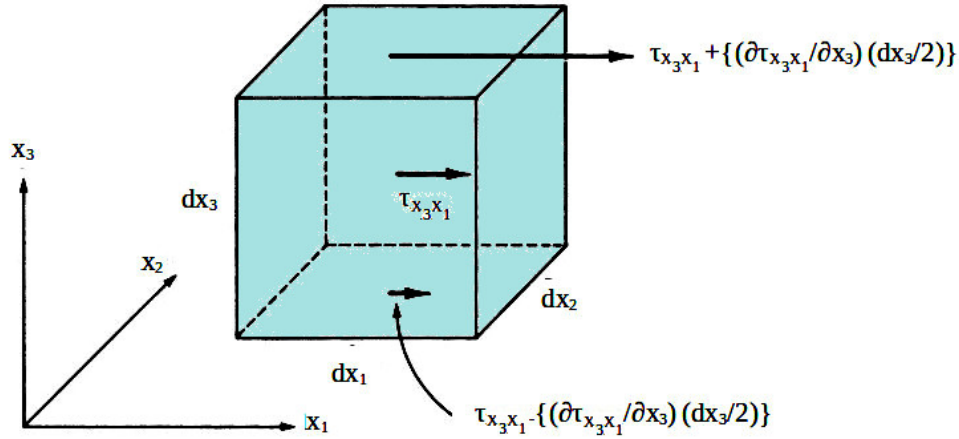


Figura 4.1: Componente x da tensão de deformação sobre o elemento de fluido.

A tensão de deformação ao longo do eixo x_1 que age através do centro de elemento de volume δV é $\tau_{x_3x_1}$ ¹. As tensões de deformação que agem na parte superior e inferior do elemento de volume δV são respectivamente:

$$\tau_{x_3x_1} + \left(\frac{\partial \tau_{x_3x_1}}{\partial x_3}\right) \frac{\delta x_3}{2}, \quad (4.8)$$

$$\tau_{x_3x_1} - \left(\frac{\partial \tau_{x_3x_1}}{\partial x_3}\right) \frac{\delta x_3}{2}. \quad (4.9)$$

A força líquida de viscosidade ao longo desta direção será:

$$\left[\tau_{x_3x_1} + \left(\frac{\partial \tau_{x_3x_1}}{\partial x_3}\right) \frac{\delta x_3}{2} \right] \delta x_1 \delta x_2 - \left[\tau_{x_3x_1} - \left(\frac{\partial \tau_{x_3x_1}}{\partial x_3}\right) \frac{\delta x_3}{2} \right] \delta x_1 \delta x_2. \quad (4.10)$$

Dividindo a expressão anterior pela massa ($\rho \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3$), encontramos a força por unidade de massa devido a componente da tensão de deformação ao longo da direção x_1 . Esta pode ser escrita como:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{x_3x_1}}{\partial x_3} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2}. \quad (4.11)$$

¹A convenção usual será:- o primeiro subíndice é relativo ao plano cartesiano normal a direção da tensão, enquanto que o segundo indica a direção da tensão.

Definimos neste ponto o **coeficiente de viscosidade cinética** como:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}. \quad (4.12)$$

Para a condição padrão da atmosfera, ao nível do mar, $\nu = 1.46 \times 10^{-5} m^2 s^{-1}$. Assim, as componentes da força de tensões viscosas são escritas como:

$$\begin{aligned} F_{x_1} &= \nu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right) \\ F_{x_2} &= \nu \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} \right) \\ F_{x_3} &= \nu \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \right) \end{aligned} \quad (4.13)$$

4.2.4 Referencial não Inercial

Ao formular as leis da dinâmica da atmosférica, é natural usar uma referência geocêntrica, ou seja, um sistema de referência que se encontra em repouso em relação aos eixos de rotação da Terra. A primeira Lei do Movimento de Newton afirma que uma massa em movimento uniforme em relação a um sistema de referência fixo no espaço permanecerá em movimento uniforme na ausência de quaisquer forças. Tal movimento é referido como movimento inercial. Já a referência fixa é definida como um referencial inercial ou absoluto. É claro, no entanto, que um objeto em repouso ou em movimento uniforme em relação à superfície da Terra em rotação não está em repouso ou em movimento uniforme em relação a um sistema de coordenadas fixo no espaço. Portanto, um movimento que parece ser um movimento inercial para um observador em um referencial geocêntrico é um movimento realmente acelerado. Portanto, um referencial geocêntrico é um sistema de referência não-inercial. As leis do movimento de Newton só podem ser aplicadas em tais circunstâncias se a aceleração do sistema de coordenadas é levada em conta. A maneira mais satisfatória de incluir os efeitos não inerciais é a introdução de forças "aparentes" na equação da Segunda Lei de Newton. Estas forças aparentes são a força centrífuga e a força de Coriolis. Além disso, devemos fazer uma correção no termo de força gravitacional. O problema esta ilustrado na figura a seguir.

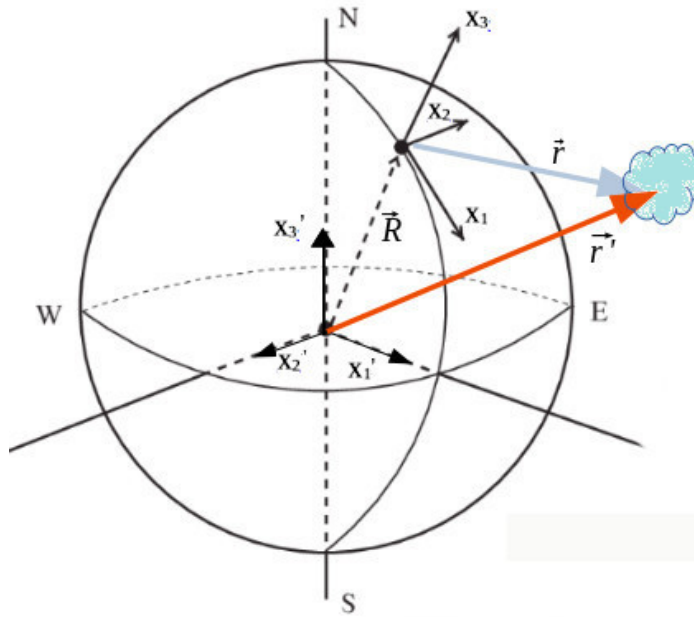


Figura 4.2: Movimento que um observador no referencial inercial (fixo no centro da Terra) detecta para uma massa unitária que se desloca em relação a superfície.

A velocidade de uma partícula de fluido escrita com respeito ao referencial inercial (fixo no centro da terra) será:

$$v_{fixo}^{\vec{}} = \vec{V} + \vec{v}_r + (\vec{\omega} \times \vec{r}). \quad (4.14)$$

onde \vec{V} é velocidade linear da origem do sistema em rotação (referencial na superfície da terra), \vec{v}_r velocidade relativa aos eixos em rotação e $(\vec{\omega} \times \vec{r})$ velocidade devido a rotação dos eixos. A segunda Lei de Newton neste contexto é:

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}_f}{dt}. \quad (4.15)$$

Por sua vez, para o cálculo da derivada de \vec{v}_f procedemos como a seguir:

$$\left(\frac{d\vec{v}_f}{dt}\right)_{inercial} = \left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_{inercial} + \left(\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right)_{inercial} + \left(\frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r})\right)_{inercial} \quad (4.16)$$

O segundo termo do lado direito da equação 5.16 fica:

$$\left(\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right)_{inercial} = \left(\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right)_{rotação} + \vec{\omega} \times \vec{v}_r. \quad (4.17)$$

Reescrevendo,

$$\left(\frac{d\vec{v}_f}{dt}\right)_{inercial} = \left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_{inercial} + \left(\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right)_{em\ rotação} + (\vec{\omega} \times \vec{v}_r) + \left(\frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r})\right)_{inercial}. \quad (4.18)$$

Agora devemos resolver o último termo a direita de 5.18.

$$\left(\frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r})\right)_{inercial} = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{inercial} = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{em\ rotação} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}). \quad (4.19)$$

Retornando a equação de força de Newton,

$$\left(\frac{d\vec{v}_f}{dt}\right)_{inercial} = \left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_{inercial} + \left(\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right)_{em\ rotação} + (\vec{\omega} \times \vec{v}_r) + (\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}) + \left(\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{inercial} + [\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})]. \quad (4.20)$$

Entretanto,

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{em\ rotação} = \vec{v}_r, \quad (4.21)$$

levando a:

$$\left(\frac{d\vec{v}_f}{dt}\right)_{inercial} = \left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_{inercial} + \left(\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right)_{em\ rotação} + (\vec{\omega} \times \vec{v}_r) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + (\vec{\omega} \times \vec{v}_r) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}). \quad (4.22)$$

Reduzindo os termos,

$$\left(\frac{d\vec{v}_f}{dt}\right)_{inercial} = \left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_{inercial} + \left(\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right)_{em\ rotação} + 2(\vec{\omega} \times \vec{v}_r) + (\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}). \quad (4.23)$$

Definindo neste ponto a aceleração da massa unitária com respeito ao sistema de referência em rotação como

$$\vec{a}_r = \left(\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right)_{em\ rotação} \quad (4.24)$$

e

$$\vec{R} = \left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_{\text{inercial}} \quad (4.25)$$

$$\left(\frac{d\vec{v}_f}{dt}\right)_{\Sigma'} = \vec{R} + \vec{a}_r + 2(\vec{\omega} \times \vec{v}_r) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}). \quad (4.26)$$

Retornando a segunda lei de Newton,

$$F = m\vec{R} + m\vec{a}_r + 2m(\vec{\omega} \times \vec{v}_r) + m(\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}) + m(\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})). \quad (4.27)$$

Esta seria a equação de movimento que um observador no referencial inercial (fixo no centro da Terra) acharia para determinar o movimento de uma massa unitária que se desloca em relação à superfície. Por outro lado, um observador fixo na superfície da Terra (no sistema em rotação) acharia uma força efetiva dada por:

$$\vec{F}_{\text{efetiva}} = m\vec{a}_r, \quad (4.28)$$

com \vec{F}_{efetiva} igual a:

$$\vec{F}_{\text{efetiva}} = \vec{F} - m\vec{R} - m(\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}) - m(\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})) - 2m(\vec{\omega} \times \vec{v}_r) \quad (4.29)$$

Na equação anterior, o primeiro termo é a soma de todas as forças que agem sobre a partícula no referencial inercial. O segundo e terceiro termos vêm da aceleração translacional e angular do sistema de referência em rotação com respeito ao sistema fixo. O termo $m(\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}))$ é a força centrífuga e aponta para fora dos eixos em rotação. O termo $2m(\vec{\omega} \times \vec{v}_r)$ é a força de Coriolis e vem do movimento em um referencial não inercial. Os termos não inerciais então dão conta da força centrífuga e de Coriolis. Fazendo $\vec{F} = m\vec{g}$, a força efetiva em um referencial não inercial será:

$$F_{\text{efetiva}}^{\rightarrow} = m\vec{g} - m\vec{R}_f - m(\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}) - m(\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})) - 2m(\vec{\omega} \times \vec{v}_r) \quad (4.30)$$

considerando que

$$\vec{R}_f = \vec{\omega} \times \vec{R}, \quad (4.31)$$

e

$$\vec{R}_f = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}), \quad (4.32)$$

a equação 5.31 pode ser reescrita como:

$$F_{efetiva}^{\vec{}} = m\vec{g} - m(\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times (\vec{r} + \vec{R})) - 2m(\vec{\omega} \times \vec{v}_r) \quad (4.33)$$

Na equação anterior, o termo contendo $\vec{\omega}$ foi desprezado, visto que $\vec{\omega}$ é aproximadamente constante. O primeiro e o segundo termos da equação 5.34 é o que experimentamos como gravidade efetiva na superfície da Terra.

$$\vec{g}_k = \vec{g} - (\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times (\vec{r} + \vec{R})) \quad (4.34)$$

Para movimentos próximos da superfície da Terra, $r \ll R$, e a força centrífuga domina. Para situações muito distantes da superfície da Terra, devemos considerar a variação de \vec{g} com a altitude. Portanto, a equação 5.34 pode ser reescrita como:

$$\vec{F}_{efetiva} = m\vec{g}_k - 2m(\vec{\omega} \times \vec{v}_r). \quad (4.35)$$

Devido a força centrífuga, a direção de \vec{g}_k é ligeiramente diferente de \vec{g} . A situação é representada esquematicamente na figura a seguir.

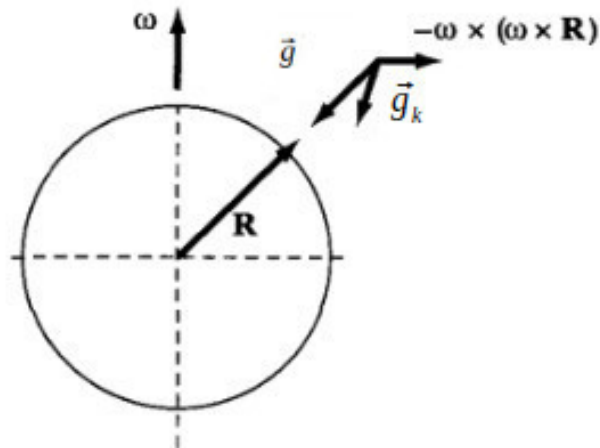


Figura 4.3: Influência da aceleração centrífuga sobre \vec{g}_k

O vetor aceleração angular, que representa a rotação da Terra em torno do seu eixo, é direcionado para o norte. Portanto no hemisfério norte existe uma componente deste vetor direcionada para fora ao longo da vertical local, ω . Se uma partícula está projetado ao longo do plano horizontal com respeito ao sistema de coordenadas local na superfície da Terra com velocidade v_r , a força de Coriolis terá uma componente de magnitude $2m\omega_z v_r$ direcionada à direita do movimento da partícula, resultando em uma deflexão a partir da direção original do movimento. Pelo fato de que a magnitude da componente horizontal da força de Coriolis depende de $\vec{\omega}$, esta apresentará uma dependência com a latitude sendo máxima no polo norte e zero no equador.

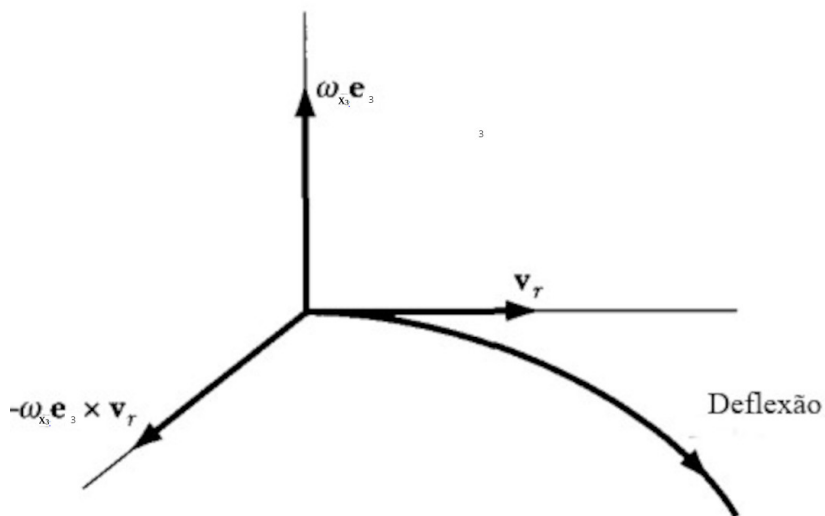


Figura 4.4: Deflexão causada pela força de Coriolis.

Do livro *Dinâmica Clássica de Partículas e Sistemas* - 5ª edição, Stephen Torton e Jerry B Marion:

"Talvez o efeito mais perceptível da força de Coriolis é aquele das massas de ar. À medida que o ar flui das regiões de alta pressão para baixa pressão, a força de Coriolis deflete o ar para a direita no Hemisfério Norte, produzindo movimento ciclônico. O ar entra em rotação com alta pressão à direita e baixa pressão à esquerda. A alta pressão evita que a força de Coriolis provoque a deflexão das massas de ar mais para a direita, resultando em um fluxo de ar no sentido anti-horário. Nas regiões temperadas, o fluxo de ar não tende a ficar ao longo dos gradientes de pressão, mas ao longo das linhas isobáricas de pressão por causa da força de Coriolis e da força centrífuga associada à rotação. Próximo às regiões equatoriais, o aquecimento da superfície da Terra pela radiação solar faz com que o ar quente superficial se eleve. No Hemisfério Norte, isso resulta em um ar mais frio se movimentando para o sul em direção ao equador. A força de Coriolis deflete esse ar em movimento para a direita, resultando nos ventos alísios, que produzem uma brisa na direção sudoeste no Hemisfério Norte e na direção noroeste no Hemisfério Sul. Observe que esse efeito particular não ocorre no equador por causa das direções de \vec{w} e \vec{u} superficial do ar. O movimento real das massas de ar é muito mais complexo do que o simples quadro aqui descrito; porém, as características qualitativas do movimento ciclônico e os ventos alísios são fornecidos corretamente pela consideração dos efeitos da força de Coriolis".

4.3 Equação de Euler

Partindo da segunda Lei de Newton, a qual diz que a soma de todas as forças agindo sobre uma partícula de fluido com volume dV é igual a taxa de variação do seu momento linear. Desde que $D\vec{u}/Dt$ é a aceleração da partícula a equação de Newton fica:

$$\int_V \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} dV = \int_S -p\vec{n}dA + \int_V \rho\vec{g}dV. \quad (4.36)$$

Aplicado o teorema da divergência,

$$\int_V \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} dV = \int_V -\nabla p dV + \int_V \rho \vec{g} dV, \quad (4.37)$$

$$\int_V \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} dV = \int_V (-\nabla p + \rho \vec{g}) dV. \quad (4.38)$$

No limite onde $dv \rightarrow 0$,

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho \vec{g} \quad (4.39)$$

A equação anterior é conhecida como equação de Euler e governa o momento linear de uma partícula de fluido. A mesma não considera efeitos de viscosidade, para os quais, o termo $\mu \nabla^2 \vec{u}$ deve ser adicionado.

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{u} \quad (4.40)$$

4.4 Teorema de Transporte de Reynolds

Tem por finalidade converter a análise de sistema infinitesimal em análise de volume de controle. Essa transformação, chamada de teorema de transporte de Reynolds, pode ser aplicada a todas as leis básicas. Relaciona a derivada temporal de uma grandeza do sistema infinitesimal à taxa de variação da mesma grandeza no interior de uma certa região. A fórmula de conversão desejada difere ligeiramente, caso o volume de controle seja fixo, móvel ou deformável.

O volume de controle fixo da figura 5.5(a) engloba uma região estacionária de interesse para o fluxo através de um bocal. O mesmo volume é envolvido por uma superfície de controle, a qual é um conceito abstrato e não interfere no fluxo de modo algum.

A figura 5.5(b) ilustra um volume de controle móvel. Nesse caso, o interesse está no navio, não no oceano, de forma que a superfície de controle persegue o navio com velocidade V . O volume do volume de controle é constante, mas o movimento relativo entre a água e o navio deve ser considerado. Se V é constante, esse movimento relativo assume um padrão de fluxo estável, o que simplifica a análise. Se V é variável, o movimento relativo é não estável, de modo que os resultados calculados variam com o tempo, e certos termos entram na análise de

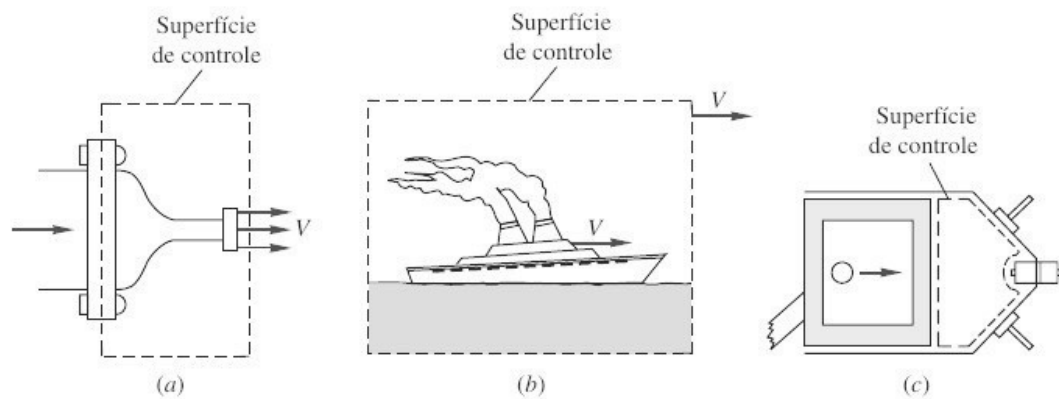


Figura 4.5: Volumes de controle fixo, em movimento e deformável: (a) volume de controle fixo, para análise de esforços em bocal; (b) volume de controle em movimento na velocidade de um navio, para análise de força de arrasto; (c) volume de controle deformável no interior de um cilindro, para análise da variação transiente de pressão.

momento linear para representar o referencial não inercial (acelerando).

A figura 5.5(c) mostra um volume de controle deformável. O movimento relativo nas fronteiras torna-se um fator importante, e a taxa de variação da forma do volume de controle entra na análise.

4.4.1 Teorema de Transporte de Reynolds para um Volume Fixo Arbitrário

A Figura 5.6 mostra um volume de controle fixo generalizado, com um fluxo de padrão arbitrário que o atravessa. Há fluxo variável na entrada e na saída, ao longo da superfície de controle. Em geral, em cada elemento de área dA da superfície haverá uma velocidade \vec{u} diferente, formando um ângulo θ diferente com a normal local $\hat{n}dA$. Assim, em determinadas áreas elementares, haverá fluxo volumétrico ² de entrada, $(u A \cos \theta; dt)_{entrada}$, e em outras haverá fluxo de volume de saída, $(u A \cos \theta dt)_{saida}$, conforme a figura 5.6. Algumas áreas poderão corresponder a linhas de corrente ($\theta = 90^\circ$) ou a paredes sólidas ($\vec{u} = 0$), sem fluxo de entrada ou de saída.

²Fluxo volumétrico ou de volume através de uma superfície dA é,

$$dV = (\vec{u} \cdot \hat{n})dA dt \quad (4.41)$$

$$\frac{dV}{dt} = (\vec{u} \cdot \hat{n})dA \quad (4.42)$$

$$\frac{dV}{dt} = Q = \int (\vec{u} \cdot \hat{n})dA \quad (4.43)$$

Se $(\vec{u} \cdot \hat{n}) > 0$, fluxo para fora, caso contrário, fluxo para dentro.

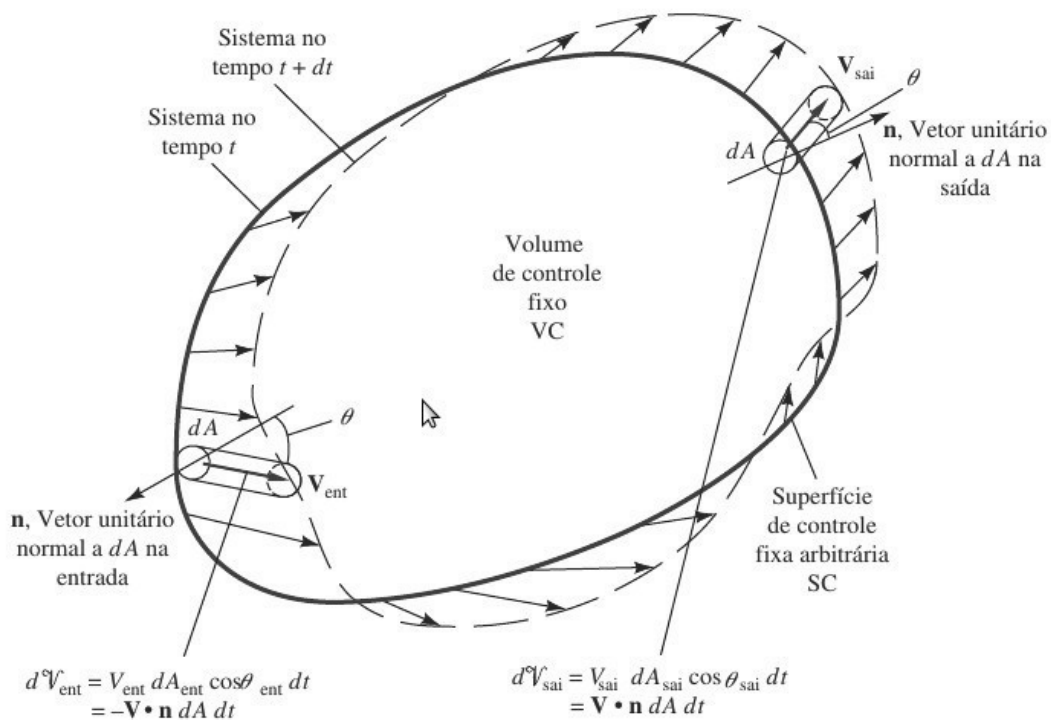


Figura 4.6: Volumes de controle fixo, em movimento e deformável: (a) volume de controle fixo, para análise de esforços em bocal; (b) volume de controle em movimento na velocidade de um navio, para análise de força de arrasto; (c) volume de controle deformável no interior de um cilindro, para análise da variação transiente de pressão.

Seja B uma propriedade qualquer do fluido (energia, momento linear etc.), e seja $\beta = dB/dm$ a grandeza intensiva correspondente, definida pela quantidade de B por unidade de massa em qualquer porção pequena do fluido. A quantidade total de B no volume de controle (a curva sólida será:

$$B_{VC} = \int_{VC} \beta dm = \int_{VC} \beta \rho dV \quad (4.44)$$

A grandeza B na figura 5.6 possui três fontes de variação:

- Variação no volume de controle;

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{VC} \beta \rho dV \right) \quad (4.45)$$

- Fluxo de saída de β no volume de controle;

$$\int_{SC} \beta \rho u \cos(\theta) dA_{sada} \quad (4.46)$$

- Fluxo de saída de β no volume de controle;

$$\int_{SC} \beta \rho u \cos(\theta) dA_{entrada} \quad (4.47)$$

Observe, na figura, que o sistema se moveu um pouco, ganhando uma porção no fluxo na saída e perdendo uma porção no fluxo na entrada. No limite quando $dt \rightarrow 0$, a variação instantânea de B no sistema é a soma de sua variação no interior do VC, mais o seu fluxo que sai, menos o seu fluxo que entra:

$$\frac{d}{dt}(B_{sis}) = \frac{d}{dt} \left(\int_{VC} \beta \rho dV \right) + \int_{SC} \beta \rho u \cos(\theta) dA_{sada} - \int_{SC} \beta \rho u \cos(\theta) dA_{entrada} \quad (4.48)$$

A equação 5.49 é teorema de transporte de Reynolds e expressa a fórmula básica de que uma derivada temporal do sistema equivale à taxa de variação de B dentro do volume de controle mais o fluxo de B na superfície de controle, para fora, menos o fluxo de B na superfície de controle, para dentro. A quantidade B (ou β) pode ser qualquer grandeza vetorial ou escalar do fluido. Duas formas alternativas são possíveis para os termos de fluxo. Primeiro, podemos notar que $u \cos(\theta)$ é o componente de \vec{u} normal ao elemento de área da superfície de controle. Logo, podemos escrever

$$\text{Termos de Fluxo} = \int_{SC} \beta \rho u_n dA_{sada} - \int_{SC} \beta \rho u_n dA_{entrada} = \int_{SC} \beta d\dot{m}_{sada} - \int_{SC} \beta d\dot{m}_{entrada}, \quad (4.49)$$

em que $u_n = (\vec{u} \cdot \hat{n})$ e $d\dot{m} = \rho u_n dA$ representando o fluxo de massa através da superfície. De forma compacta, o teorema de Reynolds fica:

$$\frac{d}{dt}(B_{sis}) = \frac{d}{dt} \left(\int_{VC} \beta \rho dV \right) + \int_{SC} \beta \rho (\vec{u} \cdot \hat{n}) dA. \quad (4.50)$$

O termo da derivada temporal para um volume de controle fixo, no qual, os elementos de volume dV não variam no tempo toma a forma

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{VC} \beta \rho dV \right) = \int_{VC} \frac{\partial}{\partial t} (\beta \rho) dV, \quad (4.51)$$

levando ao teorema de Reynolds para um volume fixo na forma compacta

$$\frac{d}{dt} (B_{sis}) = \int_{VC} \frac{\partial}{\partial t} (\beta \rho) dV + \int_{SC} \beta \rho (\vec{u} \cdot \hat{n}) dA. \quad (4.52)$$

4.4.2 Teorema de Transporte de Reynolds para um Volume de Controle em Movimento com Velocidade Constante

No caso onde o volume de controle se move com velocidade constante \vec{u}_s , a velocidade relativa do fluido para um observador no volume de controle será:

$$\vec{u}_r = \vec{u} - \vec{u}_s, \quad (4.53)$$

e o teorema de Reynolds fica portanto como na equação a seguir.

$$\frac{d}{dt} (B_{sis}) = \frac{d}{dt} \left(\int_{VC} \beta \rho dV \right) + \int_{SC} \beta \rho (\vec{u}_r \cdot \hat{n}) dA. \quad (4.54)$$

As integrais de fluxo serão proporcionais a u_r , mas a integral de volume se mantém por que o volume de controle não se deforma.

4.4.3 Teorema de Transporte de Reynolds para um Volume de Controle de Forma Constante mas Velocidade Variável

No caso onde o volume de controle possui velocidade $\vec{u}_s(t)$, sem se deformar, os elementos de volume não se alteram com o tempo, mas a velocidade relativa $\vec{u}_r = \vec{u}(r, t) - \vec{u}_t(t)$ na fronteira torna-se uma função complicada, dificultando o cálculo das integrais de fluxo. A forma do teorema de Reynolds não se altera com respeito a equação 5.55.

4.4.4 Teorema de Transporte de Reynolds para Movimentos e Deformações Arbitrárias

Para um volume de controle que tanto se move quanto se deforma arbitrariamente (figura 5.7), o fluxo de volume através da superfície de controle é ainda proporcional ao componente normal da velocidade relativa, $(\vec{u}_r \cdot \hat{n})$. Por sua vez, a superfície de controle se deforma, sendo sua velocidade $\vec{u}_s = \vec{u}_s(r, t)$, de modo que a velocidade relativa, $\vec{u}_r = \vec{u}(r, t) - \vec{u}_s(r, t)$, pode ser uma função complicada, apesar de a integral de fluxo ter a mesma forma que na equação 5.55. Entretanto, a integral de volume na mesma equação deve agora considerar a distorção dos elementos de volume com o tempo. Logo, a derivada temporal deve ser aplicada após a integração. Assim, o teorema de transporte para um volume de controle deformável assume a forma:

$$\frac{d}{dt}(B_{sis}) = \frac{d}{dt} \left(\int_{VC} \beta \rho dV \right) + \int_{SC} \beta \rho (\vec{u}_r \cdot \hat{n}) dA. \quad (4.55)$$

4.4.5 Aproximação unidimensional para termos de fluxo

Em certas situações, o fluxo atravessa as fronteiras da superfície de controle apenas em certas regiões simplificadas, que são aproximadamente unidimensionais, isto é, as propriedades do fluxo são aproximadamente uniformes ao longo destas regiões de entrada ou de saída. Logo, os dois termos de integral de fluxo requeridos na equação 5.55 se reduzem a uma simples soma de termos com sinal positivo (saída) e termos com sinal negativo (entrada), dados por produtos das propriedades do fluxo nestas regiões.

Para um volume de controle onde tais regiões representam entradas e saídas unidimensionais, como na figura 5.8, o teorema de Reynolds assume a forma:

$$\frac{d}{dt}(B_{sis}) = \frac{d}{dt} \left(\int_{VC} \beta dm \right) + \sum_{sada} \beta \dot{m}|_{sada} - \sum_{entrada} \beta \dot{m}|_{entrada}, \quad (4.56)$$

em que $\dot{m}_i = \rho_i A_i u_i$.

Então, ainda com base na figura 5.8, com $\rho = \rho_1 = \dots = \rho_5$ e $A = A_1 = \dots = A_5$, expressamos o teorema como:

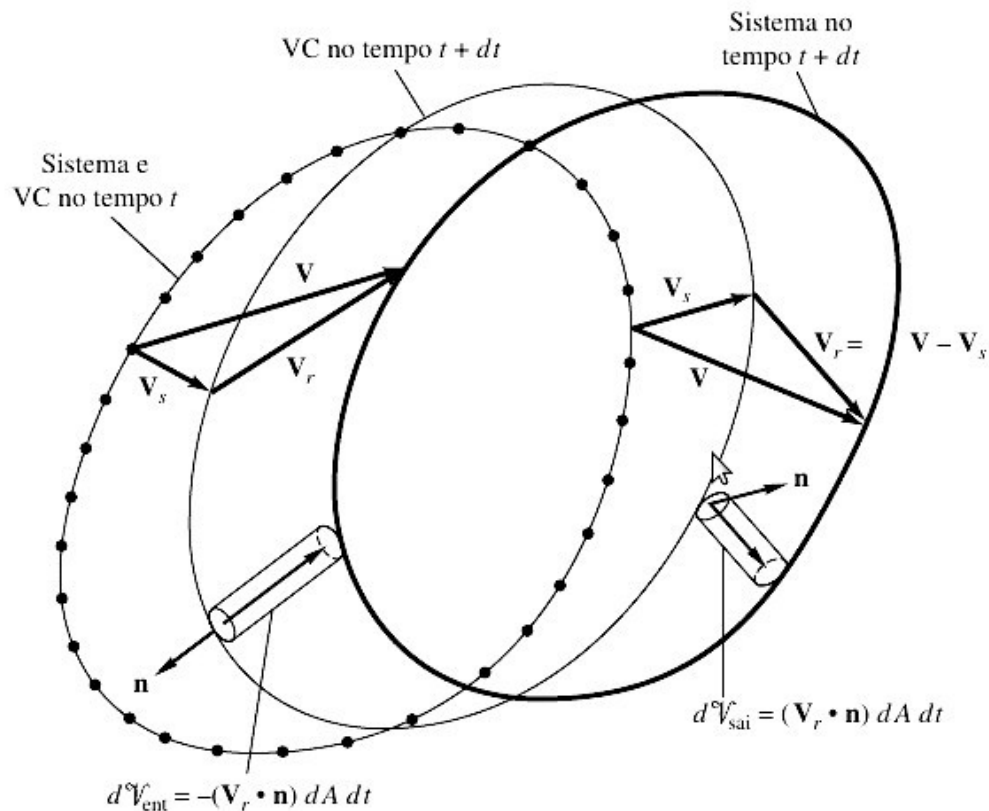


Figura 4.7: Efeitos da velocidade relativa entre um sistema e um volume de controle quando ambos se movem e se deformam. As fronteiras do sistema movem-se à velocidade \vec{u} , e a superfície de controle move-se à velocidade \vec{u}_s .

$$\frac{d}{dt}(B_{sis}) = \frac{d}{dt} \left(\int_{VC} \beta dm \right) + \beta_2(\rho Au)_2 + \beta_3(\rho Au)_3 + \beta_5(\rho Au)_5 - \beta_1(\rho Au)_1 - \beta_4(\rho Au)_4. \quad (4.57)$$

4.5 Equação do Momento Linear

Partindo do teorema de Reynolds para um volume de controle elementar,

$$\sum \vec{F} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{VC} \vec{u} \rho dV \right) + \sum (\dot{m} \vec{u})_{sada} - \sum (\dot{m} \vec{u})_{entrada}. \quad (4.58)$$

Fazendo $dV \rightarrow 0$, reduzimos a integral de volume a forma,

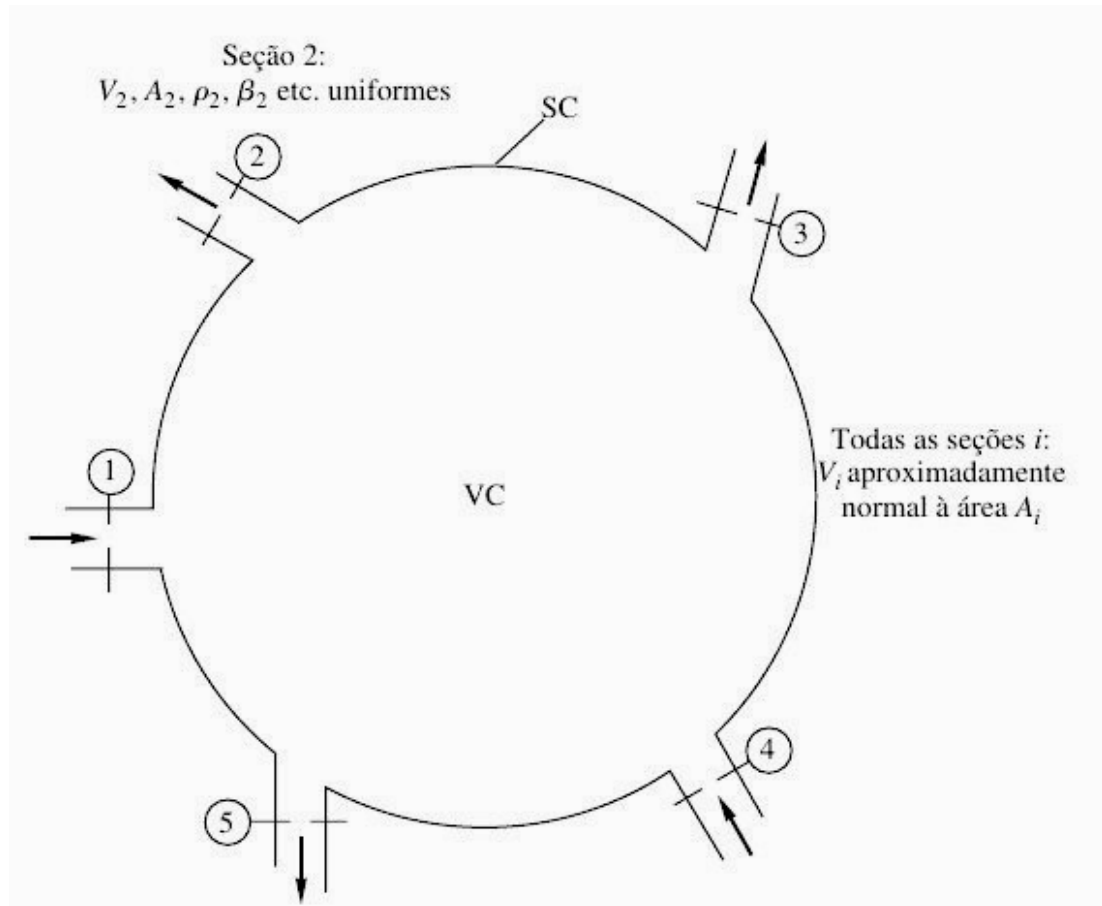


Figura 4.8: Volume de controle com entradas e saídas unidimensionais simplificadas.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{u}\rho dV) \approx \frac{\partial}{\partial t}(\vec{u}\rho)dx_1dx_2dx_3. \quad (4.59)$$

Os fluxos de momento linear ocorrem nas seis faces, três entradas e três saídas, considerando uma partícula de fluido de forma cúbica. Uma tabela de fluxos de momento linear é apresentada a seguir para cada uma das faces.

Face	Fluxo de momento linear na entrada	Fluxo de momento linear na saída
x_1	$\rho u_1 \vec{u} dx_2 dx_3$	$[\rho u_1 \vec{u} + \frac{\partial}{\partial x_1}(\rho u_1 \vec{u}) dx_1] dx_2 dx_3$
x_2	$\rho u_2 \vec{u} dx_1 dx_3$	$[\rho u_2 \vec{u} + \frac{\partial}{\partial x_2}(\rho u_2 \vec{u}) dx_2] dx_1 dx_3$
x_3	$\rho u_3 \vec{u} dx_1 dx_2$	$[\rho u_3 \vec{u} + \frac{\partial}{\partial x_3}(\rho u_3 \vec{u}) dx_3] dx_1 dx_2$

Tabela 4.1: Tabela de fluxos de momento linear.

Levando estes termos e a condição 5.60 na equação 5.59 obtemos como resultado,

$$\sum \vec{F} = dx_1 dx_2 dx_3 \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{u}) + \frac{\partial}{\partial x_1}(\rho u_1 \vec{u}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\rho u_2 \vec{u}) + \frac{\partial}{\partial x_3}(\rho u_3 \vec{u}) \right] \quad (4.60)$$

Resolvendo os termos entre colchetes,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{u}) + \frac{\partial}{\partial x_1}(\rho u_1 \vec{u}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\rho u_2 \vec{u}) + \frac{\partial}{\partial x_3}(\rho u_3 \vec{u}) = \quad (4.61)$$

$$\vec{u} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \left(\rho u_1 \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_1} + \vec{u} \frac{\partial(\rho u_1)}{\partial x_1} \right) + \left(\rho u_2 \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_2} + \vec{u} \frac{\partial(\rho u_2)}{\partial x_2} \right) + \left(\rho u_3 \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_3} + \vec{u} \frac{\partial(\rho u_3)}{\partial x_3} \right) = \quad (4.62)$$

$$\vec{u} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\rho u_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(\rho u_3)}{\partial x_3} \right] + \rho \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_3} \right] \quad (4.63)$$

O primeiro termo a direita entre colchetes em 5.64 é a equação da continuidade (a qual se anula identicamente), enquanto que o segundo é a aceleração.

$$\sum \vec{F} = dx_1 dx_2 dx_3 \left\{ \vec{u} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\rho u_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(\rho u_3)}{\partial x_3} \right] + \rho \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_3} \right] \right\} \quad (4.64)$$

$$\sum \vec{F} = dx_1 dx_2 dx_3 \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} \quad (4.65)$$

A Equação 5.65 afirma que a força resultante sobre o volume de controle deve ser de tamanho diferencial e proporcional ao volume do elemento. A determinação da força resultante consistirá de duas contribuições, uma associada as forças de corpo e outra das forças de superfície. As forças de corpo agem igualmente em cada elemento da partícula de fluido. Esta força é representada por um vetor força por unidade de volume atuando no centro da partícula e designado por \vec{F}_b . A expressão inicial da força resultante é apresentada abaixo.

$$\vec{F} = \rho \vec{F}_b + \vec{F}_s \quad (4.66)$$

O termo de força de corpo vem multiplicado pela densidade para que sua dimensionalidade seja N/m^3 , ou seja força por unidade de volume. No limite para uma partícula de fluido infinitesimal em um ponto do campo, a força de corpo que age no ponto é:

$$\rho \vec{F}_b = \rho \vec{F}'_b dV, \quad (4.67)$$

onde \vec{F}'_b é a força de corpo agindo em cada elemento da partícula de fluido.

As forças de superfície decorrem das tensões sobre os lados da superfície de controle da partícula. Essas tensões são a soma da pressão hidrostática mais as tensões viscosas σ_{ji} que surgem do movimento com gradientes de velocidade:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} -p + \sigma_{x_1x_1} & \sigma_{x_2x_1} & \sigma_{x_3x_1} \\ \sigma_{x_1x_2} & -p + \sigma_{x_2x_2} & \sigma_{x_3x_2} \\ \sigma_{x_1x_3} & \sigma_{x_2x_3} & -p + \sigma_{x_3x_3} \end{pmatrix}. \quad (4.68)$$

Não são essas tensões, mas seus gradientes, ou diferenças, que causam uma força líquida sobre a superfície de controle diferencial. Isso pode ser visto na figura 5.9, que mostra apenas as tensões na direção x_1 para evitar complicação no desenho.

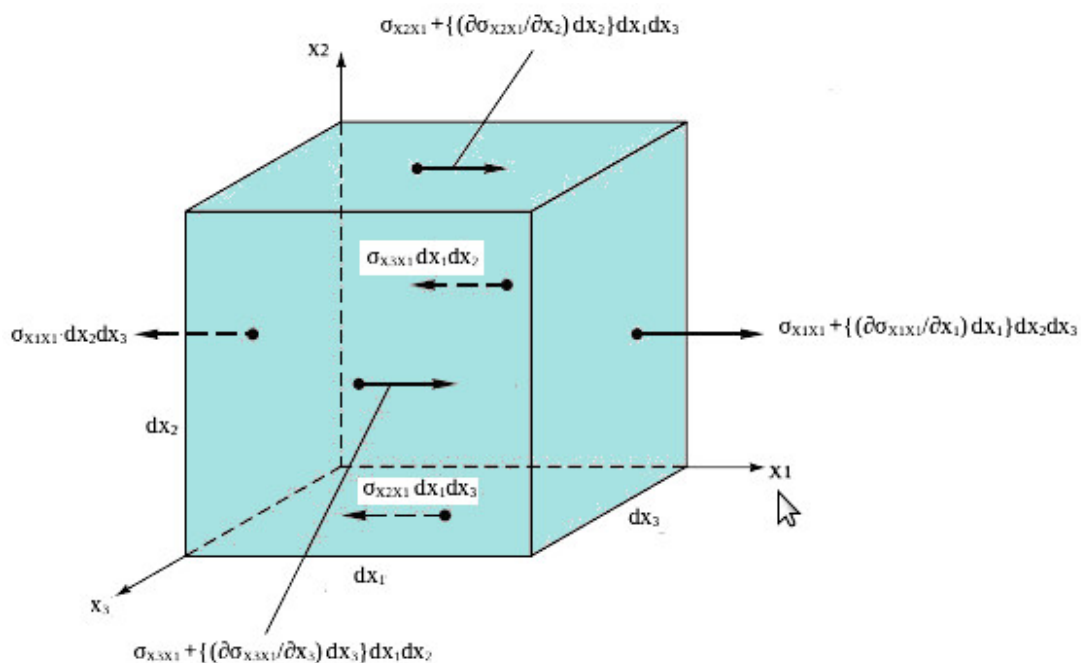


Figura 4.9: Partícula de fluido elementar que mostra as forças de superfície somente na direção x_1 .

A força $(\sigma_{x_1x_1} dx_2 dx_3)$ para a esquerda sobre a face esquerda está equilibrada pela força $\sigma_{x_1x_1} dx_2 dx_3$ para a direita sobre a face direita, deixando apenas a força líquida para a direita $(\partial \sigma_{x_1x_1} / \partial x_1) dx_1 dx_2 dx_3$ sobre a face direita. A mesma coisa acontece nas outras quatro faces, de modo que a força de superfície líquida na direção x_1 é

$$dF_{x_1, sup} = \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (\sigma_{x_1x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (\sigma_{x_2x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (\sigma_{x_3x_1}) \right] dx_1 dx_2 dx_3. \quad (4.69)$$

A força é proporcional ao volume do elemento. Note que os termos de tensão são tirados da

primeira linha da matriz da equação 5.68. Separando essa linha em tensões decorrentes da pressão mais as tensões viscosas, podemos reescrever a equação 5.69 como:

$$\frac{dF_{x_1}}{dV} = \left[-\frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_1}(\sigma_{x_1x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\sigma_{x_2x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_3}(\sigma_{x_3x_1}) \right]. \quad (4.70)$$

Para as demais direções,

$$\frac{dF_{x_2}}{dV} = \left[-\frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_1}(\sigma_{x_1x_2}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\sigma_{x_2x_2}) + \frac{\partial}{\partial x_3}(\sigma_{x_3x_2}) \right], \quad (4.71)$$

$$\frac{dF_{x_3}}{dV} = \left[-\frac{\partial p}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_3}(\sigma_{x_1x_3}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\sigma_{x_2x_3}) + \frac{\partial}{\partial x_3}(\sigma_{x_3x_3}) \right]. \quad (4.72)$$

A equação para o vetor força líquida (resultante) de superfície é:

$$\frac{d\vec{F}}{dV_{sup}} = -\nabla p + \frac{d\vec{F}}{dV_{vis}}, \quad (4.73)$$

onde força viscosa tem nove termos .

$$\frac{d\vec{F}}{dV_{viscosa}} = \hat{i} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(\sigma_{x_1x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\sigma_{x_2x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_3}(\sigma_{x_3x_1}) \right) \quad (4.74)$$

$$+ \hat{j} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(\sigma_{x_1x_2}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\sigma_{x_2x_2}) + \frac{\partial}{\partial x_3}(\sigma_{x_3x_2}) \right) \quad (4.75)$$

$$+ \hat{k} \left(\frac{\partial}{\partial x_3}(\sigma_{x_1x_3}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\sigma_{x_2x_3}) + \frac{\partial}{\partial x_3}(\sigma_{x_3x_3}) \right) \quad (4.76)$$

Como cada termo entre parênteses em representa o divergente de um vetor componente de tensão agindo sobre as faces x_1 , x_2 e x_3 , respectivamente, as equações 5.75-5.77 às vezes é expressa na forma de divergente:

$$\frac{d\vec{F}}{dV_{viscosa}} = \nabla \cdot \sigma_{ji} \quad (4.77)$$

onde

σ_{ji} é o tensor de tensões viscosas agindo sobre a partícula. A força de superfície é, então, a soma do vetor gradiente de pressão e o divergente do tensor de tensão viscosa. Então, a equação diferencial básica do momento linear para uma partícula de fluido tem a forma:

$$\rho g - \nabla p + \nabla \cdot \sigma_{ji} = \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} \quad (4.78)$$

A equação 5.79 é a forma compacta de forma que sua complexidade é quase desapercibida. Ela é uma equação vetorial, em que cada uma das equações componentes contém nove termos. Vamos, portanto, escrever as equações componentes na sua forma completa para ilustrar as dificuldades matemáticas inerentes na equação do momento linear:

$$\rho g_{x_1} - \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_1}(\sigma_{x_1x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\sigma_{x_2x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_3}(\sigma_{x_3x_1}) = \rho \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) \quad (4.79)$$

$$\rho g_{x_2} - \frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_1}(\sigma_{x_1x_2}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\sigma_{x_2x_2}) + \frac{\partial}{\partial x_3}(\sigma_{x_3x_2}) = \rho \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) \quad (4.80)$$

$$\rho g_{x_3} - \frac{\partial p}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_1}(\sigma_{x_1x_3}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\sigma_{x_2x_3}) + \frac{\partial}{\partial x_3}(\sigma_{x_3x_3}) = \rho \left(\frac{\partial u_3}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \quad (4.81)$$

Essa é a equação diferencial do momento linear na sua forma completa e ela é válida para qualquer fluido em qualquer movimento em geral, os fluidos particulares sendo caracterizados por termos de tensão viscosa particulares.

4.6 Equação da Energia

Aplicamos o teorema de transporte de Reynolds à primeira lei da termodinâmica³, onde a variável B torna-se a energia E , e a energia por unidade de massa é $\beta = dE/dm = e$.

$$E = Q - W \quad (4.82)$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt} \quad (4.83)$$

³Q positivo significa calor adicionado ao sistema, e W positivo significa trabalho realizado pelo sistema.

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{VC} e \rho dV \right) + \int_{SC} e \rho (\vec{u} \cdot \hat{n}) dA \quad (4.84)$$

A energia por unidade de massa do sistema é dada por vários fatores.

$$e = e_{interna} + e_{cinetica} + e_{potencial} + e_{outras} \quad (4.85)$$

A energia interna \hat{u} é a energia armazenada em um sistema por atividade molecular e forças de ligação moleculares. A energia potencial é igual ao trabalho necessário para mover o sistema de massa m da origem até uma posição $\vec{r} = \hat{i}x_1 + \hat{j}x_2 + \hat{k}x_3$ contra o campo gravitacional \vec{g} . Seu valor é $-m\vec{g} \cdot \vec{r}$, ou $-\vec{g} \cdot \vec{r}$ por unidade de massa. A energia cinética é igual ao trabalho necessário para variar a velocidade da massa de zero até a velocidade $|\vec{u}|$. Seu valor $1/2m|\vec{u}|^2$, ou $1/2|\vec{u}|^2$ por unidade de massa. Então, por convenção, a energia total armazenada e por unidade de massa é a soma desses três termos:

$$e = \hat{u} + \frac{1}{2}|\vec{u}|^2 - (\vec{g} \cdot \vec{r}) \quad (4.86)$$

Usando por conveniência o “ponto em cima” para denotar derivadas temporais, dividiremos o termo de trabalho em duas partes:

$$\dot{W} = \dot{W}_p + \dot{W}_s \quad (4.87)$$

O trabalho das forças gravitacionais já foi incluído na forma de energia potencial na equação 4.86. A taxa de trabalho \dot{W}_p realizada pelas forças de pressão ocorrem apenas na superfície; todos os trabalhos das porções internas de material no volume de controle realizam-se por forças iguais e opostas e se cancelam.

O trabalho da pressão é igual ao produto da força de pressão sobre um elemento de superfície dA , pelo componente normal da velocidade entrando no volume de controle.

$$\dot{W}_p = \int_{SC} d\dot{W}_p = \int_{SC} -p(-\vec{u} \cdot \hat{n}) dA \quad (4.88)$$

O trabalho das tensões viscosas ocorre na superfície de controle, com os termos de trabalho interno se cancelando, sendo o produto de cada tensão viscosa (uma normal e duas tangenciais)

pelo respectivo componente de velocidade.

$$\dot{W}_v = - \int_{SC} (\sigma \cdot \vec{u}) dA \quad (4.89)$$

σ é o vetor de tensões agindo sobre o elemento de superfície dA . Esse termo pode desaparecer ou ser desprezível, de acordo com o tipo particular de superfície naquela parte do volume de controle:

- Superfície sólida. Para todas as partes da superfície de controle que são paredes sólidas de confinamento, $\vec{u} = 0$, devido à condição de não deslizamento; logo, $\dot{W}_s = 0$;
- Entradas ou saídas. Em uma entrada ou saída, o fluxo é aproximadamente normal ao elemento dA ; logo, o único termo viscoso vem das tensões normais, $\sigma_{nn}u_n dA$. Uma vez que as tensões viscosas normais são extremamente pequenas na grande maioria dos casos, exceto em casos raros, tais como no interior de uma onda de choque, é costume desprezar o trabalho viscoso nas entradas e saídas do volume de controle.
- Superfície de corrente. Se a superfície de controle corresponde a uma linha de corrente, o termo de trabalho viscoso deve ser avaliado e retido, caso as tensões viscosas forem significativas ao longo dessa linha.

Como resultado,

$$\dot{W} = \int_{SC} p(\vec{u} \cdot \vec{n}) dA - \int_{SC} (\sigma \cdot \vec{u}) dA \quad (4.90)$$

O termo de calor pode ser escrito considerando-se dois mecanismos: o primeiro é a absorção ou transferência de calor por fontes ou sumidouros ao longo do volume da partícula de fluido.

$$\dot{Q}_R = \int_{VC} \rho R dV \quad (4.91)$$

O segundo mecanismo se deve a condução de calor.

$$\dot{Q}_k = \int_{SC} (\vec{K} \cdot \hat{n}) dA \quad (4.92)$$

Na equação 4.92, $\vec{K} = k_h \nabla T$, sendo k_h o coeficiente de condução de calor. Dessa forma,

$$\dot{Q} = \int d\dot{Q} = \int_{VC} \rho R dV - \int_{SC} (\vec{K} \cdot \hat{n}) dA. \quad (4.93)$$

Por fim, a equação da energia na forma integral pode ser escrita como:

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{VC} e \rho dV \right) + \int_{SC} e \rho (\vec{u} \cdot \hat{n}) dA = - \int_{SC} p (\vec{u} \cdot \vec{n}) dA + \int_{SC} (\sigma \cdot \vec{u}) dA \quad (4.94)$$

$$\int_{VC} \rho R dV - \int_{SC} (\vec{K} \cdot \hat{n}) dA.$$

Agrupando os dois termos adjacentes a igualdade em 4.94,

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{VC} e \rho dV \right) + \int_{SC} \left(e + \frac{p}{\rho} \right) \rho (\vec{u} \cdot \hat{n}) dA = - \int_{SC} (\sigma \cdot \vec{u}) dA \quad (4.95)$$

$$\int_{VC} \rho R dV - \int_{SC} (\vec{K} \cdot \hat{n}) dA.$$

Considerando que $e = \hat{u} + \frac{1}{2} |\vec{u}|^2 - (\vec{g} \cdot \vec{r})$,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{VC} \left(\hat{u} + \frac{1}{2} |\vec{u}|^2 - (\vec{g} \cdot \vec{r}) \right) \rho dV \right) + \int_{SC} \left(\hat{u} + \frac{1}{2} |\vec{u}|^2 - (\vec{g} \cdot \vec{r}) + \frac{p}{\rho} \right) \rho (\vec{u} \cdot \hat{n}) dA \quad (4.96)$$

$$= \int_{SC} p (\vec{u} \cdot \vec{n}) dA - \int_{SC} (\sigma \cdot \vec{u}) dA + \int_{VC} \rho R dV - \int_{SC} (\vec{K} \cdot \hat{n}) dA.$$

A entalpia, definida como $\hat{h} = \hat{u} + (p/\rho)$, pode ser substituída no segundo termo do lado direito da equação 4.96 para chegarmos a uma expressão geral para a equação da energia na forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{VC} \left(\hat{u} + \frac{1}{2} |\vec{u}|^2 - (\vec{g} \cdot \vec{r}) \right) \rho dV \right) + \int_{SC} \left(\hat{h} + \frac{1}{2} |\vec{u}|^2 - (\vec{g} \cdot \vec{r}) \right) \rho (\vec{u} \cdot \hat{n}) dA \quad (4.97)$$

$$= \int_{SC} p (\vec{u} \cdot \vec{n}) dA - \int_{SC} (\sigma \cdot \vec{u}) dA + \int_{VC} \rho R dV - \int_{SC} (\vec{K} \cdot \hat{n}) dA.$$

Se o volume de controle tem uma série de entradas e saídas unidimensionais, como na figura 5.8, a integral de superfície em (4.97) se reduz a um somatório de fluxos de saída menos fluxos de entrada:

$$\int_{SC} \left(\hat{h} + \frac{1}{2} |\vec{u}|^2 - (\vec{g} \cdot \vec{r}) \right) \rho (\vec{u} \cdot \hat{n}) dA = \sum (\hat{h} + \frac{1}{2} |\vec{u}|^2 - (\vec{g} \cdot \vec{r}))_{sada} \dot{m}_{sada} - \sum (\hat{h} + \frac{1}{2} |\vec{u}|^2 - (\vec{g} \cdot \vec{r}))_{entrada} \dot{m}_{entrada} \quad (4.98)$$

Para transformarmos do enfoque de volume de controle para sistema infinitesimal, aplicamos o teorema da divergência aos termos contendo integrais de superfície na equação 1.96, de forma que:

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{VC} e \rho dV \right) + \int_{VC} \nabla \cdot \left(e + \frac{p}{\rho} \right) \rho \vec{u} dV = - \int_{VC} \nabla \cdot (\sigma \cdot \vec{u}) dV - \int_{VC} \rho R dV + \int_{VC} \nabla \cdot \vec{K} dV. \quad (4.99)$$

No limite onde $dV \rightarrow 0$, a forma diferencial da equação da energia é:

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{\partial}{\partial t} (e \rho) + \nabla \cdot \left(e + \frac{p}{\rho} \right) \rho \vec{u} = - \nabla \cdot (\sigma \cdot \vec{u}) + \rho R - \nabla \cdot \vec{K}. \quad (4.100)$$

4.7 Equação de Bernoulli

É uma equação relacionada à equação da energia para fluxo estável. A mesma apresenta uma relação entre pressão, velocidade e elevação para um fluido sem atrito, conhecida como a equação de Bernoulli. A equação de Bernoulli é muito famosa e bastante usada, mas é necessário estar atento às suas restrições — todos os fluidos são viscosos e, portanto, todos os fluxos apresentam algum efeito de atrito. Para usarmos corretamente a equação de Bernoulli, devemos restringi-la a regiões de fluxo aproximadamente sem atrito.

Considere a figura 5.10, na qual um volume de controle formado por um tubo de corrente elementar, fixo, de área variável $A(s)$ e comprimento ds , em que s é uma coordenada natural na direção das linhas de corrente. As propriedades (r, u, p) podem variar com s e com o tempo, mas são consideradas uniformes sobre a seção transversal A . A orientação u do tubo de corrente é arbitrária, com uma variação de elevação $dx_3 = ds \sin(\theta)$. Os efeitos de viscosidade são desprezados — uma hipótese altamente restritiva. Observe que, no limite quando a área tende

a zero, o tubo de corrente é equivalente a uma linha de corrente do fluxo. A equação de Bernoulli é válida para ambos e usualmente é enunciada como válida “ao longo de uma linha de corrente” em um fluxo invíscido. A conservação da massa para esse volume de controle elementar, conduz a:

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{VC} \rho dV \right) + \dot{m}_{sada} - \dot{m}_{entrada} = 0 \approx \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + d\dot{m}, \quad (4.101)$$

em que $m = \rho AV$ e $dv \approx A ds$. A conservação da massa toma a forma

$$d\dot{m} = d(\rho AV) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} A ds \quad (4.102)$$

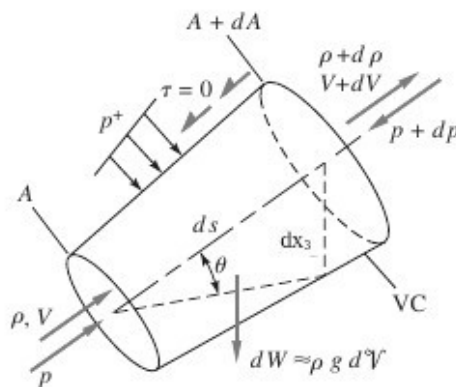


Figura 4.10: Volume de controle formado por um tubo de corrente elementar, fixo, de área variável $A(s)$ e comprimento ds , em que s é uma coordenada natural na direção das linhas de corrente.

A quantidade de momento linear na direção das linhas de corrente é:

$$\sum dF_s = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{VC} u \rho dV \right) + \sum (\dot{m}u)_{sada} - \sum (\dot{m}u)_{entrada} \approx \frac{\partial}{\partial t} A ds + d(\dot{m}u), \quad (4.103)$$

em que $u_s = u$, pois s está na direção da própria linha de corrente. Se desprezarmos os efeitos de viscosidade nas paredes, as forças se devem à pressão e à gravidade. A força de gravidade na direção da linha de corrente é igual ao correspondente componente do peso do fluido no interior do volume de controle:

$$dF_{s,gravidade} = -dP \operatorname{sen}(\theta) = -\gamma Ads \operatorname{sen}(\theta) = -\gamma Adx_3 \quad (4.104)$$

A força de pressão é facilmente visualizada, na figura 5.11, subtraindo antes um valor uniforme p de todas as superfícies. A força de pressão ao longo da lateral inclinada do tubo de corrente tem um componente na direção das linhas de corrente, que age não sobre A , mas sobre o anel externo correspondente à variação de área dA . A força de pressão resultante é, portanto,

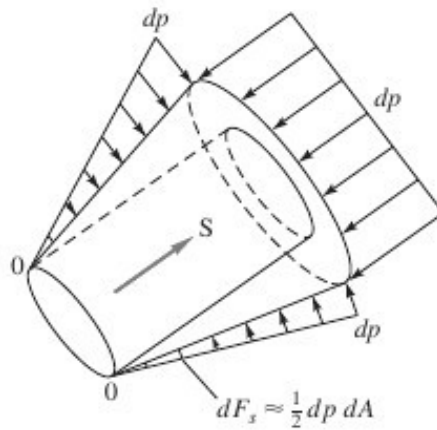


Figura 4.11: Força líquida de pressão após subtração uniforme de p .

$$dF_{s,presso} = \frac{1}{2} dp dA - dp(A + dA) \approx -Adp \quad (4.105)$$

Substituindo esses dois termos de força na relação de momento linear:

$$\sum F_s = -\gamma Adx_3 - Adp = \left(\frac{\partial}{\partial t}(\rho u A) \right) ds + d(\dot{m}u) = \frac{\partial \rho}{\partial t}(uA) ds + \frac{\partial u}{\partial t}(\rho A) ds + \dot{m} du + u \dot{m} \quad (4.106)$$

O primeiro e o último termos da direita se cancelam, em virtude da relação da continuidade.

Dividindo o que resta por ρA e rearranjando, obtém-se a relação final desejada:

$$-gdx_3 - \frac{dp}{\rho} = \frac{\partial u}{\partial t} ds + u du \quad (4.107)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} ds + \frac{dp}{\rho} + u du + g dx_3 = 0 \quad (4.108)$$

Essa é a equação de Bernoulli para fluxo sem efeitos de viscosidade, instável, ao longo de uma linha de corrente. Ela está numa forma diferencial e pode ser integrada entre dois pontos 1 e 2 quaisquer sobre a linha de corrente:

$$\int_1^2 \frac{\partial u}{\partial t} ds + \int_1^2 \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2}(u_2^2 - u_1^2) + g(x_{32} - x_{31}) = 0 \quad (4.109)$$

Para calcularmos as duas integrais restantes, devemos estimar o efeito não da dependência com o tempo $\partial u/\partial t$ e a variação da densidade com a pressão. Por ora, consideramos apenas o caso de um fluxo estável em regime uniforme $\partial u/\partial t = 0$ e incompressível (densidade constante), para o qual a equação 5.110 torna-se

$$\frac{(p_2 - p_1)}{\rho} + \frac{1}{2}(u_2^2 - u_1^2) + g(x_{32} - x_{31}) = 0, \quad (4.110)$$

ou

$$\frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2}u_2^2 + g x_{32} = \frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2}u_1^2 + g x_{31}. \quad (4.111)$$

A relação anterior é a equação de Bernoulli para um fluxo incompressível, sem viscosidade, em regime uniforme ao longo de uma linha de corrente.

4.8 Equação da Vorticidade

Para estabelecer uma equação para a vorticidade, partimos da expressão da aceleração de uma partícula de fluido.

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}, \quad (4.112)$$

o segundo termo a direita na equação pode ser reescrito a partir da seguinte identidade vetorial:

$$\vec{u} \times (\nabla \times \vec{u}) = \nabla \left(\frac{|\vec{u}|^2}{2} \right) - (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}, \quad (4.113)$$

$$(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} = \nabla\left(\frac{|\vec{u}|^2}{2}\right) - (\vec{u} \times \vec{w}) \quad (4.114)$$

Da equação de Euler,

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{|\vec{u}|^2}{2}\right) - (\vec{u} \times \vec{w}) = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \rho\vec{g} \quad (4.115)$$

Aplicando o rotacional a ambos os lados da equação anterior,

$$\nabla \times \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{|\vec{u}|^2}{2}\right) - (\vec{u} \times \vec{w}) \right] = \nabla \times \left(-\frac{1}{\rho}\nabla p + \rho\vec{g} \right), \quad (4.116)$$

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} - \nabla \times (\vec{u} \times \vec{w}) = 0, \quad (4.117)$$

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{w} - (\vec{w} \cdot \nabla)\vec{u} + (\nabla \cdot \vec{u})\vec{w} - (\nabla \cdot \vec{w})\vec{u} = 0 \quad (4.118)$$

Para fluxos incompressíveis $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ e, adicionalmente, $\nabla \cdot \vec{w} = 0$ com $\vec{w} = \nabla \times \vec{u}$. Assim,

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{w} = (\vec{w} \cdot \nabla)\vec{u} \quad (4.119)$$

Essa é a equação geral da vorticidade. Ela relaciona a mudança da vorticidade de uma partícula de fluido aos gradientes do vetor \vec{u} na direção de \vec{w} .

4.9 Propriedades da Equação da Vorticidade

i. Se $\vec{w} = 0$ em qualquer ponto, então \vec{w} permanece constante. Assim um fluxo que inicia rotacional se mantém irrotacional;

ii. Em um fluxo planar bidimensional, $\vec{u} = (u_1(x_1, x_2), u_2(x_1, x_2), 0)$, o vetor vorticidade tem apenas um componente,

$$\vec{w} = \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \hat{e}_{x_3}, \quad (4.120)$$

de forma que

$$(\vec{w} \cdot \nabla) \vec{u} = \vec{w} \frac{d}{dx_3} \vec{u}(x_1, x_2) = 0. \quad (4.121)$$

Com isso, a equação da vorticidade se reduz a

$$\frac{D\vec{w}}{Dt} = \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{w} = 0. \quad (4.122)$$

O resultado anterior mostra que a vorticidade de uma partícula de fluido permanece constante. Adicionalmente, se o fluxo for uniforme, $\partial \vec{w} / \partial t = 0$ e a vorticidade é constante ao longo de uma linha de corrente.

iii. Alongamento de vórtice

"O alongamento de um vórtice leva ao crescimento de sua vorticidade".

Considere, por exemplo, um fluxo estável e incompressível em um cone convergente, função da distância radial em coordenadas polares. A velocidade radial é:

$$u(\vec{r}) = u_r \hat{e}_r + u_\phi \hat{e}_\phi \quad (4.123)$$

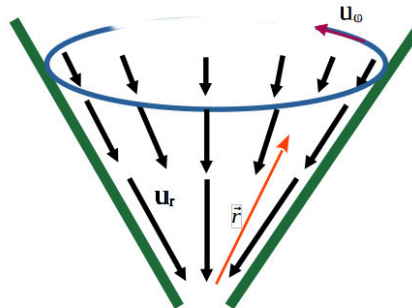


Figura 4.12: Cone convergente.

A componente u_r representa a velocidade radial de entrada, enquanto que u_ϕ é a velocidade de giro. Desde que $\nabla \times (u_r(r) \hat{e}_r) = 0$, apenas o movimento de giro contribui para o vetor vorticidade,

$$\vec{w}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{u} = \nabla \times (u_\phi(r) \hat{e}_\phi) = w_r \hat{e}_r + w_\phi \hat{e}_\phi. \quad (4.124)$$

Da equação de conservação de massa para um fluxo de entrada incompressível e simétrico obtemos,

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 u_r) = 0 \iff u_r = \frac{-k}{r^2} \quad (4.125)$$

onde $k > 0$ e uma constante. Visto que o fluxo é estável, $\partial \vec{w} / \partial t = 0$, a equação para a evolução da componente da velocidade, w_r , se torna:

$$\frac{Dw_r}{Dt} = u_r \frac{dw_r}{dr} = w_r \frac{du_r}{dr} \iff \frac{d}{dr} \ln \left| \frac{w_r}{u_r} \right| = 0 \iff \frac{w_r}{u_r} = \alpha \quad (4.126)$$

Assim,

$$w_r = \alpha u_r = -\frac{\alpha k}{r^2}, \quad (4.127)$$

a qual demonstra que a vorticidade w_r cresce com o crescimento de u_r ; o vórtice inicial é alongado pelo fluxo de entrada.

4.10 Teorema de Circulação de Kelvin

Relembrando, a circulação é uma grandeza definida como

$$\Gamma = \oint \vec{u} \cdot d\vec{l}. \quad (4.128)$$

O teorema de circulação de Kelvin implica que a circulação em torno de uma curva material fechada permanece constante. Isso para um fluxo invicido, com densidade uniforme e sujeito a forças conservativas. Então,

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_{C(t)} \vec{u} \cdot d\vec{l} = 0, \quad (4.129)$$

desde que $C(t)$ seja um caminho fechado e formado por partículas de fluido.

Prova: Seja $C(t)$ uma curva material, formada de partículas de fluxo, de representação paramétrica $\chi(s, t)$ com $s \in [0, 1]$. Usando esta representação paramétrica, a taxa de variação da circulação em torno de $C(t)$ pode ser escrita como:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \int_0^1 \vec{u}(\chi(s, t), t) \cdot \frac{\partial}{\partial s} \chi(s, t) ds =$$

$$\int_0^1 \frac{d}{dt} \left[\vec{u}(\chi(s, t), t) \cdot \frac{\partial}{\partial s} \chi(s, t) \right] ds =$$

$$\int_0^1 \frac{d}{dt} (\vec{u}(\chi(s, t), t)) \cdot \frac{\partial}{\partial s} \chi(s, t) + \vec{u} \cdot \frac{\partial^2 \chi}{\partial s \partial t}$$

$$\frac{d}{dt} (\vec{u}(\chi(s, t), t)) = \frac{\partial \vec{u}}{\partial \chi} \frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \left(\frac{\partial \chi}{\partial t} \cdot \nabla \right) \vec{u} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial s \partial t} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial s}$$

$$\int_0^1 \left\{ \left[\left(\frac{\partial \chi}{\partial t} \cdot \nabla \right) \vec{u} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right] \cdot \frac{\partial \chi}{\partial s} + \vec{u} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial s} \right\} ds =$$

$$\int_0^1 \left\{ \left[(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right] \cdot \frac{\partial \chi}{\partial s} + \vec{u} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial s} \right\} ds$$

Usando a expressão de Euler,

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \nabla \left(-\frac{p}{\rho} + \vec{g} \cdot \chi \right),$$

encontramos

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_0^1 \left[\nabla \left(-\frac{p}{\rho} + \vec{g} \cdot \chi \right) \cdot \frac{\partial \chi}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{|\vec{u}|^2}{2} \right) \right] ds.$$

Considerando que,

$$\nabla \left(-\frac{p}{\rho} + \vec{g} \cdot \chi \right) \cdot \frac{\partial \chi}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial \chi} \left(-\frac{p}{\rho} + \vec{g} \cdot \chi \right) \cdot \frac{\partial \chi}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \left(-\frac{p}{\rho} + \vec{g} \cdot \chi \right),$$

chegamos a:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(-\frac{p}{\rho} + \vec{g} \cdot \chi \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{|\vec{u}|^2}{2} \right) \right] ds,$$

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_0^1 \left[d \left(-\frac{p}{\rho} + \vec{g} \cdot \chi + \frac{|\vec{u}|^2}{2} \right) \right] = 0;$$

demonstrando que o fluxo de vorticidade através da superfície que abrange a curva material é

constante.

4.11 Theoremas de Helmholtz

4.12 Aplicações da Equação de Euler

4.12.1 Caso Hidrostático

4.12.2 Equação de Euler no Referencial Girante da Terra

4.12.3 Vortice de Rankine

4.12.4 Cilindro em uma Superposição de um Campo Constante com um Vortice na Origem(Efeito Magnus e Formula de Joukovsky)

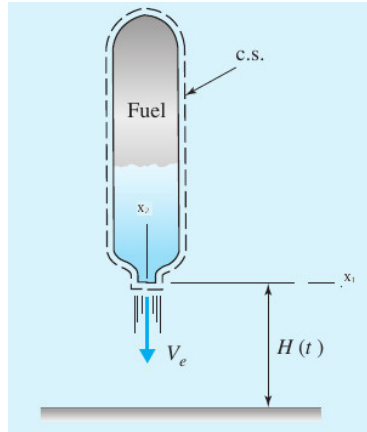
4.12.5 Instabilidade de Kelvin

4.12.6 Ondas de Gravidade

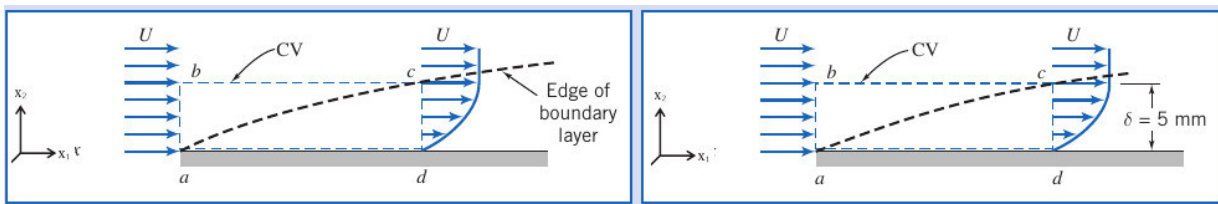
4.12.7 Ondas Sonoras

4.13 Lista de Problemas

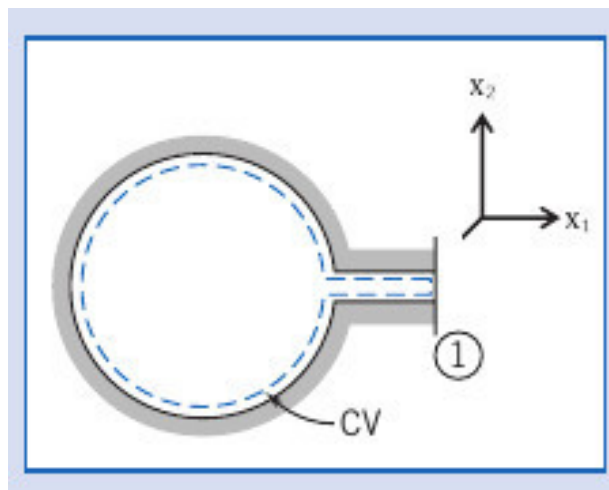
1. Escreva a equação diferencial de momento linear para um fluxo compressível na forma compacta usando notação vetorial.(5.34 merle)
2. Suponha um fluxo estável com densidade constante. Integre a equação de Euler ao longo de uma linha de corrente no plano do fluxo.(exemplo 5.6 merle)
3. O foguete abaixo com massa inicial de $150kg$ queima combustível em uma taxa de $10kg/s$ com velocidade constante de exaustão de $700m/s$. Qual é a aceleração inicial do foguete e sua velocidade após 1 s. Desconsidere a força de resistência do ar sobre o foguete. (exemplo 4.19 merle)



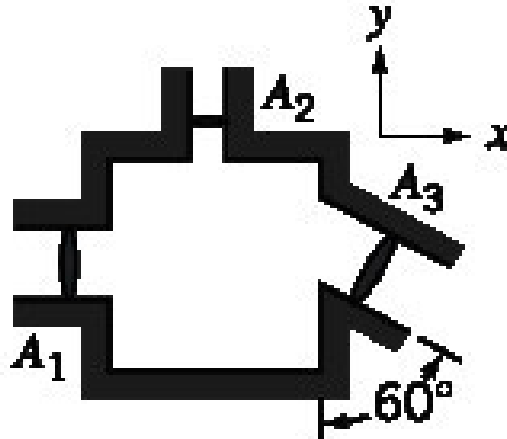
4. O fluido em contato direto com uma fronteira sólida estacionária tem velocidade zero; não há deslizamento na fronteira. Por isso o fluxo sobre uma placa plana adere à superfície da placa e forma uma camada limite, conforme ilustrado abaixo. O fluxo à frente da placa a placa é uniforme com velocidade $\vec{V} = U\hat{i}$; $U = 30\text{m/s}$. A distribuição de velocidade dentro da camada limite ($0 \leq x_2 \leq \delta$ ao longo de cd é aproximado como $u/U = 2(x_2/\delta) - (x_2/\delta)^2$. (exemplo 4.2 fox)



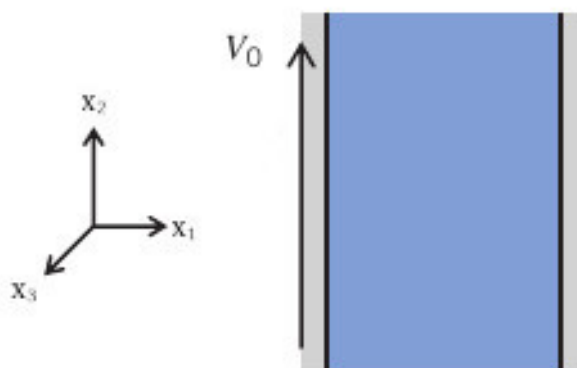
5. Um tanque com volume de 0.05m^3 contém ar a 800kPa (absoluta) e 15°C . Em $t = 0\text{s}$, o ar começa a escapar do tanque através de uma válvula com área de fluxo de 65mm^2 . O ar que passa pela válvula tem uma velocidade de 300m/s e uma densidade de 6kg/m^3 . Determine a taxa instantânea de variação da densidade no tanque em $t = 0\text{s}$. (exemplo 4.3 fox)



6. Um fluido com densidade de $1.041g/cm^3$ em um fluxo estável flui através da caixa retangular uniforme na figura a seguir. Sendo $A_1 = 0.5m^2$, $A_2 = 0.1m^2$ e $A_3 = 0.6m^2$, $u_1 = 10\hat{i}m/s$, e $u_2 = 20\hat{j}m/s$, determine u_3 . Calcule a taxa líquida de fluxo de momento através a superfície de controle.

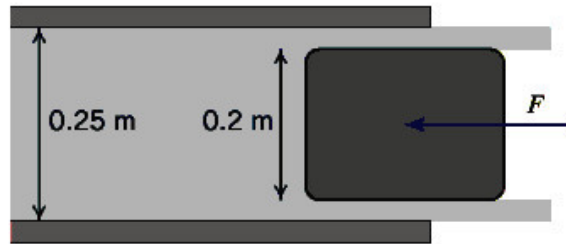


7. Considere um fluxo estável, laminar, totalmente desenvolvido, incompressível entre duas placas infinitas, como mostrado abaixo. O fluxo é devido ao movimento da placa esquerda, bem como a uma o gradiente de pressão aplicado na direção x_2 . Dadas as condições de que $\vec{u} \neq \vec{u}(z)$, $u_3 = 0$ e a gravidade aponta no direção de x_2 negativo, prove que $u_1 = 0$ e que o gradiente de pressão na direção y deve ser constante. (fox 5.89)



8. Ache a força necessária para manter em repouso na saída de um tubo de água. O fluxo volumétrico (Q) é $1.5m^3/s$, e a pressão na entrada (Diâmetro= $0.25m$) é $3.5 MPa$. (fox 4.65)

9. Um tanque de teste de laboratório contém água do mar de salinidade S e densidade ρ . A água entra no tanque nas condições (S_1, ρ_1, A_1, V_1) e presume-se que se mistura imediatamente



no tanque. A água deixa o tanque por uma saída A_2 com velocidade V_2 . Se o sal for uma propriedade “que se conserva” (não pode ser criado nem destruída), use o teorema do transporte de Reynolds para encontrar uma expressão para a taxa de variação da massa de sal M_{sal} dentro do tanque. (white 3.9)

10. O campo de velocidade a seguir,

$$u_1 = \frac{10x_1}{x_1^2 + x_2^2}$$

$$u_2 = -\frac{10x_2}{x_1^2 + x_2^2}$$

representam um possível fluxo incompressível? Se sim, encontre o gradiente de pressão ∇p assumindo um fluxo sem viscosidade e com forças de corpo desprezíveis. (5.26 Merle)

11. O campo de velocidade a seguir,

$$u_r = 10 \left(1 - \frac{1}{r^2} \right) \cos(\theta)$$

$$u_\theta = -10 \left(1 + \frac{1}{r^2} \right) \text{sen}(\theta)$$

representam um possível fluxo incompressível? Se sim, encontre o gradiente de pressão ∇p assumindo um fluxo sem viscosidade e com forças de corpo desprezíveis. (5.27 Merle)

12. O campo de velocidade a seguir,

$$u_r = 10 \left(1 - \frac{8}{r^3} \right) \cos(\theta)$$

$$u_\theta = -10 \left(1 + \frac{1}{r^3} \right) \text{sen}(\theta)$$

$$u_\phi = 0$$

representam um possível fluxo incompressível? Se sim, encontre o gradiente de pressão ∇p assumindo um fluxo sem viscosidade e com forças de corpo desprezíveis. (5.28 Merle)

13. Derive uma expressão para variação vertical de pressão na atmosfera como função da temperatura partindo da equação de momento para um fluido estático considerando a lei do gás ideal. Assuma que $T = T_0 - \gamma x_3$, onde γ é a temperatura de lapso. Plot $T(x_3)$ e $T(x_3)$.

γ ($^{\circ}\text{K}/\text{km}$)	z range (km)
6.5	0–12
0	12–22
-1	22–32

14. Um campo de velocidade é dado por $\vec{u} = 30(x_2 - 24x_2^2)ft/s$, $u_2 = 0$ e $u_3 = 0$. Apresente as componentes da tensão em $x_2 = 0.1in$ usando $\mu = 1 \times 10^{-5}lb\ s/ft^2$ e $p = 30psi$. Ache a razão entre $\tau_{x_1x_2}/\sigma_{x_1x_1}$. (5.31 Merle)

15. O campo de velocidades próximo a superfície é aproximado por $u_1 = 10(2x_2/\delta - x_2^2/\delta^2)$, onde $\delta = Cx_1^{4/5}$. Se $\delta = 8m$ em $x_1 = 1000m$, ache $u_2(x_1, x_2)$ assumindo que $x_3 = 0$ e $u_2(x_1, 0) = 0$. Adicionalmente, calcule as componentes da tensão em $(1000, 0)$ usando $\mu = 2 \times 10^{-5}N \cdot s/m^2$ e $p = 100kPa$. Assuma o fluxo como incompressível. (5.32 Merle)

16. Um vento com velocidade de $40m/s$ sopra paralelo ao telhado de uma casa. A área do telhado é de $250m^2$. Supondo que a pressão dentro da casa seja a pressão atmosférica, calcule a força exercida pelo vento no telhado e a direção da força. ($\rho_{ar} = 1.2kg/m^3$)

17. A água flui a uma taxa de $2m/s$ através de um tubo com diâmetro de $1m$. Se a pressão neste ponto for $80kPa$, qual será a pressão da água depois que o tubo se estreitar até atingir um diâmetro de $0.5m$? $\rho_{H_2O} = 1.0kg/l$. Calcule a circulação por unidade de área em torno de um caminho fechado sem incluir o centro, nos dois tipos de vórtices: (i) $vecu_s = Cr$ (ii) $vecu_s = C/r$, where u_s é a velocidade tangencial a uma distância r e $C = a$ constante. (1000 solved 3.12)