Capítulo 3

Equação da Continuidade, Vorticidade, Função Potencial e de Corrente

3.1 Equação da Continuidade no Sistema Infinitesimal e num Volume de Controle

A análise do movimento de um fluido pode seguir dois caminhos: (1) descrever o padrão de fluxo detalhado em cada ponto (x, y, z) do campo ou (2) a partir de um volume fixo (volume de controle), fazendo um balanço do fluxo de entrada versus fluxo de saída de variáveis como massa, momento e energia. A primeira abordagem se constitui na forma diferencial. A segunda é conhecida como forma integral.

Considere uma partícula de fluido de forma cúbica com volume δV em um ponto $\vec{r}$ do campo, em um tempo t. A massa da partícula será dada pela densidade multiplicada por seu volume. A variável de campo é a densidade. Se a partícula se desloca ao longo de uma linha de corrente para um região onde o fluxo esta convergindo, sua densidade irá aumentar. Da mesma forma, regiões de divergência levam a uma diminuição da densidade da partícula. A densidade da partícula também pode variar no tempo[1].

Na ausência de fontes ou sumidouros no interior do partícula de fluido, a taxa de variação temporal de massa da partícula de fluido deve ser igual ao fluxo resultante de massa através das superfícies da mesma partícula. Esta é uma suposição válida para fluxos atmosféricos desde

[1] Como exemplo podemos citar o domínio de uma nuvem onde a competição entre condensação e a evaporação afetam a densidade.

que não existem fontes ou sumidouros na atmosfera.

Considere a figura 3.1. A componente de fluxo de massa para fora da partícula será $(\vec{u} \cdot \vec{n})$. A variação de massa será positiva se o fluxo for para o interior do partícula de fluido. Integrando sobre o volume, para obtermos a taxa de variação volumétrica resultante com respeito ao tempo,

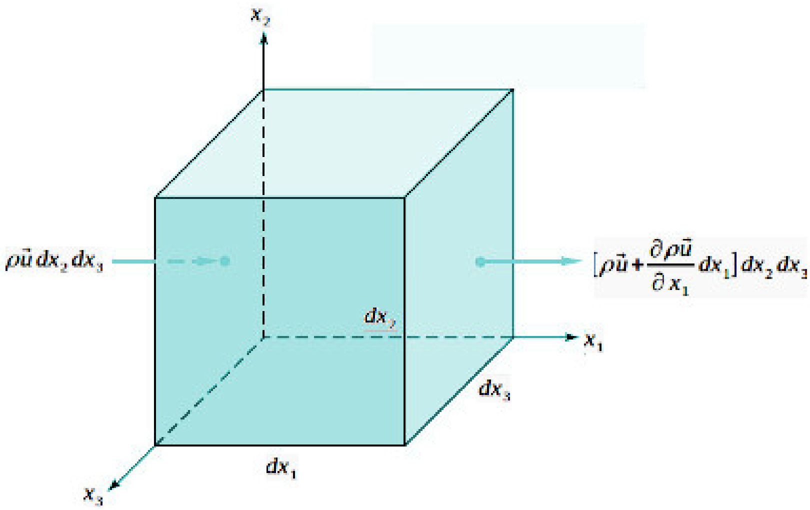

Figura 3.1: partícula de fluido em um ponto do campo (x_1, x_2, x_3), em um campo de velocidades $\vec{u}$.

e sobre a área da partícula de fluido para a obtenção do fluxo resultante através da superfície, obtemos:

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -\iint_A \rho(\vec{u} \cdot \vec{n}) dA. \tag{3.1}$$

Aplicando o teorema da divergência [2] ao lado direito da equação 3.1 obtemos:

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -\iiint_V \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} dV, \tag{3.2}$$

[2]O teorema da divergência tem a seguinte forma:

$$\iiint_V \nabla \cdot f dV = \iint_A f \cdot \hat{n} dA.,$$

O teorema da divergência implica que se a integral de superfície a direita for zero, ou seja, se o fluxo da líquido da grandeza f for zero através da superfície, o divergente de f integrado sobre o volume dV' é zero. Em termos de uma partícula de fluido, isso significa que não há fontes ou sumidouros no interior do volume da partícula. Logo, não há fluxo líquido através da superfície A.

$$\iiint\limits_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \iiint\limits_V \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} dV = 0. \tag{3.3}$$

No limite onde $dV \to 0$ no ponto $\vec{r}$, a equação 3.3 é reescrita como:

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} = 0}_{\text{Equação Geral da Continuidade}} \quad , \tag{3.4}$$

ou em notação vetorial (simbólica) como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0. \tag{3.5}$$

A última equação descreve a variação da densidade em um ponto do campo. Ela exprime que a taxa de variação da massa por unidade de volume em um ponto do campo (variação local da densidade no tempo) é igual ao fluxo de massa por unidade de volume neste ponto.

3.2 Equação da Continuidade em Coordenadas Cilíndricas e Plano Polares

A alternativa mais comum ao sistema de coordenadas cartesiana é o sistema de coordenadas cilíndricas. Neste sistema, um ponto é definido por uma distância z ao longo do mesmo eixo, por uma distância r do eixo e por um ângulo θ em torno do eixo.

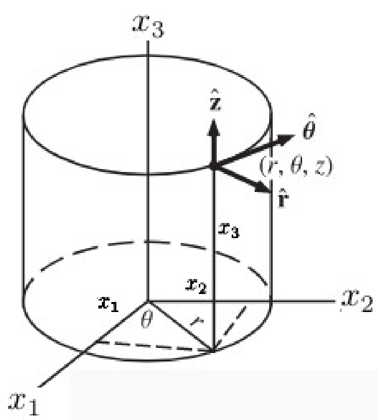

Figura 3.2: Sistema de coordenadas cilíndricas.

A equação da continuidade pode ser escrita em coordenadas cilíndricas. Neste caso, o conjunto (x_1, x_2, x_3) que descreve um ponto no sistema cartesiano passa (r, θ, x_3) no sistema de coordenadas cilíndricas. As equações de transformação são,

$$\begin{cases} r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \\ \theta = tan^{-1}\left(\frac{x_2}{x_1}\right), \\ x_3 = x_3, \end{cases}$$

e a equação da continuidade neste sistema assume a forma a seguir:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial (r\rho u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial (\rho u_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (\rho u_3)}{\partial x_3} = 0. \tag{3.6}$$

No caso de fluxos no bidimensionais, onde $x_3 = 0$, o sistema de coordenadas cilíndricas se resume ao sistema de coordenadas plano polares a partir da transformação que segue.

$$\begin{cases} r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ \theta = tan^{-1}\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \end{cases}$$

A equação da continuidade por sua vez fica aproximada por:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial (r\rho u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial (\rho u_\theta)}{\partial \theta} = 0. \tag{3.7}$$

3.3 Forma Integral da Continuidade

A forma integral da continuidade se torna adequada para sistemas confinados em regiões como taques e tubulações. Ao contrário do enfoque anterior, aqui iremos trabalhar com grandes volumes denominados volume de controle. O volume de controle é confinado em uma região determinada pelas superfícies de controle. O caso mais geral ocorre quando o volume de controle não é fixo no espaço, mas possui uma determinada velocidade ao longo do fluxo. Assumimos que a velocidade das superfícies que confinam o volume de controle é w_i. Neste caso aplicamos o teorema de Leibnitz a densidade.

O teorema de Leibnitz permite calcular a taxa de variação temporal (D/Dt) de uma grandeza física conservativa f sobre um volume que pode estar variando devido ao seu movimento com velocidade $\vec{u}$. Essas variações de volume podem ser expansões ou contrações no tempo. O volume em questão pode ser o volume de uma partícula, de uma nuvem, de uma massa de ar ou mesmo da atmosfera planetária. O teorema de Leibnitz em sua forma analítica é escrito como segue:

$$\frac{D}{Dt}\iiint_V f dV = \iiint_V \frac{\partial f}{\partial t} dV + \iint_A f(\vec{u}\cdot\hat{n})dA. \tag{3.8}$$

Na equação anterior, V' representa o volume de integração. Se não ocorrem variações de volume (se não existe movimento relativo entre as fronteiras do volume) a integral de superfície é zero. Isto significa que não existe um fluxo líquido da grandeza f através do volume. A derivada parcial no primeiro termo a direita na equação anterior pode ser calculada tanto dentro como fora da integral. Adicionalmente, a grandeza f pode estar variando devido a possíveis fontes e sumidouros dentro do volume V'.

$$\frac{D}{Dt}\iiint_V f dV = \sum Q, \tag{3.9}$$

Q representa fontes ou sumidouros da grandeza f no interior do volume V'. Generalizando,

$$\sum Q = \iiint_V \frac{\partial f}{\partial t} dV + \iint_A f(\vec{u}\cdot\hat{n})dA \tag{3.10}$$

Assim,

$$\frac{D}{Dt}\iiint \rho dV = \iiint \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \iint \rho w_i n_i dA. \tag{3.11}$$

Usando a continuidade no segundo termo da última equação e aplicando o teorema da divergência, obtemos:

$$\frac{D}{Dt}\iiint \rho dV = -\iiint \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} dV + \iint \rho w_i n_i dA. \tag{3.12}$$

$$\frac{D}{Dt}\iiint \rho dV = -\iint \rho u_i n_i dA + \iint \rho w_i n_i dA, \tag{3.13}$$

$$\frac{D}{Dt}\iiint \rho dV = -\iint \rho(u_i - w_i) n_i dA. \tag{3.14}$$

A equação anterior expressa que a taxa de variação temporal da massa no volume de controle é igual a densidade multiplicada pela componente normal do fluxo através das superfícies do volume de controle. Se o volume de controle for fixo, w_i=0.

3.4 Funções de Corrente e Potencial em Fluxos Bidimensionais

A função de corrente é uma função que satisfaz a lei da conservação da massa para fluxos incompressíveis. Ela é obtida no caso apenas de fluxos bidimensionais. Partindo da equação da continuidade,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_j)}{\partial x_j} = 0, \tag{3.15}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial (\rho u_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial (\rho u_3)}{\partial x_3} = 0. \tag{3.16}$$

Inicialmente eliminamos o termo local, o qual é uma aplicação não realista da função de corrente. A seguir, reduzimos a equação da continuidade a dois termos.

$$\frac{\partial (u_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial (u_2)}{\partial x_2} = 0. \tag{3.17}$$

Essa equação é satisfeita se definirmos uma função $\psi(x_1, x_2)$, de forma que:

$$u_1 = \frac{\partial \psi(x_1, x_2)}{\partial x_2} \tag{3.18}$$

$$u_2 = -\frac{\partial \psi(x_1, x_2)}{\partial x_1}, \tag{3.19}$$

de forma que,

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial \psi(x_1, x_2)}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(-\frac{\partial \psi(x_1, x_2)}{\partial x_1}\right) = 0. \tag{3.20}$$

3.4.1 Interpretação Geométrica de ψ

A definição de linhas de corrente vem da equação,

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2}, \tag{3.21}$$

$$x_1 dx_2 - x_2 dx_1 = 0. \tag{3.22}$$

Em termos da função de corrente,

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} dx_2 = 0 = d\psi \tag{3.23}$$

A equação 3.23 mostra que a variação de ψ ao longo de uma linha de corrente é zero. Dessa forma, tendo encontrado uma dada função $\psi(x_1, x_2)$, podemos traçar linhas com ψ constante, e resolver o padrão de linhas de corrente para o fluxo.

3.4.2 Interpretação Física de ψ

O fluxo volumétrico Q através de um elemento $\vec{ds}$ de uma superfície de controle com profundidade unitária é (figura 3.3):

$$dQ = (\vec{u} \cdot \hat{n}) dA = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2} \hat{i} - \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \hat{j} \right) \cdot \left(\frac{dx_2}{ds} \hat{i} - \frac{dx_2}{ds} \hat{j} \right) dA \tag{3.24}$$

$$dQ = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2} \frac{dx_2}{ds} - \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{dx_1}{ds} \right) \underbrace{dA}_{dA = 1ds} \tag{3.25}$$

$$dQ = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2} \frac{dx_2}{ds} - \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{dx_1}{ds} \right) ds \tag{3.26}$$

$$dQ = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2} dx_2 - \frac{\partial \psi}{\partial x_1} dx_1 \right) = d\psi \tag{3.27}$$

A variação de ψ é igual ao fluxo volumétrico ao longo do elemento. Além disso, a direção do fluxo pode ser determinada observando se ψ aumenta ou diminui. Conforme esboçado na figura 3.4, o fluxo é para a direita se ψ_2 for maior que ψ_2, como na figura 3.4.(a); caso contrário, o

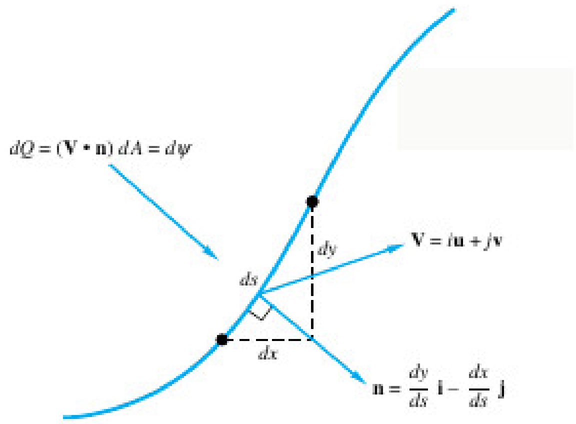

Figura 3.3: Interpretação física função ψ: fluxo de volume através de uma porção diferencial de um superfície de controle unitária com respeito a profundidade.

fluxo é para o esquerda. Tanto a função de corrente a velocidade potencial foram inventados pelo matemático francês Joseph Louis Lagrange, publicadas em seu tratado sobre mecânica de fluidos em 1781.

$$Q = \int_1^2 (\vec{u} \cdot \vec{n}) dA = \int_1^2 d\psi = \psi_2 - \psi_1 \tag{3.28}$$

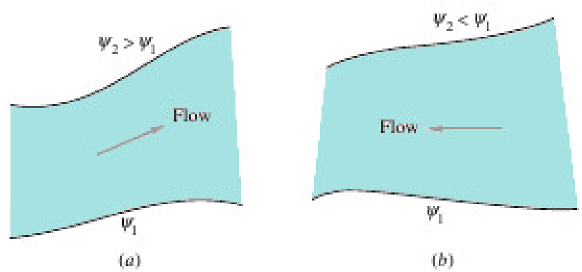

Figura 3.4: Convenção de sinais o fluxo em termos da mudança na função do fluxo: (a) flui para a direita se ψ_2 é maior; (b) flui para a esquerda se ψ_1 for maior.

3.5 Fluxo Bidimensional Compressível

Neste caso, a equação da continuidade é apresentada como:

$$\frac{\partial(\rho u_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\rho u_2)}{\partial x_2} = 0, \tag{3.29}$$

com função de corrente definida a partir de

$$\rho u_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \tag{3.30}$$

$$\rho u_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}. \tag{3.31}$$

Normalmente, linhas com ψ constante são linhas de fluxo, entretanto, a variação de ψ é igual ao fluxo de massa e não ao fluxo volumétrico.

$$dm = \rho(\vec{u} \cdot \hat{n})dA = d\psi \tag{3.32}$$

$$m_{1\to 2} = \int_1^2 \rho(\vec{u} \cdot \hat{n})dA = \psi_2 - \psi_1 \tag{3.33}$$

3.6 Fluxo Bidimensional Incompressível em Coordenadas Plano Polares

Suponha que as coordenadas de interesse sejam r e θ, com $u_3 = 0$, e densidade constante. A equação da continuidade fica reduzida a:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0 \tag{3.34}$$

A equação equivalente em coordenadas cartesianas é:

$$\frac{\partial (u_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial (u_2)}{\partial x_2} = 0.$$

Da definição de ψ,

$$u_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \tag{3.35}$$

$$u_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}. \tag{3.36}$$

Em coordenadas plano polares,

$$u_1 = \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \tag{3.37}$$

$$u_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial r}, \tag{3.38}$$

de forma que a equação da continuidade em coordenadas cartesianas pode ser reescrita como segue:

$$\frac{\partial}{\partial r}\bigg(\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\bigg) + \frac{\partial}{\partial \theta}\bigg(-\frac{\partial \psi}{\partial r}\bigg) = 0, \tag{3.39}$$

sendo

$$u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \tag{3.40}$$

$$u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}. \tag{3.41}$$

Mais uma vez, as linhas com ϕ constante são linhas de corrente, e a variação é o fluxo de volume $Q_{1\to 2} = \phi_2 - \phi_1$. A convenção de sinais é a mesma da figura 3.4.

3.7 Velocidade Potencial

A irrotacionalidade dá origem a uma função escalar ϕ similar ou complementar a função de corrente ψ. Do cálculo vetorial, um vetor que tem um rotacional zero pode ser escrito como o gradiente de uma função escalar. Portanto, dado um vetor $\vec{u}$, se

$$\nabla \times \vec{u} = 0, \tag{3.42}$$

$$\vec{u} = \nabla \phi. \tag{3.43}$$

ϕ é uma função de (x_1, x_2, x_3, t), sendo denominada de velocidade potencial. O conhecimento de ϕ permite a imediata determinação das componentes da velocidade.

$$u_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \tag{3.44}$$

$$u_2 = \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \tag{3.45}$$

Em coordenadas plano polares,

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} \tag{3.46}$$

$$u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} \tag{3.47}$$

Linhas onde ϕ é constante são chamadas de linhas potenciais de fluxo. Para um fluxo irrotacional, descrito por apenas duas componentes, tanto ψ como ϕ ambas existem, e a função de corrente e potencial são mutuamente perpendiculares, exceto em pontos de estagnação, onde $u_1 = u_2 = u_3 = 0$. Uma linha onde ϕ é constante apresenta $d\phi = 0$.

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} dx_2 = 0 \tag{3.48}$$

Da mesma forma para ψ,

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} dx_2 = 0 \tag{3.49}$$

$$u_1 dx_1 + u_2 dx_2 = 0 \tag{3.50}$$

$$\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)_{\phi=cte} = -\frac{\frac{\partial \phi}{\partial x_1}}{\frac{\partial \phi}{\partial x_2}} = -\frac{u_1}{u_2} = -\frac{\frac{\partial \psi}{\partial x_2}}{-\frac{\partial \psi}{\partial x_1}} = -\frac{u_2}{u_1} = -\frac{1}{\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)_{\psi=cte}} \tag{3.51}$$

A equação anterior é a condição de ortogonalidade entre ψ e ϕ.

3.8 Casos particulares

3.8.1 Campo de Velocidade Uniforme I

Um campo de velocidade uniforme ao longo da direção x_1, $\vec{u} = u_1\hat{i}$, possui definidas a função de corrente e a velocidade potencial. As relações são apresentadas a seguir:

$$u_1 = \frac{\partial\phi}{x_1} = \frac{\partial\psi}{x_2}, \tag{3.52}$$

$$u_2 = \frac{\partial\phi}{x_2} = -\frac{\partial\psi}{x_1}. \tag{3.53}$$

A velocidade potencial e a função de corrente são obtidas a partir das equações 4.52 e 4.53.

$$\partial\phi = u_1\partial x_1 \tag{3.54}$$
$$\int \partial\phi = \int u_1\partial x_1 \tag{3.55}$$
$$\phi = (u_1 x_1) + C \tag{3.56}$$

$$\partial\psi = u_1\partial x_2 \tag{3.57}$$
$$\int \partial\psi = \int u_1\partial x_2 \tag{3.58}$$
$$\psi = (u_1 x_2) + k \tag{3.59}$$

Nas equações 4.56 e 4.59, x_1 e x_2 são constantes.

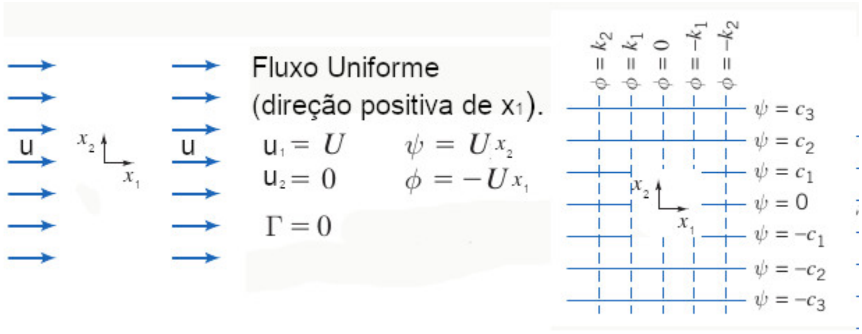

Figura 3.5: Fluxo uniforme.

3.8.2 Fonte ou Sorvedouro na Origem I

Uma fonte é um modelo de fluxo no plano-x_1x_2, em que o fluxo é radial e para fora do eixo x_3, e simétrico em todas as direções (figura 3.6). A intensidade Q da fonte é o fluxo volumétrica por unidade de profundidade. Para qualquer raio r de uma fonte, a velocidade tangencial u_θ é zero; a velocidade radial u_r é o fluxo volumétrica por unidade de profundidade Q dividida pela área de fluxo por unidade de profundidade $2\pi r$. Portanto, $u_r = Q/2\pi r$ para uma fonte. Conhecendo u_r e u_θ obtemos diretamente ψ e ϕ respectivamente.

Em um sorvedouro, o fluxo é radialmente para dentro; um sorvedouro é uma fonte negativa. As funções ψ e ϕ são as funções negativas correspondentes a um fluxo fonte. A origem tanto da fonte quanto do sorvedouro é um ponto singular, visto que a velocidade radial se aproxima do infinito conforme o raio se aproxima de zero. Portanto, embora um fluxo real possa se assemelhar a uma fonte ou sorvedouro para alguns valores de r, as fontes e sorvedouros não possuem homólogos fisicamente exatos. O principal valor do conceito de fontes e sorvedouros é que, quando combinados com outros fluxos, produzem modelos que representam adequadamente fluxos reais.

A relação entre as componentes da velocidade, ψ e ϕ são expressas na forma a seguir.

$$u_r = \frac{Q}{2\pi r} = \frac{m}{r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \tag{3.60}$$

$$u_\theta = 0 = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} \tag{3.61}$$

Resolvendo para ψ e ϕ,

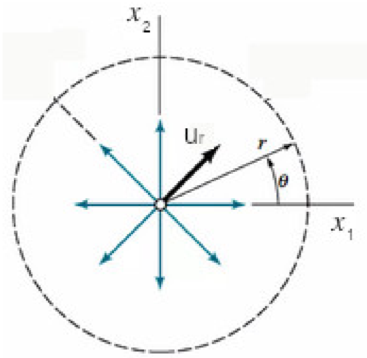

Figura 3.6: Apenas a componente radial da velocidade é não nula.

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \frac{m}{r}, \tag{3.62}$$

$$\partial\psi = m\partial\theta, \tag{3.63}$$

$$\psi = (m\theta) + C, \tag{3.64}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{m}{r}, \tag{3.65}$$

$$\partial\phi = \frac{m}{r}\partial r, \tag{3.66}$$

$$\phi = m\,ln\,(r) + k. \tag{3.67}$$

Nas equações anteriores, $m = Q/2\pi$.

3.8.3 Linha de Vórtice I

Um modelo de fluxo em que as linhas de corrente são círculos concêntricos é um vórtice; em um vórtice livre (irrotacional), as partículas fluidas não giram enquanto transladam em uma trajetória circular em torno do centro do vórtice. As funções de corrente representam linhas circulares, onde $u_\theta = f(r)$ somente, e $u_r = 0$. Neste caso, o rotacional de $u_\theta(r)$ é zero, e $u_\theta = K/r$, sendo K uma constante denominada força de vórtice.

$$u_r = 0 = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \frac{\partial\phi}{\partial r} \tag{3.68}$$

$$u_\theta = K/2\pi r = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} \tag{3.69}$$

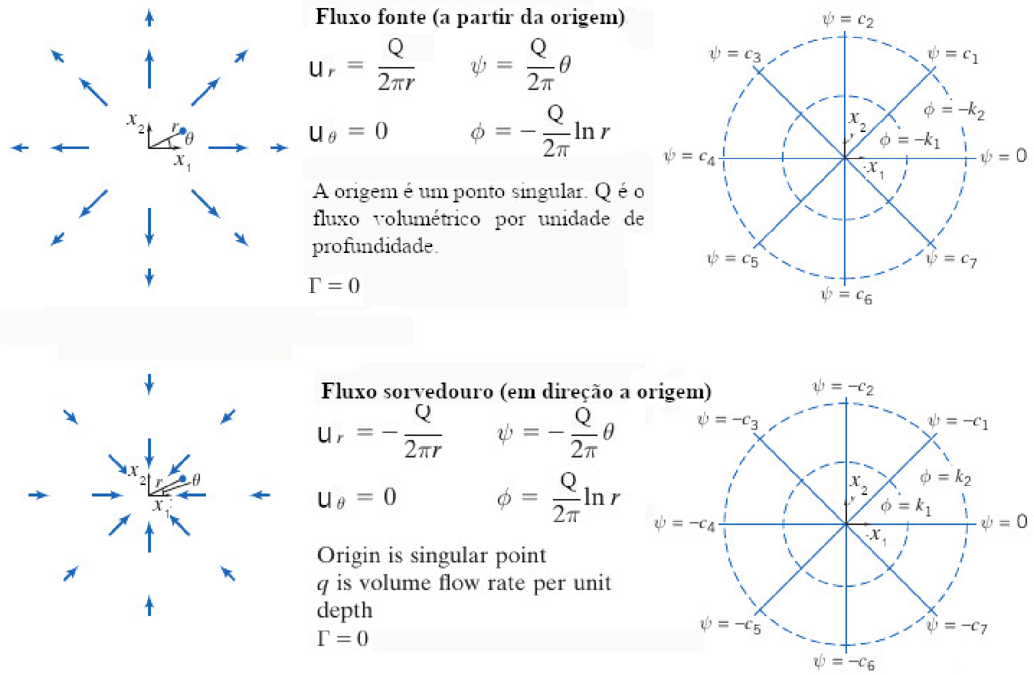

Figura 3.7: Fonte ou sorvedouro.

$$-\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{K}{r} \tag{3.70}$$

$$\partial\psi = -\frac{K}{2\pi}\frac{\partial r}{r} \tag{3.71}$$

$$\psi = -\frac{K}{2\pi}\,ln\,(r) + C \tag{3.72}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = \frac{K}{2\pi r} \tag{3.73}$$

$$\partial\phi = K\partial\theta \tag{3.74}$$

$$\phi = \frac{K}{2\pi}\theta + k \tag{3.75}$$

A intensidade K do vórtice é definida como $K = 2\pi r u_\theta$; as dimensões de K são L^2/t (vazão volumétrica por unidade de profundidade). Mais uma vez, conhecendo u_r e u_θ se obtém ψ e ϕ respectivamente. O vórtice irrotacional é uma aproximação razoável para o campo de fluxo em um tornado (exceto na região da origem; a origem é um ponto singular).

3.9 Potenciais Complexos

Neste seção, z denotará uma variável complexa

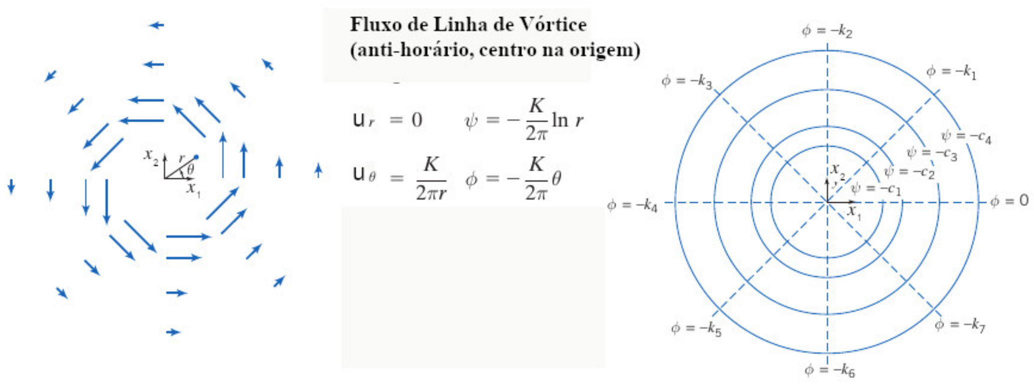

Figura 3.8: Fluxo de linha de vórtice.

$$z \equiv x_1 + ix_2 = re^{i\theta}, \tag{3.76}$$

onde $i = \sqrt{-1}$, (x_1, x_2) são coordenadas cartesianas, e, (r, θ) são coordenadas polares. Na forma complexa, o número complexo z representa um ponto no plano-x_1x_2 cujo eixo real é x_1 e o eixo imaginário é x_2 (9). Na forma polar, z representa vetor posição Ox_3, cuja magnitude é $r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$ e cujo ângulo com o eixo x_1 é $tan^{-1}(x_2/x_1)$.

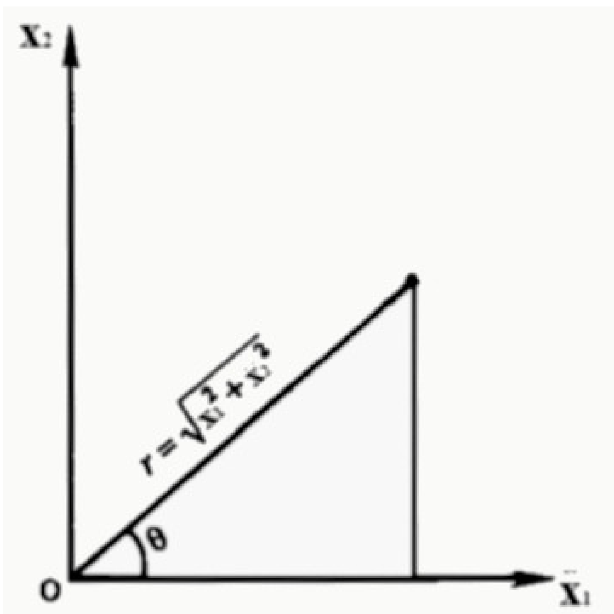

Figura 3.9: Plano complexo z.

O produto de dois números complexos z_1 e z_2 é

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}. \tag{3.77}$$

Portanto, o processo de multiplicar um número complexo z_1 por outro número complexo z_2 pode ser considerado como uma operação que leva a magnitude de r_1 para $r_1 r_2$ e aumenta o argumento de θ_1 para $\theta_1 + \theta_2$. Quando x_1 e x_2 são consideradas variáveis, a quantidade complexa $z = x_1 + ix_2$ é chamada de variável complexa. Suponha que definimos outra variável complexa w cujas partes real e imaginária sejam ψ e ϕ:

$$w \equiv \phi + i\psi. \tag{3.78}$$

Se ϕ e ψ são funções de x_1 e x_2, então w também é. Da teoria de variáveis complexas é demonstrado que w é uma função da combinação $x_1 + ix_2 = z$, e em particular tem derivada única e finita dw/dz quando suas partes reais e imaginárias satisfazem o par de relações,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_1} = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \tag{3.79}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_2} = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \tag{3.80}$$

conhecidas como relações de *Cauchy-Riemann*. Aqui, a derivada dw/dz é única se o valor de $\delta w/\delta z$ não depender da orientação do diferencial δz à medida que se aproxima de zero. Uma função de valor único $w = f(z)$ é chamado de função analítica da variável complexa z em uma região se a derivada finita dw/dz existe em todos os pontos da região. Pontos onde w ou dw/dz são zero ou infinitos são chamados de singularidades, onde ϕ e psi não são ortogonais. Por exemplo, $w = Ln(z)$ e $w = 1/z$ são analíticos em todos os lugares, exceto em um ponto singular $z = 0$, onde as relações de Cauchy-Riemann não são satisfeitas.

A combinação $w = \phi + i\psi$ é chamada de potencial complexo para um fluxo. Visto que a função de corrente e a velocidade potencial satisfazem as relações de Cauchy-Riemann, e que a parte real e a parte imaginária de qualquer função $w(z) = \phi + i\psi$ também satisfazem as mesmas relações, segue que qualquer função analítica de z representa um potencial complexo de um fluxo bidimensional. A derivada dw/dz é uma importante quantidade na descrição de fluxos irrotacionais. Por definição,

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\delta z \to 0} \frac{\delta w}{\delta z}. \tag{3.81}$$

Como a derivada é independente da orientação de δz no plano-$x_1 x_2$, nos podemos assumir δz paralelo ao eixo x_1, levando a:

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\delta z \to 0} \frac{\delta w}{\delta z} = \frac{\partial w}{\partial x_1} = \frac{\partial(\phi + i\psi)}{\partial x_1}, \tag{3.82}$$

o que leva a

$$\frac{dw}{dz} = u_1 - iu_2. \tag{3.83}$$

É fácil mostrar que tomando δz paralelo ao eixo x_2 obtemos o mesmo resultado. A derivada dw/dz é, portanto, uma quantidade complexa cujas partes reais e imaginárias representam as componentes cartesianas da velocidade local; dw/dz é, portanto, chamado de velocidade complexa. Em princípio, qualquer fluxo potencial pode ser resolvido pelo método da transformação conforme, usando-se variáveis complexas.

3.9.1 Campo de Velocidade Uniforme II

Se o vetor velocidade local tiver um módulo r um ângulo α com respeito ao eixo x, então

$$\frac{dw}{dz} = re^{-i\alpha} = r\,cos\,\alpha - ir\,sen\,\alpha \tag{3.84}$$

3.9.2 Fonte ou Sorvedouro na Origem II

Considere o potencial complexo

$$w = \frac{Q}{2\pi} Ln\, z = \frac{Q}{2\pi} Ln\,(re^{i\theta}). \tag{3.85}$$

$$w = \frac{Q}{2\pi} Ln\,(re^{i\theta}) = \frac{Q}{2\pi} Ln\,(r) + \frac{Q}{2\pi} Ln\,(e^{i\theta}), \tag{3.86}$$

$$w = \frac{Q}{2\pi} Ln\,(r) + i\frac{Q}{2\pi}\theta. \tag{3.87}$$

As componentes real e imaginaria são:

$$\phi = \frac{Q}{2\pi} Ln\,(r), \tag{3.88}$$

$$\psi = \frac{Q}{2\pi}\theta = m\theta, \text{ com } m = \frac{Q}{2\pi}. \tag{3.89}$$

As componentes da velocidade são:

$$u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \frac{Q}{2\pi r}, \tag{3.90}$$

$$u_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = 0. \tag{3.91}$$

3.9.3 Linha de Vortice II

Considere o potencial complexo

$$w = \frac{iK}{2\pi} Ln\, z, \tag{3.92}$$

o qual representa uma linha de vórtice com circulação $\Gamma = K$, no sentido anti-horário. As componentes real e imaginária são:

$$\psi = -\frac{K}{2\pi} ln\, r, \tag{3.93}$$

$$\phi = \frac{K}{2\pi}\theta, \tag{3.94}$$

com as componentes da velocidade dadas por

$$u_r = 0, \tag{3.95}$$

$$u_r = \frac{K}{2\pi r}. \tag{3.96}$$

3.10 Lista de Problemas

1. Converta do sistema de coordenadas retangulares para plano polares as seguintes funções e coordenadas:

(a) $x_1 + x_2 = 0$

(b) $x_1^2 + x_2^2 = c$

(c) $3x_1 + (3/x_2) = 0$

(d) (x, y)

(e) $(3, 4)$

(f) $\vec{u} = \frac{1}{xden} + \frac{1}{y}$

(g) $\vec{u} = \frac{1}{xden} + \frac{x}{y}$

(h) $\vec{u} = y^2 + x^2$

2. Um fluxo idealizado incompressível tem a distribuição tridimensional de velocidade proposta

$$\vec{u} = 4x_1x_2^2\hat{i} + f(x_2)\hat{j} - x_3x_2^2\hat{k}. \tag{3.97}$$

Encontre a forma apropriada da função f(y) que satisfaz a relação da continuidade.

3. Após descartar quaisquer constantes de integração, determine o valor apropriado das velocidades desconhecidas u_1 ou u_2 que satisfaçam a equação da continuidade incompressível bidimensional para:

(a) $u_1 = x_1^2x_2$;

(b) $u_2 = x_1^2x_2$;

(c) $u_1 = x_1^2 - x_1x2$;

(d) $u_2 = x_2^2 - x_1x2$;

4. Um campo de velocidade bidimensional é dado por:

$$u_1 = -\frac{Kx_2}{x_1^2 + x_2^2}$$

$$u_2 = \frac{Kx_1}{x_1^2 + x_2^2}$$

.

em que K é constante. Esse campo satisfaz a continuidade incompressível? Transforme essas velocidades em componentes polares u_r e u_θ.

5. Considere a distribuição de velocidade em coordenadas plano polares,

$$u_r = \frac{C}{r}, \;\; u_\theta = \frac{K}{r}, \;\; u_3 = 0$$

em que C e K são constantes. (a) Determine se a equação da continuidade é satisfeita. (b) Fazendo o esboço de algumas direções do vetor velocidade, faça um gráfico de uma única linha de corrente para $C = K$.

6. Um campo de fluxo incompressível tem as componentes em coordenadas cilíndricos $u_\theta = Cr$, $u_3 = K(R^2 - r^2)$, $u_r = 0$ em que C e K são constantes e $r \leq R$, $x_3 \leq L$. Esse fluxo satisfaz a continuidade?

7. Um fluxo incompressível em coordenadas polares é dado

$$u_r = K\,cos\,\theta\left(1 - \frac{b}{r^3}\right)$$

$$u_\theta = -K\,sen\,\theta\left(1 + \frac{b}{r^3}\right)$$

Esse campo satisfaz a continuidade? Para a consistência, quais devem ser as dimensões das constantes K e b? Faça um esboço da superfície em que $u_r = 0$ e interprete.

8. Considere o seguinte fluxo incompressível bidimensional, que claramente satisfaz a continuidade: $u_1 = U_0 =$ constante, $u_2 = V_0 =$ constante. Encontre a função corrente $\psi(r, \theta)$ para esse fluxo usando coordenadas polares.

9. Investigue a função corrente $\psi = K(x_1^2 - x_2^2)$, com K=constante. Trace o gráfico de algumas linhas de corrente no plano x_1x_2 completo, determine quaisquer pontos de estagnação.

10. Investigue a função corrente em coordenadas polares $\psi = Kr^{\frac{1}{2}}\ sen\ \frac{1}{2}\theta$, com $K =$constnte. Trace o gráfico de algumas linhas de corrente no plano x_1x_2 completo, deter- mine quaisquer pontos de estagnação e interprete.

11. Para o campo de velocidades

$$u_1 = U_0\left(1 + \frac{x_1}{L}\right)$$

$$u_2 = -U_0\frac{x_2}{L}$$

$$u_3 = 0$$

determine se existe uma função corrente e, se existir, encontre uma expressão para $\psi(x_1, x_2)$ e faça o esboço da linha de corrente que passa pelo ponto $(x_1, x_2) = (L/2, L/2)$.

12. Investigue o potencial de velocidade $\phi = Kx_1x_2$, $K =$constante. Faça um esboço das linhas equipotenciais no plano x_1x_2 completo, encontre quaisquer pontos de estagnação e faça um esboço aproximado das linhas de corrente ortogonais.

13. Um campo de fluxo incompressível bidimensional é definido pelos componentes de velocidade

$$u_1 = 2V\left(\frac{x_1}{L} - \frac{x_2}{L}\right)$$

$$u_2 = -2V\frac{x_2}{L}$$

em que V e L são constantes. Se elas existem, encontre a função corrente e o potencial de velocidade.

14. Encontre o potencial de velocidade bidimensional $\phi(r, \theta)$ para o padrão de fluxo em coordenadas polares $u_r = Q/r$, $u_\theta = K/r$, em que Q e K são constantes.

15. Um fluxo incompressível bidimensional é definido por

$$u_1 = -\frac{Kx_2}{x_1^2 + x_2^2}$$

$$u_2 = \frac{Kx_1}{x_1^2 + x_2^2}$$

.

em que K é constante. Esse fluxo é irrotacional? Em caso afirmativo, encontre seu potencial de velocidade, faça um esboço de algumas linhas equipotenciais e interprete o padrão de fluxo.

16. Problema de aplicação: O vento está soprando na rua principal com fluxo de um lado rua, como mostra a figura. Qual é uma estimativa da velocidade no lado da rua mostrado? Assuma fluxo 2-D e densidade constante.