

Capítulo 2

Fluidos em Movimento

2.1 Representação de Euler e Lagrange

Podemos usar duas representações distintas para tratar os problemas na Mecânica dos Fluidos. A primeira, a representação de Lagrange, considera o movimento individual das partículas, sendo que as variáveis físicas são dadas como uma função única do tempo. Em outras palavras, nesta representação estamos interessados em parciais individuais, e suas trajetórias ao longo do tempo. Nesta representação, a posição, velocidade e aceleração serão dadas por funções do tipo $s(\vec{t})$, $u(\vec{t})$ e $a(\vec{t})$, sendo as quantidades derivadas calculadas a partir daqui. O ponto (x_0, y_0, z_0) localiza a posição inicial de cada partícula de fluido.

A representação de Euler é uma alternativa a representação anterior onde todas as partículas de fluido são equivalentes, sendo que aqui não estamos interessados na dinâmica individual de cada partícula de fluido. As grandezas físicas são representadas em termos de campos, por meio de funções do tipo $f(x, y, z, t)$.¹ De outra forma, descrevemos as grandezas físicas e suas variações ao longo do campo, sendo que os valores destas grandezas referentes as partícula de fluido estão diretamente associados aos valores do campo. Sabendo que qualquer grandeza física pode variar no espaço de forma independente do tempo, as taxas de variações em um dado ponto não dependerão do valor da grandeza antes ou após a partícula de fluido ocupar o ponto do campo. Por exemplo, a aceleração será dada por meio de uma variação local no tempo adicionada a uma componente advectiva devido ao gradiente de velocidade.

¹Esta é uma consequência direta da hipótese do contínuo em Mecânica dos Fluidos. Assim, cada propriedade de um fluido, tal como massa específica, temperatura, velocidade, etc., são consideradas funções contínuas da posição e do tempo. São definidas como campos escalares ou vetoriais.

Na representação de Euler, o campo de velocidade é definido como:

$$\vec{v} = \vec{V}(\vec{r}, t) = \vec{V}(x, y, z, t), \quad (2.1)$$

$$\vec{V} = u(x, y, z, t)\hat{i} + v(x, y, z, t)\hat{j} + w(x, y, z, t)\hat{k}. \quad (2.2)$$

Em geral, as componentes de um campo de velocidades são funções de x, y, z no tempo t . O ponto (x, y, z) então não define a posição de um partícula de fluido. Ao contrário, este é um ponto do campo assumido pela partícula de fluido ao longo de seu deslocamento através do mesmo campo.

2.2 Linha de corrente, Trajetória e Linha de Emissão

2.2.1 Linha de Corrente

As linhas de corrente são usadas para a visualização dos fluxos. Apresentam a propriedade de serem sempre tangentes ao vetor velocidade em cada ponto do campo. Isso implica que não pode haver fluxo de matéria através das mesmas. Matematicamente, essa condição é expressa como:

$$\vec{V} \times d\vec{r} = 0 \quad - \text{Equação das linhas de corrente.} \quad (2.3)$$

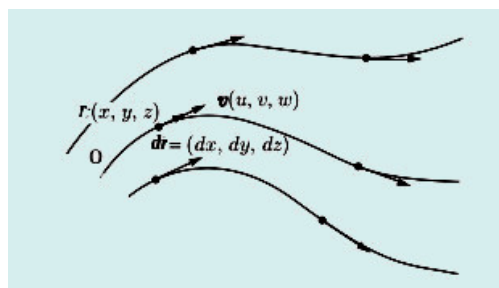


Figura 2.1: Linhas de corrente.

Resolvendo o produto vetorial,

$$\vec{u} \times d\vec{r} = (u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}) \times (dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}) = \quad (2.4)$$

$$(v dz - w dy)\hat{i} + (w dx - u dz)\hat{j} + (u dy - v dx)\hat{k} = 0, \quad (2.5)$$

$$\frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} = 0, \quad (2.6)$$

$$\frac{dx}{u} = \frac{dz}{w} = 0, \quad (2.7)$$

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = 0. \quad (2.8)$$

Assim,

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} = 0. \quad (2.9)$$

Exemplo 3.1 - Dado o campo de velocidade $\vec{u} = x\hat{i} + y\hat{j}$, ache uma expressão para as linhas de corrente. Faça um esboço do campo.

$$\vec{u} = u\hat{i} + v\hat{j}$$

$$u = x, v = y$$

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y}$$

$$\ln(y) = \ln(x) + C'$$

$$\ln(y) - \ln(x) = C'$$

$$\ln \frac{y}{x} = C'$$

$$\frac{y}{x} = e^{C'}$$

$$y = x e^{C'}$$

$$y = xC$$

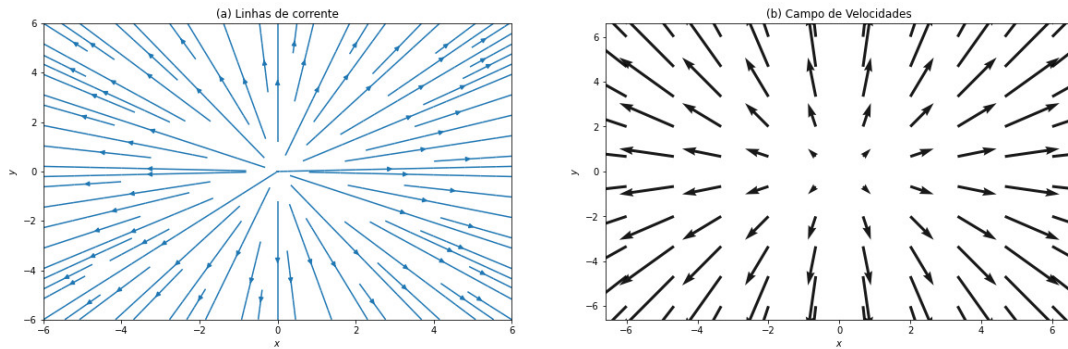


Figura 2.2: (a) Família de linhas de corrente $y = xC$. (b) Campo de velocidade $\vec{v} = x\hat{i} + y\hat{j}$.

Exemplo 3.2 - Dado o campo de velocidade $\vec{u} = x\hat{i} - y\hat{j}$, ache uma expressão para as linhas de corrente. Faça um esboço do campo.

$$\vec{u} = u\hat{i} - v\hat{j}$$

$$u = x, v = y$$

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$$

$$\int \frac{dy}{y} = - \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln(y) = -\ln(x) + C'$$

$$\ln(yx) = C'$$

$$yx = e^{C'}$$

$$y = \frac{C}{x}$$

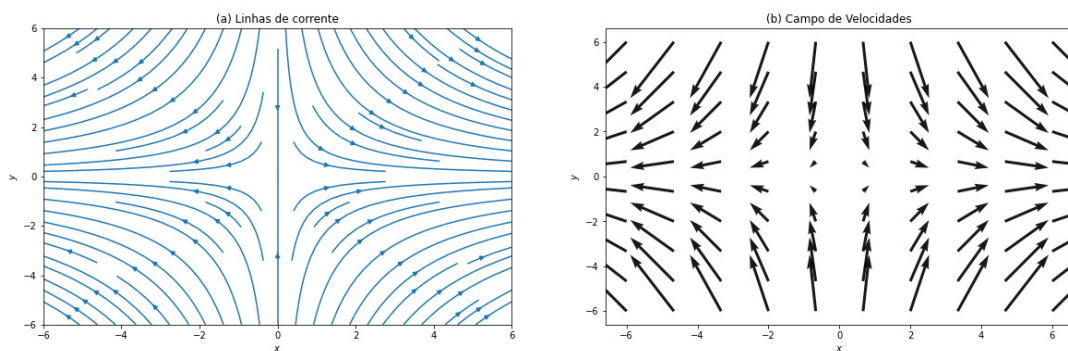
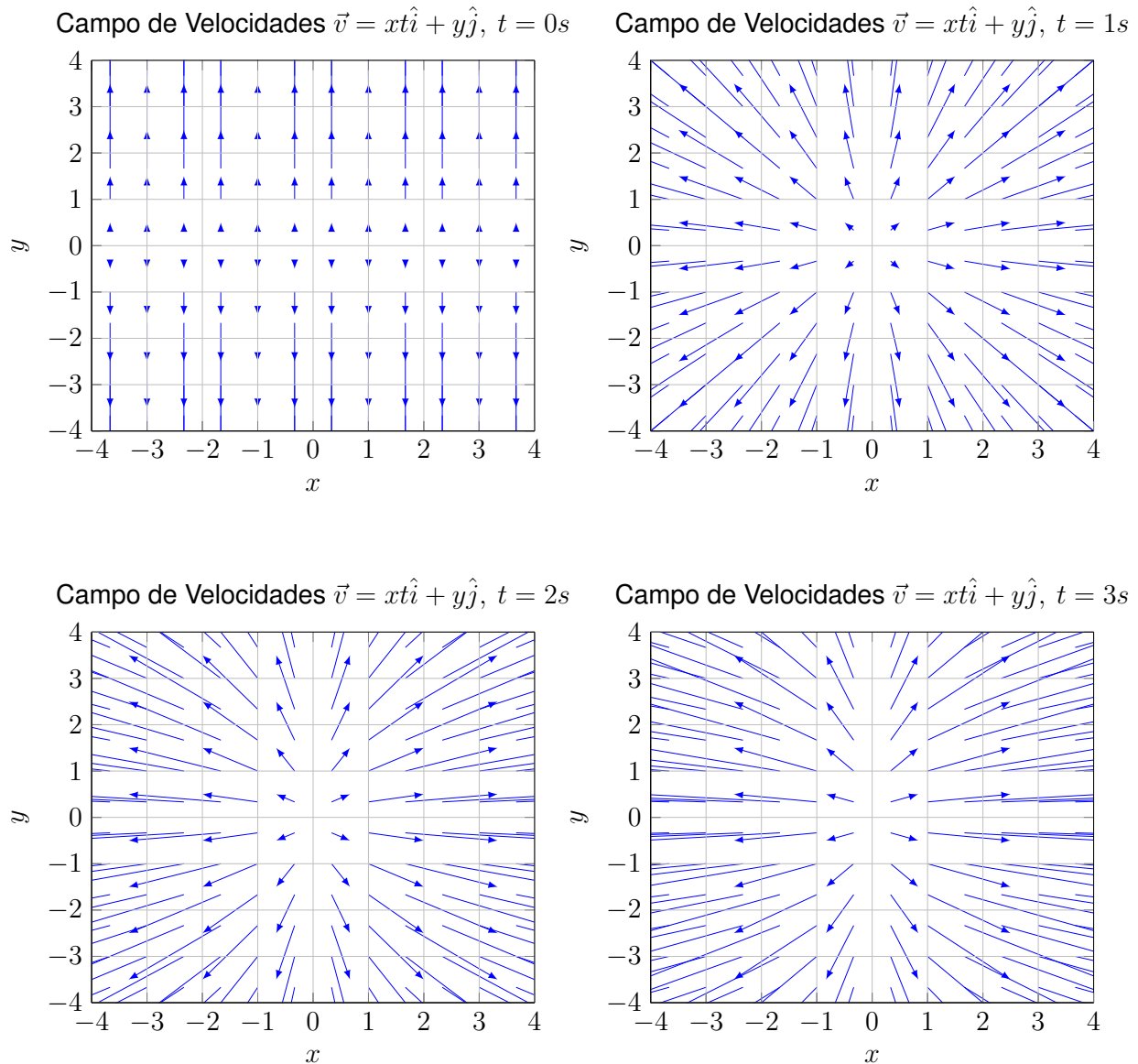


Figura 2.3: (a) Família de linhas de corrente $y = C/x$. (b) Campo de velocidade $\vec{v} = x\hat{i} - y\hat{j}$.

2.2.2 Linhas de corrente – dependência temporal

Para um fluxo instável, onde o campo de velocidade é dependente do tempo, as linhas de corrente mudarão a sua configuração com o tempo. O conjunto de figuras a seguir mostra a evolução das linhas de corrente com o tempo.



2.2.3 Trajetória

Iremos nesta seção adotar o ponto de vista da partícula de fluido. Em $t_0 = 0$, a posição do número de fluido é dada por $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Seguimos o movimento subsequente do número de fluido ao longo do campo de velocidade $\vec{V} = \vec{V}(\vec{r}, t) = (u, v, w)$. Escrevendo posição do número de fluido ao longo do tempo em seu deslocamento no campo de velocidades como

$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, as equações do movimento do número de fluido serão:

$$\frac{dx}{dt} = u(x, y, z, t), \quad (2.10)$$

$$\frac{dy}{dt} = v(x, y, z, t), \quad (2.11)$$

$$\frac{dz}{dt} = w(x, y, z, t). \quad (2.12)$$

A solução para o conjunto de equações anteriores é $\vec{r}_r(t) = \vec{R}(\vec{r}, t) = (x(t), y(t), z(t))$, onde $x(t) = x(x_0, y_0, z_0, t)$, $y(t) = y(x_0, y_0, z_0, t)$, $z(t) = z(x_0, y_0, z_0, t)$, com $\vec{r}_r(0) = \vec{r}_0$. $\vec{r}_r(t)$ é uma curva paramétrica que representa a trajetória da partícula de fluido.

Exemplo 3.3 - Para o campo de velocidades $\vec{u} = t\hat{i} + \hat{j}$, ache a expressão paramétrica da trajetória para (a) uma partícula que parte da origem, $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$ em $t_0 = 0s$, e (b) p partícula que parte da origem $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$ em $t = 2s$.

Equações paramétricas:

$$\begin{aligned} \vec{u} &= t\hat{i} + \hat{j} \\ \frac{dx}{dt} &= t, \frac{dy}{dt} = 1 \\ \int dx &= \int t dt \\ x &= \frac{t^2}{2} + C_x \\ \int dy &= \int dt \\ y &= t + C_y \end{aligned}$$

Neste ponto devemos lembrar que na representação de Lagrange seguimos uma partícula individual. Assim, as condições iniciais de cada partícula definem sua trajetória.

(a) Partícula que parte da origem ($x_0 = 0, y_0 = 0$) em $t_0 = 0s$:

$$x_0 = \frac{t_0^2}{2} + C_x$$

$$0 = 0 + C_x, \quad C_x = 0$$

$$y_0 = t_0 + C_y, \quad C_y = 0$$

$$\begin{cases} x = \frac{t^2}{2} \\ y = t \end{cases}$$

$$y = \sqrt{2x}$$

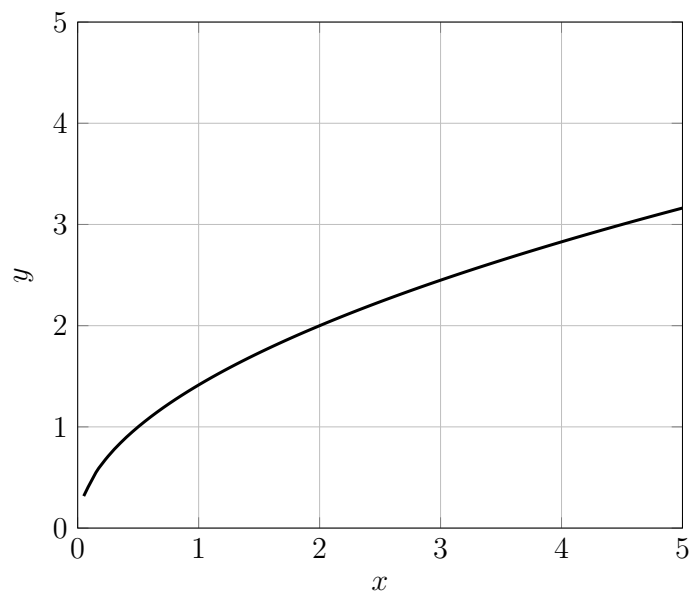


Figura 2.4: Equação da trajetória com condições iniciais $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ em $t_0 = 0$

(b) Partícula que parte da origem ($x_0 = 0$, $y_0 = 0$) em $t_0 = 3s$:

$$x(t = t_0) = \frac{t_0^2}{2} + C_x$$

$$0 = \frac{2^2}{2} + C_x, C_x = -2$$

$$y(t = t_0) = t_0 + C_y$$

$$0 = 2 + c_y, C_y = -2$$

$$\begin{cases} x = \frac{t^2}{2} - \frac{9}{2} \\ y = t - 3 \end{cases}$$

$$y = \sqrt{2x + 9} - 3$$

A função $y(x)$ é a equação da trajetória.

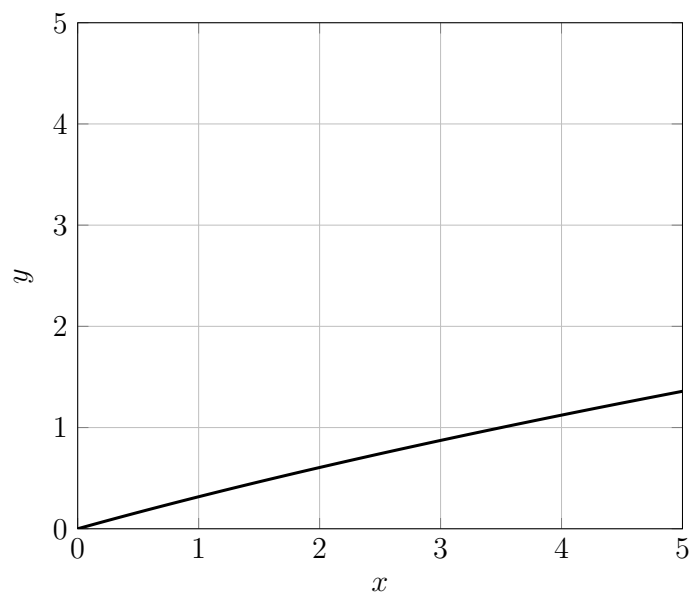
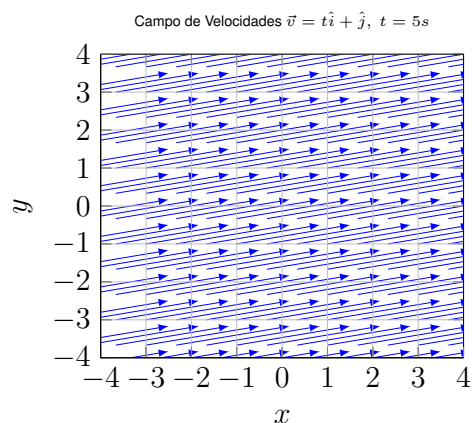
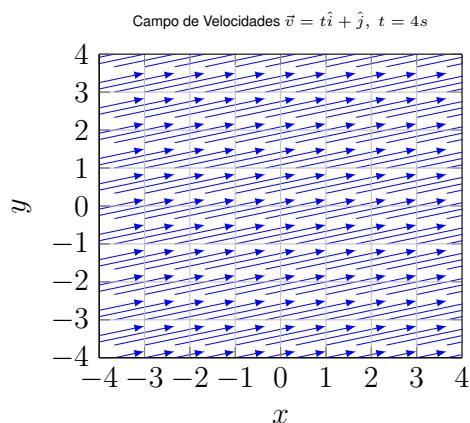
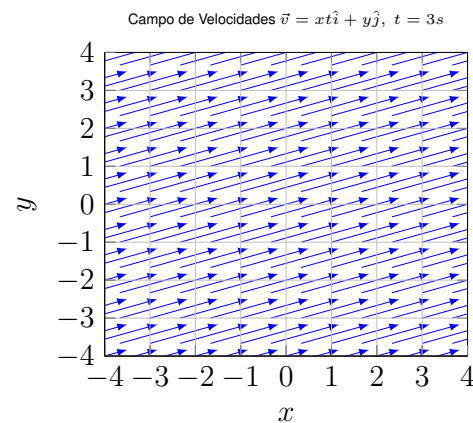
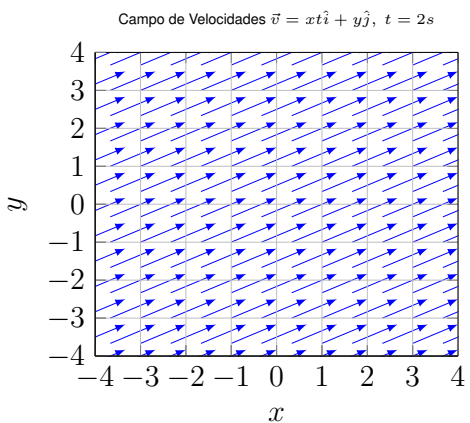
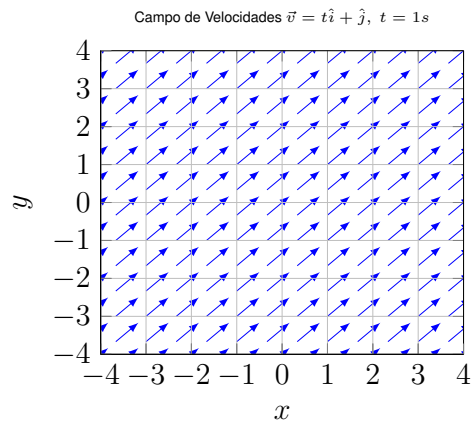
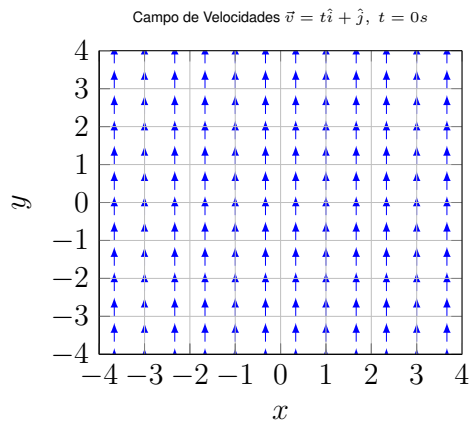


Figura 2.5: Equação da trajetória p/ $x_0 = 0$ em $t_0 = 3s$



2.2.4 Linhas de Emissão

Em muitos experimentos de visualização da dinâmica de um fluido é comum a introdução de marcadores para determinação do padrão de fluxo associado. A curva instantânea formada por todos os parciais que em tempos prévios passaram pelo ponto P (por exemplo onde o marcador esta sendo inserido no fluxo) é chamada de linha de emissão. Se o fluxo for estacionário, as linhas de emissão e de corrente coincidem.

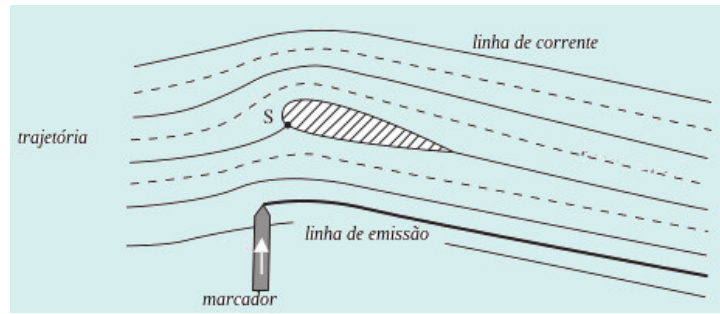


Figura 2.6: Fluxo estacionário: linhas de corrente (linhas sólidas fina), trajetória (linhas tracejadas) e linhas de emissão (linhas sólida espessa).

Por outro lado, se o fluxo for dependente do tempo as três linhas aparecerão de forma diferente conforme ilustrado na figura 2.7.

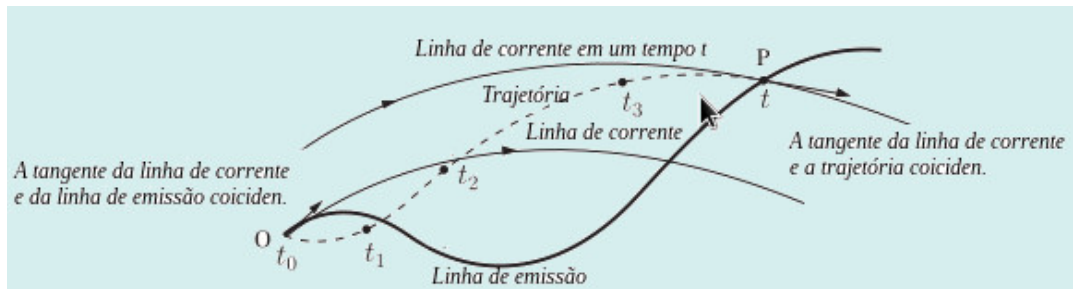


Figura 2.7: Fluxo dependente do tempo: linhas de corrente (linhas sólidas fina), trajetória (linhas tracejadas) e linhas de emissão (linhas sólida espessa). O número de fluido em P inicia seu movimento no ponto O em um tempo t_0 e por fim se encontra no ponto P no tempo t após os tempos t_1 , t_2 e t_3 .

2.3 Derivada Total de Campos Escalares e Vetoriais (derivada em um ponto)

O uso da representação de Euler para a descrição da dinâmica de um fluxo implica no conhecimento do campo de velocidades associado ao fluxo e dos gradientes do campo de velocidades. Isto por que nesta representação os parâmetros físicos que descrevem o fluxo são dependentes dos valores do campo de velocidades e de suas variações. Iremos nos deparar ao longo dos nossos estudos com dois tipos de campos: escalares e vetoriais. A seguir discutiremos os cálculos das variações associadas a estes tipos de campos.

2.3.1 Derivada Total de um Campo Escalar

Considere uma partícula de fluido ao longo de um campo escalar $\Theta(x, y, z, t)$ que varia no espaço e no tempo. A variação total de Θ pode ser escrita como:

$$d\Theta(x, y, z, t) = \frac{\partial\Theta}{\partial t}dt + \frac{\partial\Theta}{\partial x}dx + \frac{\partial\Theta}{\partial y}dy + \frac{\partial\Theta}{\partial z}dz. \quad (2.13)$$

Multiplicando ambos os lados da equação anterior por dt , obtemos:

$$\frac{d\Theta(x, y, z, t)}{dt} = \frac{\partial\Theta}{\partial t} + \frac{\partial\Theta}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\Theta}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial\Theta}{\partial z} \frac{dz}{dt}. \quad (2.14)$$

Definindo $u = \frac{dx}{dt}$, $v = \frac{dy}{dt}$ e $w = \frac{dz}{dt}$, reescrevemos a equação anterior na forma:

$$\frac{d\Theta(x, y, z, t)}{dt} = \frac{\partial\Theta}{\partial t} + u \frac{\partial\Theta}{\partial x} + v \frac{\partial\Theta}{\partial y} + w \frac{\partial\Theta}{\partial z}. \quad (2.15)$$

A equação 2.15 é conhecida como Relação de Euler. Ela exprime que a variação total de Θ é a soma de uma variação local no tempo adicionada a uma variação devido ao movimento da partícula de fluido através do campo de velocidades (variação advectiva).

2.3.2 Notação Indicial e Variação Advectiva

Considere uma partícula de fluido que se desloca no espaço, ao longo de um campo vetorial. A variação da grandeza $\vec{\Xi}$ pode ser escrita como:

$$\delta\vec{\Xi} = \frac{\partial\vec{\Xi}}{\partial t}dt + \frac{\partial\vec{\Xi}}{\partial x}dx + \frac{\partial\vec{\Xi}}{\partial y}dy + \frac{\partial\vec{\Xi}}{\partial z}dz. \quad (2.16)$$

Esta equação possui um grande número de termos. O diferencial total do campo Ξ é a soma das variações das componentes do campo ao longo das três direções espaciais. Cada componente do campo depende das três coordenadas espaciais, de forma que $\vec{\Xi} = \vec{\Xi}_x(x, y, z)$, $\vec{\Xi} = \vec{\Xi}_y(x, y, z)$, $\vec{\Xi} = \vec{\Xi}_z(x, y, z)$, \dots). Como resultado temos uma equação com nove termos. Usando a representação de Euler iremos expandir em componentes a equação 2.16 para fins didáticos usando a notação indiciais. A notação indicial é uma forma compacta para representação e manipulação de variáveis (grandezas físicas), sistemas de equações, combinações lineares e somatórios. Um conjunto de variáveis x_1, x_2, \dots, x_n é geralmente denotado como x_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$). Quando

escrito isoladamente, o símbolo x_i indica qualquer uma das variáveis x_1, x_2, \dots, x_n . O intervalo de variação do índice i deve ser sempre dado. Este índice pode ser denotado como um subscrito ou sobrescrito, ou seja, x_i ou x^i . Um sistema de notação usando índices é denominado notação indicial. Nesta notação, as coordenadas espaciais passam a ser escritas como x_i com $i = 1, 2, 3$. Da mesma forma, as componentes do campo passam a ϑ_i , de forma que $\vec{\vartheta} = \vartheta_1 \hat{i} + \vartheta_2 \hat{j} + \vartheta_3 \hat{k}$. A equação 2.16 fica então:

$$\delta\vec{\vartheta} = \frac{\partial\vec{\vartheta}}{\partial t}dt + \frac{\partial\vec{\vartheta}}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial\vec{\vartheta}}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial\vec{\vartheta}}{\partial x_3}dx_3, \quad (2.17)$$

Nesse ponto, definimos os vetores unitários ao longo das direções espaciais x_i como e_i , com $i = 1, 2, 3$.

$$\begin{aligned} \delta\vec{\vartheta} = \frac{\partial\vec{\vartheta}}{\partial t}dt + & \left[\frac{\partial \vartheta_1 \hat{e}_1}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial \vartheta_2 \hat{e}_2}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial \vartheta_3 \hat{e}_3}{\partial x_1}dx_1 \right] \\ & + \left[\frac{\partial \vartheta_1 \hat{e}_1}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial \vartheta_2 \hat{e}_2}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial \vartheta_3 \hat{e}_3}{\partial x_2}dx_2 \right] \\ & + \left[\frac{\partial \vartheta_1 \hat{e}_1}{\partial x_3}dx_3 + \frac{\partial \vartheta_2 \hat{e}_2}{\partial x_3}dx_3 + \frac{\partial \vartheta_3 \hat{e}_3}{\partial x_3}dx_3 \right], \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \delta\vec{\vartheta} = \frac{\partial\vec{\vartheta}}{\partial t}dt + & \left[\frac{\partial \vartheta_1}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x_3}dx_3 \right] \hat{e}_1 \\ & + \left[\frac{\partial \vartheta_2}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x_3}dx_3 \right] \hat{e}_2 \\ & + \left[\frac{\partial \vartheta_3}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial \vartheta_3}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial \vartheta_3}{\partial x_3}dx_3 \right] \hat{e}_3, \end{aligned} \quad (2.19)$$

Dividindo ambos os lados da equação anterior por dt :

$$\begin{aligned} \frac{\delta\vec{\vartheta}}{dt} = \frac{\partial\vec{\vartheta}}{\partial t} + & \left[\frac{\partial \vartheta_1}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dt} \right] \hat{e}_1 \\ & + \left[\frac{\partial \vartheta_2}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dt} \right] \hat{e}_2 \\ & + \left[\frac{\partial \vartheta_3}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial \vartheta_3}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial \vartheta_3}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dt} \right] \hat{e}_3. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Assumimos que dx_i/dt são as componentes da velocidade da partícula ao longo do campo, e a derivada total fica:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \vec{\Xi}}{dt} &= \frac{\partial \vec{\Xi}}{\partial t} + \left[v_1 \frac{\partial \Xi_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial \Xi_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial \Xi_1}{\partial x_3} \right] \hat{e}_1 \\ &+ \left[v_1 \frac{\partial \Xi_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial \Xi_2}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial \Xi_2}{\partial x_3} \right] \hat{e}_2 \\ &+ \left[v_1 \frac{\partial \Xi_3}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial \Xi_3}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial \Xi_3}{\partial x_3} \right] \hat{e}_3, \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\frac{\delta \vec{\Xi}}{dt} = \frac{\partial \vec{\Xi}}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left[v_i \frac{\partial \Xi_j}{\partial x_i} \right], \quad (2.22)$$

$$\frac{\delta \vec{\Xi}}{dt} = \frac{\partial \vec{\Xi}}{\partial t} + (v_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}) \Xi_j, \quad (2.23)$$

$$\frac{\delta \vec{\Xi}}{dt} = \frac{\partial \vec{\Xi}}{\partial t} + (v_i \cdot \nabla) \Xi_j. \quad (2.24)$$

2.4 Divergência e Convergência

Alguns campos a velocidade tem magnitude e direção constantes. Porém, a grande maioria varia sua magnitude e direção de um ponto para outro do campo. Usamos a palavra divergência quando um campo de velocidades tende a separar as partículas em pontos do campo. A convergência esta associado a aproximação das partículas nestes mesmos pontos. A representação matemática da divergência é obtida pelo produto escalar do operador diferencial nabla sobre um vetor. Para um vetor \vec{A} , escrevemos seu divergente como:

$$\nabla \cdot \vec{A} = \left(\hat{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \hat{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \hat{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \cdot (A_1 \hat{e}_1 + A_2 \hat{e}_2 + A_3 \hat{e}_3),$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}. \quad (2.25)$$

A expressão anterior é o divergente do vetor \vec{A} .

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_i}{\partial x_i}. \quad (2.26)$$

Lembrando da notação indicial²,

²Lembrando que na notação indicial,

Uma representação gráfica da convergência de um campo de velocidades é apresentada na figura 2.9.



Figura 2.8: Exemplo de um campo bi-dimensional convergente. (a) convergência devido a variação na direção da velocidade, (b) convergência devido a variação no módulo da velocidade.

2.5 Campo de Aceleração

A aceleração de um fluido é definida como:

$$\vec{a} = \frac{D\vec{V}}{Dt}, \quad (2.28)$$

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_3}, \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} \vec{a} = & \frac{\partial u_1}{\partial t} \hat{e}_1 + \frac{\partial u_2}{\partial t} \hat{e}_2 + \frac{\partial u_3}{\partial t} \hat{e}_3 + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \hat{e}_1 + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \hat{e}_2 + u_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \hat{e}_3 \\ & + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \hat{e}_1 + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \hat{e}_2 + u_2 \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \hat{e}_3 \\ & + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \hat{e}_1 + u_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \hat{e}_2 + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \hat{e}_3. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Agrupando os termos,

$$\begin{aligned} \vec{a} = & \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right\} \hat{e}_1 \\ & + \left\{ \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right\} \hat{e}_2 \\ & + \left\{ \frac{\partial u_3}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right\} \hat{e}_3, \end{aligned} \quad (2.31)$$

onde,

$$a_1 = \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3}, \quad (2.32)$$

$$= \frac{\partial A_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial A_i}{\partial x_i}. \quad (2.27)$$

$$a_2 = \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \quad (2.33)$$

$$a_3 = \frac{\partial u_3}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \quad (2.34)$$

são as componentes do vetor campo de aceleração.

Exemplo 3.4 - Para o campo de velocidades $\vec{u}(x_1, x_2, x_3, t) = 10x_1^2\hat{e}_1 - 20yx\hat{e}_2 + 100t\hat{e}_3$ m/s, determine a aceleração de uma partícula em $P=(1\text{m}, 2\text{m}, 5\text{m}, 0.1\text{s})$.

Solução:

Partimos da equação das componentes da aceleração:

$$u_1 = 10x_1$$

$$u_2 = -20x_2x_1$$

$$u_3 = 100t$$

$$a_1 = \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = 0 + 10x_1^2 20x_1 + 0 + 0 = 200x_1^3$$

$$a_2 = \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = 0 + 10x_1^2(-20x_2) + (-20x_2x_1)(-20x_1) + 0 = 200x_1^2x_2$$

$$a_3 = \frac{\partial u_3}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 100 + 0 + 0 + 0 = 100$$

$$\vec{a} = 200x_1^3\hat{e}_1 + 200x_1^2x_2\hat{e}_2 + 100\hat{e}_3$$

Em $P=(1\text{m}, 2\text{m}, 5\text{m}, 0.1\text{s})$, a aceleração é:

$$\vec{a} = 200(1)^3\hat{e}_1 + 200(1)^2 2\hat{e}_2 + 100\hat{e}_3$$

$$\vec{a} = 200\hat{e}_1 + 400\hat{e}_2 + 100\hat{e}_3$$

2.6 Vorticidade

Rotações são uma importante classe de movimento na natureza. O termo rotação é usado para relatar a velocidade angular, neste caso, de uma partícula de fluido em torno de um eixo ao campo de velocidades que existe em torno do mesmo eixo.

A vorticidade é um conceito associado a rotação da partícula de fluido em um ponto local. Considere uma partícula de fluido de volume infinitesimal com a face $x - y$ representada na figura a seguir.

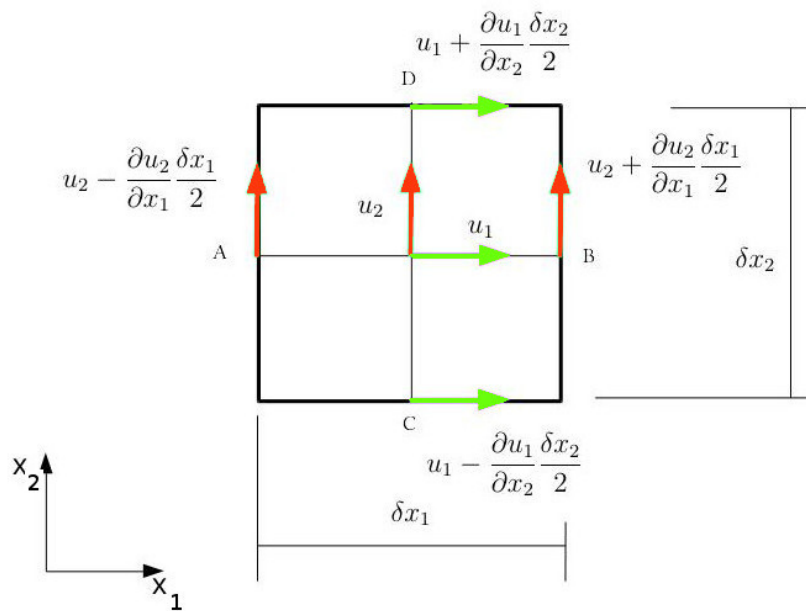


Figura 2.9: Partícula de fluido infinitesimal.

A velocidade angular w_{x_3} , em torno do eixo x_3 , será dada pela média das velocidades angulares dos segmentos \overline{AB} e \overline{CD} .

$$w_{\overline{AB}} = \frac{V_B - V_A}{\delta x_1} \quad (2.35)$$

$$w_{\overline{CD}} = -\frac{V_D - V_C}{\delta x_2} \quad (2.36)$$

$$w_{\overline{AB}} = \left(u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\delta x_1}{2} - \left(u_2 - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\delta x_1}{2} \right) \right) = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \quad (2.37)$$

$$w_{\overline{CD}} = - \left(u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\delta x_2}{2} - \left(u_1 - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\delta x_2}{2} \right) \right) = - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \quad (2.38)$$

A velocidade angular em torno de x_3 será dada pela média das velocidades angulares.

$$w_{x_3} = \frac{1}{2} (V_{AB} + V_{CD}) \quad (2.39)$$

$$w_{x_3} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \quad (2.40)$$

Para os demais eixos cartesianos,

$$w_{x_2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right), \quad (2.41)$$

$$w_{x_1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right). \quad (2.42)$$

As quantidades w_{x_1} , w_{x_2} e w_{x_3} são as componentes do vetor velocidade angular. O vetor \vec{w} é relatado ao vetor velocidade por:

$$\vec{w} = \nabla \times \vec{v}, \quad (2.43)$$

$$\vec{w} = \begin{bmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) \hat{e}_1 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \hat{e}_2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \hat{e}_3.$$

Em notação indicial,

$$w_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}. \quad (2.44)$$

A vorticidade é definida em termos da velocidade angular pela expressão:

$$\vec{\xi} = 2i\vec{w}. \quad (2.45)$$

Entretanto, na representação de Euler, consideramos que os valores da velocidade de uma partícula de fluido de fato são os valores associados a pontos específicos do campo de velocidades pelo qual a partícula de fluido se desloca. Assim, ao longo do seu deslocamento, a partícula de fluido assume os valores de velocidade do campo. As variações no campo de velocidades determinam a dinâmica da partícula de fluido. A vorticidade então deve ser pensada como uma característica do campo de velocidades, devido a um arranjo das derivadas da velocidade que levam a formação de um campo escalar em cada ponto do fluxo do fluido. Uma segunda definição para a vorticidade considerando o campo de velocidades é:

$$\vec{\xi} = \nabla \times \vec{V}. \quad (2.46)$$

Nesta formulação fica evidente que a vorticidade caracteriza a tendência de uma partícula de fluido de girar em torno do seu eixo.

Quando a vorticidade ao longo do fluxo é zero, chamamos este fluxo de irrotacional, $\vec{w} = 0$. A condição básica é que,

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \quad i \neq j \quad (2.47)$$

para fluxos irrotacionais.

Relatada a vorticidade está o conceito de circulação. A circulação em torno de um caminho fechado é definida como a integral da componente tangencial da velocidade.

$$\Gamma \equiv \oint \vec{u} \cdot d\vec{s}. \quad (2.48)$$

2.7 Movimento Relativo Próximo de um Ponto

Partículas de fluido se deformam e giram. Iremos mostrar formalmente que o movimento relativo entre dois pontos vizinhos podem ser escritos como a soma do movimento devido à rotação local, mais o movimento devido à deformação local. Com base na notação indicial, o

campo de velocidade é escrito como:

$$\vec{u} = u_i(x_1, x_2, x_3), i = 1, 2, 3, \quad (2.49)$$

ou na forma

$$\vec{u} = u_1(x_1, x_2, x_3)\hat{e}_1 + u_2(x_1, x_2, x_3)\hat{e}_2 + u_3(x_1, x_2, x_3)\hat{e}_3. \quad (2.50)$$

A variação da velocidade para cada uma das direções espaciais será:

$$\begin{aligned} \vec{\delta u} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \delta x_1 \hat{e}_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \delta x_2 \hat{e}_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \delta x_3 \hat{e}_1 \\ &+ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \delta x_1 \hat{e}_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \delta x_2 \hat{e}_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \delta x_3 \hat{e}_2 \\ &+ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \delta x_1 \hat{e}_3 + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \delta x_2 \hat{e}_3 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \delta x_3 \hat{e}_3. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Em termos das componentes de $\delta \vec{u}$,

$$\begin{aligned} \delta u_1 &= \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \delta x_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \delta x_3 \right] \hat{e}_1, \\ \delta u_2 &= \left[\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \delta x_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \delta x_3 \right] \hat{e}_2, \\ \delta u_3 &= \left[\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \delta x_2 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \delta x_3 \right] \hat{e}_3. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Devemos notar que neste caso as componentes da velocidade são vetores. Usando a notação matricial,

$$\begin{bmatrix} \delta u_1 & \delta u_2 & \delta u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \delta x_3 \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

ou em notação indicial,

$$\delta u_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \delta x_j. \quad (2.54)$$

Podemos entender a equação 2.53 em termos de um vetor derivado do produto de um tensor

de segunda ordem operando sobre o vetor deslocamento. Os termos $\partial u_i / \partial x_j$ são as componentes do tensor gradiente de velocidades ou tensor básico de deformação. Cada componente está associada a deformação ao longo das faces da partícula de fluido nas direções dos eixos cartesianos. Pensando com mais atenção, cada uma das componentes representam a variação espacial das componentes do campo de velocidades. Elas são responsáveis pela deformação (contração ou alongação nas direções dos eixos) e rotação da partícula ao longo do seu movimento no campo de velocidades. De outra forma, podemos entender o tensor de deformação como sendo um tensor que opera sobre os deslocamentos para produzir as velocidades.

O tensor gradiente de velocidades pode ser escrito em termos de um tensor simétrico e um anti-simétrico ³.

$$\frac{\delta u_i}{\delta x_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (2.55)$$

$$\frac{\delta u_i}{\delta x_j} = \epsilon_{ij} + r_{ij}, \quad (2.56)$$

onde

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (2.57)$$

e

$$r_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.58)$$

A parte simétrica do tensor de deformação, ϵ_{ij} é responsável pela deformação da partícula sendo chamada de **tensor taxa de deformação**. Já a parte anti-simétrica r_{ij} responde as rotações da partícula de fluido sendo designado como **tensor de rotação**.

O tensor taxa de deformação da conta das deformações da partícula de fluido sem rotação. Os termos $\frac{\partial u_i}{\partial x_i}$ representam a variação da velocidade ao longo da extensão entre dois pontos em faces adjacentes da partícula de fluido, ao longo de um eixo cartesiano $x_{(i)}$. A soma dos elementos da diagonal é o divergente do campo de velocidades $\frac{\partial u_i}{\partial x_i}$. Existem seis componentes independentes. Os termos da diagonal dão conta do "aumento ou diminuição" da distância entre

³Apêndice 3...

faces adjacentes da partícula de fluido ao longo dos eixos $x_{(i)}$ (alongação ou compressão).

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}. \quad (2.59)$$

Os demais termos dão conta da distorção, medida pela variação angular entre linhas perpendiculares coincidentes com os eixos $x_{(i)}$.

2.8 Classificação dos Fluxos, Turbulência e Número de Reynolds

2.8.1 Classificação dos fluxos

Podemos classificar o movimento dos fluidos, o fluxo, por meio de diferentes grandezas físicas como campo de velocidade, viscosidade e compressibilidade. Geralmente o vetor campo de velocidade depende de três variáveis espaciais e do tempo, ou seja, $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$. O fluxo é tri-dimensional, porque o vetor velocidade depende de três coordenadas espaciais. Existem casos específicos no qual o conceito de fluxo bi-dimensional e unidimensional podem ser aplicados.

Um fluxo é classificado como **estável** quando suas propriedades como velocidade e pressão em um ponto não mudam com o tempo. De outra forma, $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z)$ ou $(\partial p / \partial t) = 0$. Por outro lado, em um fluxo dependente do tempo, **instável**, as propriedades desse fluxo irão variar no tempo.

Com respeito a dependência espacial, o fluxo é considerado **uniforme** se a velocidade em todos os pontos é paralela e de mesmo valor. Caso contrário será considerado não uniforme.

Em termos da viscosidade, o fluxo pode ser classificado como **invíscido** e **viscoso**. Um fluxo é invíscido quando os efeitos da viscosidade não afetam o fluxo e são desconsiderados. Por outro lado em um fluxo viscoso estes mesmos efeitos são importantes e precisam ser levados em conta.

Para modelar analiticamente um fluxo invíscido, podemos simplesmente deixar a viscosidade ser zero. É mais difícil criar um fluxo invíscido experimentalmente, porque todos os fluidos de interesse (como água e ar) possuem viscosidade. Entretanto, se as tensões de deformação

são pequenas de forma que não afetam significativamente o fluxo, este poderá ser considerado invíscido após análise para justificar essa suposição.

Quando uma força é aplicada a um fluido, ele se deforma continuamente. O fluido que está mais perto do ponto de aplicação da força acelera mais, arrastando as camadas adjacentes. No entanto, a aceleração não pode continuar indefinidamente e, eventualmente, as forças internas de resistência se equilibram com a força aplicada. Portanto, o grau em que um fluido se comporta sem efeitos viscosidade depende da velocidade do fluxo e da eficiência do fluido em transmitir as forças internas de resistência às camadas adjacentes. Fluxos mais rápidos e fluidos com pequenas tensões internas se comportam de forma invíscida. Fluxos de ar e água podem ser considerados invíscidos sob certas condições.

Com base na experiência, os fluxos que podem ser modelados como invíscidos são fluxos externos, isto é, um fluxo que existe no exterior dos corpos. Neste caso, qualquer efeito da viscosidade está confinado a uma camada fina, chamada de camada limite como mostrado na figura 2.8; a velocidade na camada limite tende a zero devido à viscosidade. Para muitos fluxos, as camadas limite são tão finas que podem simplesmente ser ignoradas quando estudamos as características gerais de um fluxo em torno de um corpo. Fluxos viscosos incluem uma ampla classe de fluxos internos, como fluxos em tubulações, dutos e em canais abertos.

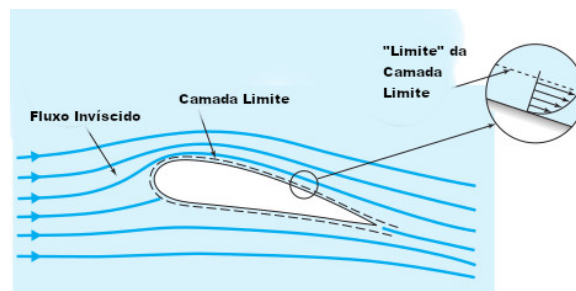


Figura 2.10: Fluxo em torno de uma asa de avião.

A camada limite em um fluxo geofísico (fluxo que ocorre naturalmente) é geralmente uma região onde o atrito, turbulência e tensões de deformação são importantes. As camadas limites térmicas são associadas a gradientes de temperatura. As camadas limite de velocidade estão relacionadas às tensões de deformação originadas por gradientes de velocidade. A última será sempre a "camada limite" nesta apostila, a menos que especificado de outra forma. Na atmosfera, a camada limite é a região onde a velocidade do fluxo atmosférico é fortemente afetada, e designada como camada limite planetária (PBL). Outras camadas limite podem ser definidas por

camadas de poluição, umidade ou qualquer outra quantidade passiva usada como parâmetro de interesse.

Em geral, a PBL tem duas regiões bastante distintas. Uma delas, onde as tensões de deformação são fortes; é a região perto do limite real (a superfície da terra ou do oceano), chamada a camada limite superficial. Nesta região, o fluxo ocorre em planos paralelos à superfície. A superfície é uma fonte de redemoinhos turbulentos produzidos por mecanismos de fricção mecânica. Nesta camada não há muito espaço para movimento vertical. A segunda região é uma camada bem mais espessa, e aqui o efeito da rotação da Terra torna-se importante. É chamada camada de Ekman, ou camada mista. Nesta região, os redemoinhos turbulentos podem ser tão grandes quanto a espessura da camada. De fato, a mistura vertical vigorosa por grandes redemoinhos é uma característica dominante desta parte da camada. Cada uma das regiões desta camada limite podem ter diferentes distribuições de temperatura, com diferentes forças de empuxo.

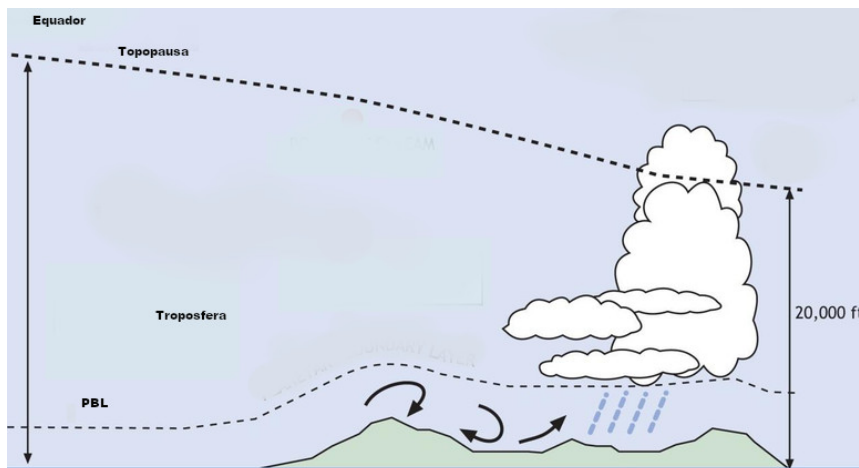


Figura 2.11: Representação gráfica da PBL.

Os fluxos também podem ser classificados como **compressíveis** e **incompressíveis**. Fluxos incompressíveis apresentam como característica a constância da densidade, de forma que:

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (2.60)$$

Na equação anterior, $D\rho/Dt$ significa a derivada total. Isso não exige que a densidade seja constante em todos os pontos. Se a densidade for constante, então, obviamente, o fluxo é incompressível, mas isso seria uma condição mais restritiva. Fluxos atmosféricos, no qual $\rho = \rho(z)$, onde z é a coordenada vertical, e fluxos que envolvem camadas adjacentes de água doce

e salgada, como acontece quando os rios entram no oceano, são exemplos de escoamentos incompressíveis em que a densidade varia. Além dos fluxos de líquidos, fluxos de gás de baixa velocidade, como o fluxo atmosférico mencionados acima, também são considerados fluxos incompressíveis. O número de Mach é usado como critério para a classificação dos fluxos em termos de sua compressibilidade, sendo definido como:

$$M = \frac{v}{c} \quad (2.61)$$

onde v é a velocidade do fluxo e $c = \sqrt{kRT}$ a velocidade do som no fluido. A equação 2.27 é útil para classificar se o fluxo de um determinado fluido pode ser considerado incompressível. Se $M \leq 0,3$, as variações de densidade são no máximo 3% e o fluxo é assumido como incompressível; para o ar padrão, isso corresponde a uma velocidade abaixo de cerca de 100 m/s ou 300 pés/seg. Se $M > 0,3$, as variações de densidade influenciam o fluxo e efeitos de compressibilidade devem ser considerados; tais fluxos são compressíveis.

2.8.2 Transição a turbulência

Um fluxo viscoso pode ser classificado como um fluxo **laminar** ou um fluxo **turbulento**. Em um fluxo laminar o fluido flui sem mistura significativa das camadas adjacentes de fluido. Tensões de deformação viscosas sempre influenciam um fluxo laminar. O fluxo pode ser altamente dependente do tempo, ou pode ser constante como evidenciado na figura a seguir.

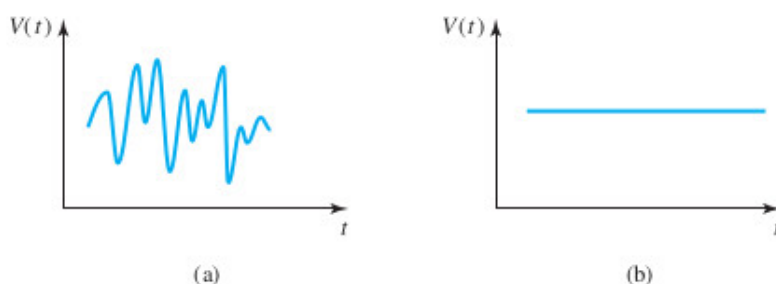


Figura 2.12: Velocidade em função do tempo em um fluxo turbulento. (a) instável; (b) estável.

Em um fluxo turbulento, os movimentos do fluido variam irregularmente, de modo que quantidades como velocidade e pressão mostram uma variação aleatória com as coordenadas de tempo e espaço. As quantidades físicas são frequentemente descritas por médias estatísticas. Nesse

sentido podemos definir um fluxo turbulento “estacionário” como um fluxo no qual a média de tempo das quantidades físicas não variam com o tempo.

A transição a turbulência (de um fluxo laminar a turbulento) depende de três parâmetros físicos os quais descrevem as condições de fluxo. O primeiro parâmetro é uma escala de comprimento do fluxo L , como a espessura de uma camada limite ou o diâmetro de um tubo. Se esta escala de comprimento é suficientemente grande, um fluxo pode ser turbulento. O segundo parâmetro é uma escala de velocidade v tal como uma média espacial da velocidade; para uma velocidade grande o suficiente o fluxo pode ser turbulento. O terceiro parâmetro é a viscosidade cinemática $\nu = \mu/\rho$; para uma viscosidade suficientemente pequena, o fluxo pode ser turbulento. Os três parâmetros podem ser combinados em um único parâmetro adimensional que pode servir como uma ferramenta para prever o regime de fluxo. Essa quantidade é o número de Reynolds, definido como:

$$Re = \frac{vL}{\nu} \quad (2.62)$$

Se o número de Reynolds for relativamente pequeno, o fluxo é laminar; se for grande, o fluxo é turbulento. Por fim, transição e a turbulência dependem das deformações ou tensões internas do fluido. As tensões são maiores onde o fluxo é adjacente aos limites. Assim, o estudo das camadas limite são inseparáveis da transição, da turbulência e dos efeitos viscosos.

2.9 Lista de Questões e Problemas

1. Uma partícula de fluido deve manter fixa sua densidade ou seu formato no fluxo? Pode-se permitir, em hidrodinâmica, a divisão de uma partícula de fluido em dois ou mais partículas?
2. Trace as linhas de corrente representativas dos seguintes campos de velocidades.

(a) $\vec{u}(\vec{r}, t) = (x^2, xy^3)$

(b) $\vec{u}(\vec{r}, t) = (x, y)$

(c) $\vec{u}(\vec{r}, t) = (\frac{w}{\pi}x, wy)$

(d) $\vec{u}(\vec{r}, t) = (-wy, wx)$, com w constante para $r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \leq a$ e, $\vec{u}(\vec{r}, t) = \left(\frac{-\Gamma y}{2\pi r^2}, \frac{\Gamma x}{2\pi r^2} \right)$, para $r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} > a$, sendo Γ constante. Em ambos os casos, a é constante.

(e) $\vec{u}(\vec{r}, t) = (-yx, xy^2)$

3. Um campo de velocidades é dado por $\vec{u} = (2t + 2)\hat{i} - 2t\hat{j}$, em m/s. Apresente um esboço da trajetória de duas partículas até um tempo $t = 5s$. A primeira partícula se origina na origem em $t = 0s$, e a segunda que se origina na origem em um tempo de 2s. Também apresente um esboço das linhas de corrente em $t = 5s$.

4. Para o campo de velocidades $\vec{u} = Ax\hat{i} + Ay\hat{j}$, onde $A = 2m^2s^{-1}$, verifique que as equações paramétricas para o movimento da partícula são dadas por $x = c_1 e^{At}$ e $y = c_2 e^{-At}$. Obtenha a equação para a trajetória da partícula localizada no ponto $(x, y) = (2, 2)$ no instante $t = 0$. Compare essa trajetória com a linha de corrente passando pelo mesmo ponto.

5. Considere o campo de escoamento dado na descrição euleriana pela expressão $\vec{u} = ax + byt$, em que $a = 0.2s^{-1}$, $b = 0.04s^{-2}$, e as coordenadas são medidas em metros. Deduza as funções de posição lagrangiana para a partícula fluida que passou pelo ponto $(x, y) = (1, 1)$ no instante $t = 0$. Obtenha uma expressão algébrica para a trajetória seguida por essa partícula. Trace a trajetória e compare-a com as linhas de corrente que passam por esse mesmo ponto nos instantes $t = 0.10s$ e $t = 20s$.

6. Considere a mangueira de jardim. Suponha que o campo de velocidade é dado por $\vec{u} = u_0 + v_0 \text{sen}[w(t - x_0/u)]$, onde a direção x é horizontal e a origem está na posição média da mangueira, $u_0 = 10m/s$, $v_0 = 2m/s$, e $w = 5\text{ciclos/s}$. Determine e trace em um gráfico as linhas de corrente instantâneas que passam através da origem em $t = 0s, 0.05s, 0.1s$ e $0.15s$. Também determine e trace um gráfico com as trajetórias das partículas que deixam a origem para os mesmos quatro instantes de tempos.

7. Um campo de velocidades é dado por $\vec{u} = (2t + 2)\hat{i} - 2t\hat{j}$, em m/s. Apresente um esboço da trajetória de duas partículas até um tempo $t = 5s$. A primeira partícula se origina na origem em $t = 0s$, e a segunda que se origina na origem em um tempo de 2s. Também apresente um esboço das linhas de corrente em $t = 5s$.

8. Calcule o ângulo que o vetor velocidade faz com o eixo Ox e o vetor unitário normal a linha de corrente em $(1, -2)$ para os campos de velocidade abaixo em $t = 2s$ com \vec{u} em m/s .

(a) $\vec{u} = xy\hat{i} - 2y^2\hat{j}$

$$(b) \vec{u} = (x^2 + 4)\hat{i} - y^2t\hat{j}$$

$$(c) \vec{u} = (xy^2 + 4)\hat{i} - yt\hat{j}$$

9. Ache o vetor campo de aceleração para o fluxo de um fluido com os seguintes campos de velocidade em m/s :

$$(a) \vec{u} = 20(1 - y^2)\hat{i}$$

$$(b) \vec{u} = 2x\hat{i} - 2yt^{1/2}\hat{j}$$

$$(c) \vec{u} = x^2t\hat{i} + 2xyt\hat{j} + 2yzt\hat{k}$$

$$(d) \vec{u} = x\hat{i} - 2xyz\hat{j} + zt\hat{k}$$

10. Para todos os casos anteriores calcule a aceleração em $(2, -1, 3)$ em $t = 2s$.

11. Dado o campo de velocidade,

$$u_x = 3x + 2yz + u_{x_0},$$

$$u_y = 4xy + 3t + 2yz + u_{y_0},$$

$$u_z = 0$$

onde u_{x_0} e u_{y_0} são constantes, responda e calcule:

(a) Se enquadra na descrição Euleriana ou Lagrangeana?

(b) Qual a aceleração local?

(c) Qual a aceleração advectiva?

(d) Qual a aceleração total?

12. Um avião voa ao longo de uma frente quente em direção ao norte a uma velocidade de

360Km/h . A temperatura de um navio ancorado nas proximidades apresenta um aumento de $12^\circ\text{C}/\text{dia}$. Um satélite mede um gradiente horizontal de temperatura no clima do sistema de $-0,06\text{C}/\text{km}$ para o norte. Qual é o gradiente de temperatura medido no avião?

13. A velocidade ao longo da linha central de um bocal de comprimento L é dado por:

$$u = 2t \left[1 - \left(\frac{x}{2L} \right) \right]^2,$$

onde u esta em m/s , t em segundos e medido a partir do início do fluxo, x é a distância da entrada até o bocal. Encontre a aceleração convectiva, a aceleração local e a aceleração total quando $t = 3\text{s}$, $x = 0,5\text{m}$ e $L = 0,8\text{m}$.

14. Ache o vetor velocidade angular para os campos de velocidade do problema 9. Calcule a velocidade angular no ponto $(2,-1,3/2)$ em $t = 2\text{s}$.

15. Ache o vetor vorticidade para os campos de velocidade do problema 9. Calcule a vorticidade no ponto $(2, -1, 3)$ em $t = 2\text{s}$.

16. Considere o movimento e um fluido entre placas estacionárias paralelas separadas pela distância b . A coordenada x_2 é medida a partir da placa inferior. O campo de velocidade é dado por você $u = u_{max}[1 - (y/b)^2]$. Obtenha uma expressão para a circulação sobre um contorno fechado de altura h e comprimento L quando $h = b/2$ e $h = b$. Qual a vorticidade?

17. Considere o movimento e um fluido entre placas estacionárias paralelas separadas pela distância $2b$. A coordenada x_2 é medida a partir da linha central entre as duas placas. O campo de velocidade é dado por você $u = u_{max}[1 - (y/b)^2]$. Obtenha uma expressão para a vorticidade. Ache o local onde a vorticidade é máxima.

18. Ache as componentes do tensor taxa de deformação os campos de velocidade do problema 9 em $(2,-1,3)$ em $t = 2\text{s}$.

19. A densidade do ar na atmosfera varia de acordo com $\rho(z) = 1.23e^{-10^{-4}z}$ em Kg/m^3 . Conforme a figura abaixo, o ar sobe a montanha com velocidade $\vec{u} = 20\hat{e}_1 + 10\hat{e}_3$ em m/s , em um ponto igual a $z=3000\text{ m}$. Ache a taxa de variação da densidade de uma partícula de fluido neste ponto.



20. A variação da densidade com a altitude é dada por $\rho(z) = 1000(1 - \frac{z}{4}) \text{ Kg/m}^3$. Em um local onde $\vec{u} = 10\hat{e}_1 + 10\hat{e}_3$ em m/s, ache $\frac{D\rho}{Dt}$.

21. Escreva o vetor gradiente de \vec{a} na forma vetorial, indicial e matricial.

22. Apresente as seguintes expressões expandindo em componentes e rearranjando.

(a) $\nabla \cdot (f\vec{v}) = f\nabla \cdot \vec{v} + \nabla f \cdot \vec{v}$

(b) $\nabla \times (f\vec{u}) = f\nabla \times \vec{u} + \nabla f \times \vec{u}$

(c) $A\vec{u} \cdot \vec{w} = (A^*w) \cdot \vec{u}$

23. Escreva o termo A_{13} na expressão $A_{ij} = B_{kl}e_{ik}e_{jl}$.

24. Escreva as componentes A_{12} e A_{33} na expressão $A_{ij} = u_i B_{kj} v_k + w_k e_{ijk}$.

25. Mostre que $\vec{a} \times \vec{b} = e_{ijk} a_j b_k$.

26. Considerando $i, j, k=1,2$ e 3 , apresente as expressões abaixo em termos de suas componentes.

(a) $F_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$

(b) $\epsilon_{pqr} \frac{\partial S_r}{\partial x_q}$

27. O campo $u_1 = 6(x_1 x_2 + x_2^2)$, $u_2 = 3(x_1^2 + x_2^2)$, $w = 0$ é (a) divergente? (b) irrotacional? Argumente em ambos os casos.

28. Considere o fluxo descrito por $\vec{u} = 10x_1\hat{e}_1 - 10x_2\hat{e}_2$. Este fluxo é irrotacional? Qual sua divergência?

2.10 Apêndice

2.10.1 Tensores

Um tensor é uma generalização de vetores e matrizes, sendo facilmente compreendido como uma matriz multidimensional. No caso geral, uma matriz de números dispostos em uma grade regular com um número variável de eixos é conhecido como tensor. Um vetor é um tensor unidimensional ou de primeira ordem e uma matriz é um tensor bidimensional ou de segunda ordem, contendo nove componentes. A notação tensorial é muito parecida com a notação de matricial com uma letra maiúscula representando um tensor, e letras minúsculas com inteiros subscritos representando as componentes do tensor.

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \quad (2.63)$$

2.10.2 Produto de Matrizes-Revisão

A multiplicação de matrizes segue a regra:

$$C_{ij} = A_{ik}B_{kj}, \quad (2.64)$$

sendo $i = 1, 2, 3, \dots, i_n$, $j = 1, 2, 3, \dots, j_n$ e $k = 1, 2, 3, \dots, k_n$. Para matrizes quadradas, $i_n = j_n = k_n = n$, o número de elementos em cada linha e coluna.

2.10.3 Representação Matricial

Na forma matricial, um tensor pode ser escrito como:

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \quad (2.65)$$

Para uma matriz quadrada T_{ij} , dizemos que esta é simétrica se $T_{ij} = T_{ji}$, e anti-simétrica se $T_{ij} = -T_{ji}$. A extensão se faz válida para tensores também. Desta forma, em um tensor

simétrico três elementos são repetidos; $T_{12} = T_{21}$, $T_{13} = T_{31}$ e $T_{23} = T_{32}$. Em uma matriz 3×3 existem apenas 6 escalares independentes, $T_{12}, T_{13}, T_{23}, T_{11}, T_{22}$ e T_{33} . Em um tensor anti-simétrico $T_{11}, T_{22}, T_{33} = 0$, e os três escalares independentes ocorrem com sinal positivo e negativo. Estes três escalares constituem o vetor dual definido como:

$$d_i = \epsilon_{ijk} T_{jk}. \quad (2.66)$$

2.10.4 Teorema

Dado um tensor T_{ij} , este pode ser decomposto na soma de um tensor simétrico e um anti-simétrico.

$$T_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) + \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}). \quad (2.67)$$

2.10.5 Propriedades Básicas dos Tensores

2.10.5.1 Adição:

$$\mathbf{U} = \mathbf{T} + \mathbf{S} \quad (2.68)$$

$$\begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} + S_{11} & T_{12} + S_{12} & T_{13} + S_{13} \\ T_{21} + S_{21} & T_{22} + S_{22} & T_{23} + S_{23} \\ T_{31} + S_{31} & T_{32} + S_{32} & T_{33} + S_{33} \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

Em notação indicial,

$$U_{ij} = T_{ij} + S_{ij}. \quad (2.70)$$

2.10.5.2 Produto de um Tensor por um Vetor:

Seja \vec{u} um vetor e \mathbf{T} um tensor de segunda ordem, então:

$$\vec{v} = \mathbf{T} \cdot \vec{u} \quad (2.71)$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11}u_1 + T_{12}u_2 + T_{13}u_3 \\ T_{21}u_1 + T_{22}u_2 + T_{23}u_3 \\ T_{31}u_1 + T_{32}u_2 + T_{33}u_3 \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

Alternativamente, em notação indicial temos:

$$v_i = T_{ij}u_j. \quad (2.73)$$

Note que de forma geral, $\vec{u} \cdot \mathbf{T} \neq \mathbf{T} \cdot \vec{u}$ a menos que \mathbf{T} seja simétrico.

2.10.5.3 Produto de Tensores:

Sejam \mathbf{T} e \mathbf{S} dois tensores de segunda ordem.

$$\mathbf{U} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{S} \quad (2.74)$$

$$\begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} = \quad (2.75)$$

$$\begin{bmatrix} T_{11}S_{11} + T_{12}S_{21} + T_{13}S_{31} & T_{11}S_{12} + T_{12}S_{22} + T_{13}S_{32} & T_{11}S_{13} + T_{12}S_{23} + T_{13}S_{33} \\ T_{21}S_{11} + T_{22}S_{21} + T_{23}S_{31} & T_{21}S_{12} + T_{22}S_{22} + T_{23}S_{32} & T_{21}S_{13} + T_{22}S_{23} + T_{23}S_{33} \\ T_{31}S_{11} + T_{32}S_{21} + T_{33}S_{31} & T_{31}S_{12} + T_{32}S_{22} + T_{33}S_{32} & T_{31}S_{13} + T_{32}S_{23} + T_{33}S_{33} \end{bmatrix}$$

Na notação indicial temos:

$$U_{ij} = T_{ik}S_{kj}. \quad (2.76)$$

Note também que o produto de matriz não é comutativo, logo

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{S} \neq \mathbf{S} \cdot \mathbf{T}. \quad (2.77)$$

2.10.5.4 Tensor Transposto:

Seja S um tensor. O tensor transposto de S será S^T e definido como:

$$\vec{u} \cdot \mathbf{S}^T = \mathbf{S} \cdot \vec{u}. \quad (2.78)$$

$$\mathbf{S}^T \equiv \begin{pmatrix} S_{11} & S_{21} & S_{31} \\ S_{12} & S_{22} & S_{32} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{pmatrix}. \quad (2.79)$$

Se A e B são dois tensores, então

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T. \quad (2.80)$$

2.10.5.5 Tensor Delta de Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j; \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Na forma matricial, o tensor delta de Kronecker aparece como:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.81)$$

O tensor delta de Kronecker é um tensor unitário.

2.10.5.6 Tensor Unitário Alternado

É um tensor de ordem três definido como:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{se } ijk = 123, 231, 312 \text{ (permutação par);} \\ -1 & \text{se } ijk = 321, 213, 132 \text{ (permutação impar);} \\ 0 & \text{se } ijk \text{ tem pelo menos dois índices iguais.} \end{cases}$$

2.10.5.7 Produto Diádico de dois Vetores ou Produto Tensorial

Até aqui estamos habituados com dois tipos de produtos entre vetores, o produto escalar e o produto vetorial. Um terceiro produto entre vetores é conhecido como *produto diádico* ou produto tensorial. Sejam \vec{a} e \vec{b} dois vetores escritos na forma $\vec{a} = a_1\hat{e}_1 + a_2\hat{e}_2 + a_3\hat{e}_3$ e $\vec{b} = b_1\hat{e}_1 + b_2\hat{e}_2 + b_3\hat{e}_3$, o produto diádico entre os dois vetores será:

$$\begin{aligned}\vec{a}\vec{b} = \vec{a};\vec{b} &= (a_1\hat{e}_1 + a_2\hat{e}_2 + a_3\hat{e}_3)(b_1\hat{e}_1 + b_2\hat{e}_2 + b_3\hat{e}_3) = \\ & a_1b_1\hat{e}_1\hat{e}_1 + a_1b_2\hat{e}_1\hat{e}_2 + a_1b_3\hat{e}_1\hat{e}_3 + a_2b_1\hat{e}_2\hat{e}_1 + a_2b_2\hat{e}_2\hat{e}_2 + a_2b_3\hat{e}_2\hat{e}_3 + a_3b_1\hat{e}_3\hat{e}_1 + a_3b_2\hat{e}_3\hat{e}_2 + a_3b_3\hat{e}_3\hat{e}_3,\end{aligned}\tag{2.82}$$

que em notação indicial fica na forma

$$A_{ij} = a_ib_j.\tag{2.83}$$

Para uma matriz quadrada T_{ij} , dizemos que esta é simétrica se $T_{ij} = T_{ji}$, e anti-simétrica se $T_{ij} = -T_{ji}$. A extensão se faz válida para tensores também. Desta forma, em um tensor simétrico três elementos são repetidos; $T_{12} = T_{21}$, $T_{13} = T_{31}$ e $T_{23} = T_{32}$. Em uma matriz 3×3 existem apenas 6 escalares independentes, $T_{12}, T_{13}, T_{23}, T_{11}, T_{22}$ e T_{33} . Em um tensor anti-simétrico $T_{11}, T_{22}, T_{33} = 0$, e os três escalares independentes ocorrem com sinal positivo e negativo. Estes três escalares constituem o vetor dual definido como:

$$d_i = \epsilon_{ijk}T_{jk}.\tag{2.84}$$