

Notas de Aula

Hidrodinâmica Avançada

Author Douglas Langie



Departamento de Física
Universidade Federal de Pelotas
Rio Grande do Sul-BR

Sumário

1 Fundamentos	8
1.1 Definição de Fluido	8
1.2 Fluido, Sistema Infinitesimal ou Partícula de Fluido e Livre Caminho Médio	9
1.3 Densidade e Pressão em um Ponto de um Fluido	12
1.3.1 Densidade	12
1.3.2 Pressão em um ponto de um fluido	13
1.3.2.1 Fluido em Repouso	15
1.3.2.2 Líquidos em Repouso	16
1.3.2.3 Pressão em um Ponto da Atmosfera	17
1.4 Campo de Velocidades	19
1.5 Tensão de Deformação (ou Corte) e Lei de Newton da Viscosidade	21
1.5.1 Tensão de Deformação	21
1.5.2 Lei de Newton da Viscosidade	23
1.6 Lista de Questões e Problemas	27
1.7 Tabelas de Dados	40
2 Fluidos em Movimento	43
2.1 Representação de Euler e Lagrange	43
2.2 Linha de corrente, Trajetória e Linha de Emissão	44
2.2.1 Linha de Corrente	44
2.2.2 Linhas de corrente – dependência temporal	48
2.2.3 Trajetória	48
2.2.4 Linhas de Emissão	52
2.3 Derivada Total de Campos Escalares e Vetoriais (derivada em um ponto)	53

2.3.1	Derivada Total de um Campo Escalar	53
2.3.2	Notação Indicial e Variação Advectiva	54
2.4	Divergência e Convergência	56
2.5	Campo de Aceleração	56
2.6	Vorticidade	58
2.7	Movimento Relativo Próximo de um Ponto	61
2.8	Classificação dos Fluxos, Turbulência e Número de Reynolds	64
2.8.1	Classificação dos fluxos	64
2.8.2	Transição a turbulência	67
2.9	Lista de Questões e Problemas	68
2.10	Apêndice	71
2.10.1	Tensores	71
2.10.2	Produto de Matrizes-Revisão	72
2.10.3	Representação Matricial	72
2.10.4	Teorema	72
2.10.5	Propriedades Básicas dos Tensores	73
2.10.5.1	Adição:	73
2.10.5.2	Produto de um Tensor por um Vetor:	73
2.10.5.3	Produto de Tensores:	73
2.10.5.4	Tensor Transposto:	74
2.10.5.5	Tensor Delta de Kronecker	75
2.10.5.6	Tensor Unitário Alternado	75
2.10.5.7	Produto Diádico de dois Vetores ou Produto Tensorial	75
3	Equação da Continuidade, Vorticidade, Função Potencial e de Corrente	77
3.1	Equação da Continuidade no Sistema Infinitesimal e num Volume de Controle	77
3.2	Equação da Continuidade em Coordenadas Cilíndricas e Plano Polares	79
3.3	Forma Integral da Continuidade	80
3.4	Funções de Corrente e Potencial em Fluxos	
Bidimensionais	82
3.4.1	Interpretação Geométrica de ψ	83

3.4.2	Interpretação Física de ψ	83
3.5	Fluxo Bidimensional Compressível	84
3.6	Fluxo Bidimensional Incompressível em Coordenadas Plano Polares	85
3.7	Velocidade Potencial	86
3.8	Casos particulares	88
3.8.1	Campo de Velocidade Uniforme I	88
3.8.2	Fonte ou Sorvedouro na Origem I	89
3.8.3	Linha de Vórtice I	90
3.9	Potenciais Complexos	91
3.9.1	Campo de Velocidade Uniforme II	94
3.9.2	Fonte ou Sorvedouro na Origem II	94
3.9.3	Linha de Vortice II	95
3.10	Lista de Problemas	96
4	Fluidos Ideais	100
4.1	Introdução	100
4.2	Forças Fundamentais	100
4.2.1	Força de Gradiente de Pressão (força de corpo)	100
4.2.2	Força da Gravidade (força de corpo)	101
4.2.3	Força de Viscosidade ou de Tensões Viscosas (força de superfície)	102
4.2.4	Referencial não Inercial	103
4.3	Equação de Euler	109
4.4	Teorema de Transporte de Reynolds	110
4.4.1	Teorema de Transporte de Reynolds para um Volume Fixo Arbitrário	111
4.4.2	Teorema de Transporte de Reynolds para um Volume de Controle em Movimento com Velocidade Constante	114
4.4.3	Teorema de Transporte de Reynolds para um Volume de Controle de Forma Constante mas Velocidade Variável	114
4.4.4	Teorema de Transporte de Reynolds para Movimentos e Deformações Arbitrárias	115
4.4.5	Aproximação unidimensional para termos de fluxo	115

4.5	Equação do Momento Linear	116
4.6	Equação da Energia	121
4.7	Equação de Bernoulli	125
4.8	Equação da Vorticidade	128
4.9	Propriedades da Equação da Vorticidade	129
4.10	Teorema de Circulação de Kelvin	131
4.11	Theoremas de Helmholtz	133
4.12	Aplicações da Equação de Euler	133
4.12.1	Caso Hidrostático	133
4.12.2	Equação de Euler no Referencial Girante da Terra	133
4.12.3	Vortice de Rankine	133
4.12.4	Cilindro em uma Superposição de um Campo Constante com um Vortice na Origem(Efeito Magnus e Formula de Joukovsky)	133
4.12.5	Instabilidade de Kelvin	133
4.12.6	Ondas de Gravidade	133
4.12.7	Ondas Sonoras	133
4.13	Lista de Problemas	133
5	Equação de Navier-Stokes	138
5.1	Tensor de Tensão	138
5.1.1	O Termo de Tensão para Líquidos e Gases	138
5.1.2	Tensor de Tensões Geral em Três Dimensões	140
5.1.3	Pressão	142
5.1.4	Lei de Stokes da Fricção	143
5.1.5	Derivação Alternativa do Termo de Tensão	145
5.1.6	Viscosidade Turbulenta	146
5.1.7	O Termo de Coriolis	147
5.2	Problemas Estacionários Introdutórios para a Equação de Navier-Stokes	149
5.2.1	Fluxo de uma Camada Fina de Fluido sob a Ação da Força da Gravidade	149
5.2.2	Fluxo de Fluido entre Cilindros	149
5.2.3	Fluxo num tubo e lei de Stokes-Poiseulle	149

5.3	Fundamentos de Camada Limite	149
5.4	Instabilidade em Fluxos	149
5.4.1	Transição a Turbulência	149
5.4.2	Cascata de Energia Kolmogorov	149
5.4.3	Equação de Navier-Stokes para Fluxos Turbulentos	149
6	Análise Dimensional e Semelhança	150
6.1	Introdução	150
6.2	Análise Dimensional	153
6.3	Teorema dos Pi(II)	159
6.4	Protocolo de Aplicação do Teorema dos Pi(II)	160
6.5	Similaridade	167
6.5.1	Similaridade Geométrica	167
6.5.2	Similaridade Cinemática	168
6.5.3	Similaridade Dinâmica	169
6.6	Adimensionalização das Equações Básicas	170
6.7	Lista de Problemas	170

Capítulo 1

Fundamentos

1.1 Definição de Fluido

O termo fluido em física se refere a matéria, quando esta se deforma frente uma força aplicada, em contrapartida ao que é observado nos sólidos. É do senso comum a presença dos fluidos na vida cotidiana. O ar na atmosfera, a água em rios e oceanos e os líquidos e gases nas mais distintas aplicações tecnológicas. De fato, tanto líquidos como gases são considerados fluidos. A diferença está apenas nas suas compressibilidades, não obstante ambos são descritos pelo mesmo conjunto de equações matemáticas.

Sólidos são formados por átomos, os quais se encontram espaçados de maneira periódica ou randômica. O movimento dos átomos é pequeno e ocorre de forma oscilatória em torno de suas posições de equilíbrio, o que mantém a forma do sólido. A distância de aproximação entre os átomos é limitada pela repulsão coulombiana de suas eletrosferas. Como resultado, os sólidos são menos susceptíveis a deformações. Líquidos e gases também são formados de átomos, mas que nestes casos se agrupam formando estruturas moleculares. As moléculas se movimentam por grandes distâncias e interagem entre si de forma a se atraírem quando as distâncias de separação são grandes, ou se repelirem quando as distâncias de separação forem da ordem de um diâmetro molecular.

Podemos de forma alternativa definir os fluidos a partir do conceito de tensão. Na figura 1.1, uma força ΔF é aplicada sobre uma determinada área ΔA , definida pelo vetor \hat{n} , normal a área. A força dividida pela área na qual ela está sendo aplicada é definida como a tensão. Como a força pode ser decomposta em uma componente normal ΔF_n e uma componente tangencial

ΔF_t , teremos a atuação de duas tensões. Uma tensão normal (compressão) e outra tangente a área ΔA (esta última conhecida como tensão de deformação ou cisalhamento - componente tangencial da força por unidade de área).



Figura 1.1: Componentes normal e tangencial da força.

A tensão de deformação é a mais importante neste momento pois será usada como critério para definirmos os fluidos que serão tema de interesse deste curso. Matematicamente ela pode ser escrita como:

$$\tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}. \quad (1.1)$$

Assim, ao longo deste curso, iremos nos deter nos fluidos que tendem a responder por meio de movimentos ou deformações a tensões.

1.2 Fluido, Sistema Infinitesimal ou Partícula de Fluido e Livre Caminho Médio

A mecânica dos fluidos é o ramo da física que aborda os movimento dos fluidos (os fluxos). Exemplos são a circulação atmosférica, a circulação marinha, o escoamento da fumaça de uma chaminé, entre tantos outros encontrados no nosso dia a dia. De outra forma, a mecânica dos fluidos é o ramo onde os princípios fundamentais da mecânica são aplicados a líquidos e gases, como no caso dos corpos rígidos. Porém, as consequências são completamente distintas levando a comportamentos específicos. Os princípios fundamentais são a conservação da massa, a conservação da energia e as leis de Newton. A essência da mecânica dos fluidos se dá tanto do ponto de vista teórico, bem como experimental. Desde que ela obedece a princípios físicos bem estabelecidos, existe uma estrutura teórica bem fundamentada. Entretanto, esta estrutura é muitas vezes frustrante, visto que é desenvolvida considerando-se situações ideais, muitas vezes distantes dos fenômenos reais. Os maiores obstáculos a aplicação da teoria são

as complexas geometrias envolvidas e a propriedade física conhecida como viscosidade. As equações básicas do movimento dos fluidos são muito difíceis de serem resolvidas para geometrias arbitrárias. Muitas vezes, cálculos numéricos são empregados na solução das equações via métodos computacionais, sendo este ramo conhecido como mecânica dos fluidos computacional. O segundo problema, a viscosidade, aumenta o grau de dificuldade para a solução das equações do movimento, além de gerar instabilidades ao longo do fluxo dando origem a turbulência. Atualmente, a mecânica dos fluidos se constitui em uma teoria aceita, entretanto ela precisa ser suportado por experimentos. Em muitas situações, dos experimentos resultam as principais informações e dados a respeito de um fenômeno. A experimentação se constitui no complemento natural da teoria e ambos caminham lado a lado.

Uma hipótese fundamental para a aplicação da teoria é de que os fluidos possam ser considerados meios contínuos. Sabemos que os fluidos são formados por moléculas muito espaçadas entre si no caso dos gases, e mais próximas no caso dos líquidos. Além disso, estas moléculas se movem por grandes distâncias com relativa liberdade. Assim, a conceito de massa e de massa por unidade de volume (densidade) perdem o sentido na escala molecular, por que o número de moléculas ocupando um determinado volume unitário varia continuamente. O efeito começa a ficar desprezível quando o volume unitário é da ordem do espaçamento intermolecular elevado ao cubo. Neste caso, o número de moléculas no interior do volume começa a ficar aproximadamente constante, embora exista trânsito de um grande número de moléculas através das fronteiras deste volume. Por outro lado, se o volume unitário for muito grande o cálculo da densidade pode ser afetado pela agregação volumétrica de partículas. O comportamento da densidade, calculado a partir da massa molecular dm contida no volume unitário dV é plotado versus este mesmo volume unitário na figura 1.2. Então existe um limite inferior abaixo do qual os efeitos moleculares dominam; e um limite superior no qual os efeitos devido a agregação se tornam importantes. A densidade do fluido, considerando a argumentação anterior, fica bem definida quando:

$$\rho = \lim_{dV \rightarrow dV^*} \frac{dm}{dV} \quad (1.2)$$

, onde $dV^* \approx 10^{-9} mm^3$.

Uma forma mais adequada de testar a hipótese do contínuo é comparar o comprimento

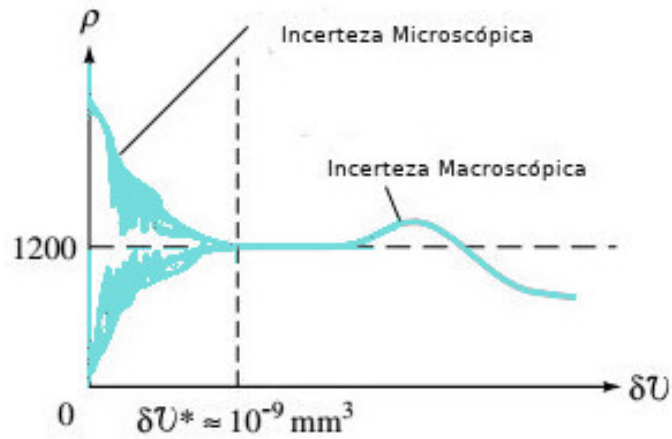


Figura 1.2: Densidade versus volume unitário.

característico do sistema l com o livre caminho médio molecular λ ; a distância média que uma molécula se desloca sem colidir com outra molécula. Se $l \gg \lambda$, a hipótese do contínuo é aceita. Da teoria molecular, o comprimento característico de um sistema se relaciona ao livre caminho médio por:

$$\lambda = 0.255 \frac{m}{\rho d^2}. \quad (1.3)$$

Na equação 1.3, m é a massa da molécula (Kg), ρ é a densidade (Kg/m³) e d o diâmetro da molécula (m). Para o ar $m = 4.8 \times 10^{-26}$ kg e $d = 3.7 \times 10^{-10}$ m. Em condições atmosféricas padrão, o livre caminho médio é de aproximadamente 6.4×10^{-6} cm. A uma elevação de 100 km é de 10 cm, e a 160 km é 5000 cm. Obviamente, neste caso a hipótese do contínuo não é aceita, e a Teoria do Gás Rarefeito deve ser aplicada.

As leis básicas que aplicamos em nosso estudo da mecânica dos fluidos podem ser formuladas em termos de sistemas infinitesimais ou finitos e volumes de controle. As equações gerais parecerão diferentes nos dois casos. Ambas as abordagens são importantes no estudo da mecânica dos fluidos. No primeiro caso, as equações resultantes são equações diferenciais, e suas solução fornecem um meio de determinar os detalhes do comportamento do movimento dos fluidos. Frequentemente, a informação procurada não requer um conhecimento detalhado do movimento do fluido. Muitas vezes estamos interessados no comportamento médio de um fluido que se move ao longo de um determinado volume (de controle), e nesses casos é mais apropriado usar formulações integrais das equações básicas.

Por fim, ao longo deste curso iremos adotar o conceito de partícula de fluido. Quando tratamos da dinâmica de um fluido, nos deparamos com o fato de que um fluido é formado por um grande número de moléculas. Não estamos interessados na dinâmica molecular, por isso ignoraremos o movimento das moléculas e trabalharemos apenas com os valores médios das grandezas físicas, de forma a analisar o comportamento macroscópico dos fluidos. Essas são as grandezas que podem ser medidas experimentalmente. Então, precisamos definir um elemento de fluido com dimensão apropriada para que as medias tenham sentido e sejam representativas do comportamento do fluido. Usaremos um modelo teórico/abstrato de partícula de fluido para representar o fluido. Dessa forma, consideraremos a pressão, temperatura, densidade, etc, de um fluido chamado de partícula de fluido. Esta partícula deve satisfazer as seguintes condições: i) grande o suficiente para conter um número significativo de moléculas de forma que os valores médios das grandezas físicas sejam significativos; ii) pequeno o suficiente para que os valores médios das grandezas físicas sejam os mesmos ao longo do parcel; iii) univocamente definido em pequenos intervalos de tempo. O conceito de partícula de fluido e sua aplicação ficarão claros ao longo do curso. No entanto, podemos comentar que este conceito é fundamental para a dinâmica dos fluidos. Ele permitirá a aplicação das leis de conservação a fluidos, e a partir das soluções destas leis determinar a dinâmica do movimento. As dimensões da partícula de fluido irão depender do fluido ou das propriedades do fluxo (fluido em movimento). O volume de uma partícula de fluido pode variar ao longo do fluxo. Isto ocorre em fluxos compressíveis com conseqüente variação da densidade da partícula de fluido.

1.3 Densidade e Pressão em um Ponto de um Fluido

1.3.1 Densidade

O conceito básico de densidade de uma substância é dado pela razão entre a massa de uma quantidade de substância e o volume ocupado por esta.

$$\rho = \frac{m}{V}. \quad (1.4)$$

Para líquidos esta definição é satisfatória. Entretanto, como os gases são compressíveis, e para estes a definição deve ser estendida. Uma propriedade dos fluidos diretamente relacionada

a densidade é o peso específico γ , ou peso por unidade de volume definido por:

$$\gamma = \frac{W(\text{peso})}{V} = \frac{mg}{V} = \rho g. \quad (1.5)$$

Na equação anterior, g é a gravidade local. A gravidade específica é geralmente usada para determinar o peso específico e a densidade. Ela é definida como a razão entre a densidade de uma substância e a densidade da água a 4° C.

$$S = \frac{\rho}{\rho_{H_2O}}. \quad (1.6)$$

A gravidade específica é também conhecida por densidade relativa.

1.3.2 Pressão em um ponto de um fluido

A pressão é a razão entre uma força normal (perpendicular) e a área sobre a qual esta força é aplicada. É uma grandeza escalar, o que implica que ela independe das direções espaciais. A determinação da pressão em um ponto de um fluido pode ser feita a partir da variação da pressão entre este ponto e um ponto de referência. Queremos obter uma expressão geral para a variação da pressão ao longo de fluidos em repouso ou movimento no caso onde a posição relativa dos elementos de fluido não se altera.

Considere a figura 1.3. Se assumimos que a pressão no centro do elemento de volume é p , onde $p = p(x, y, z)$, o diferencial ¹ de pressão é:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz. \quad (1.7)$$

¹O diferencial de uma função de várias variáveis significa a mudança total na variável dependente devido às mudanças em todas as variáveis independentes.

$$df = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

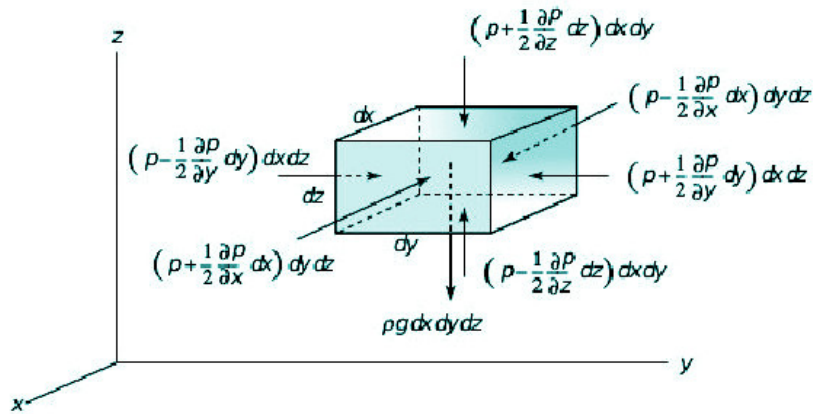


Figura 1.3: Forças agindo em um elemento infinitesimal de volume com respeito aos eixos x,y,z.

A equação anterior pode ser usada para determinar a pressão sobre cada uma das faces do elemento de volume. Ao longo da direção x , a variação total da pressão entre a face anterior e posterior é,

$$\left[-\left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) + \left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) \right] = -\left[\frac{\partial p}{\partial x} dx\right] \quad (1.8)$$

Multiplicando o resultado obtido na equação 1.8 pela área da face, $(dydz)$, obtemos a força total que age sobre o elemento de fluido ao longo da direção x .

$$F_x = -\left(\frac{\partial p}{\partial x} dx\right) dydz \quad (1.9)$$

Usando o mesmo procedimento para as demais direções, determinamos a força total ao longo das direções y e z .

$$F_y = -\left(\frac{\partial p}{\partial y} dy\right) dx dz \quad (1.10)$$

$$F_z = -\left(\frac{\partial p}{\partial z} dz\right) dx dy \quad (1.11)$$

Agora que temos a força total ao longo de cada uma das direções do espaço, podemos escrever as equações de Newton como:

$$F_x = ma_x \quad (1.12)$$

$$F_y = ma_y \quad (1.13)$$

$$F_z = ma_z \quad (1.14)$$

A massa pode ser escrita em termos da densidade por, $m = \rho/V = \rho/(dxdydz)$, de forma que:

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)dxdydz = \rho a_x dxdydz, \quad (1.15)$$

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)dxdydz = \rho a_y dxdydz, \quad (1.16)$$

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)dxdydz = \rho(a_z + g)dxdydz. \quad (1.17)$$

Dividindo as equações anteriores pelo volume do elemento ($dxdydz$), a equação 1.7 para a variação total da pressão em um ponto pode então ser obtido.

$$dp = -\rho a_x dx - \rho a_y dy - (\rho a_z + g)dz. \quad (1.18)$$

Diferenças de pressão entre pontos podem ser obtidas a partir da integração da equação 1.18, através da análise de casos específicos. Isto é explicitado a seguir.

1.3.2.1 Fluido em Repouso

Um fluido em repouso por definição é tal que não sofre nenhuma aceleração, logo $a_x = a_y = a_z = 0$. Neste caso, a equação 1.18 se reduz a:

$$dp = -\rho g dz \quad (1.19)$$

ou

$$dp = -\gamma dz \quad (1.20)$$

A solução da equação 1.20 implica que não ocorrem variações de pressão ao longo da direção x

e y . A pressão varia apenas com a coordenada vertical. Além disso notamos que dp é negativo quando dz é positivo. Ou seja, a pressão diminui com o aumento de z .

1.3.2.2 Líquidos em Repouso

Se a densidade for assumida constante, podemos integrar a equação 1.20 de forma que:

$$\int dp = - \int \gamma dz, \quad (1.21)$$

$$p = -\gamma z + C, \quad (1.22)$$

$$\frac{p}{\gamma} + z = C. \quad (1.23)$$

Note que a variável z é positivo ao longo da direção positiva do eixo Oz . Se o ponto de interesse onde queremos calcular a pressão fica a uma distância h abaixo da superfície do líquido, a equação 1.23 pode ser reescrita como:

$$p = \gamma h. \quad (1.24)$$

onde $p = 0$ quando $h = 0$ (figura 1.4).

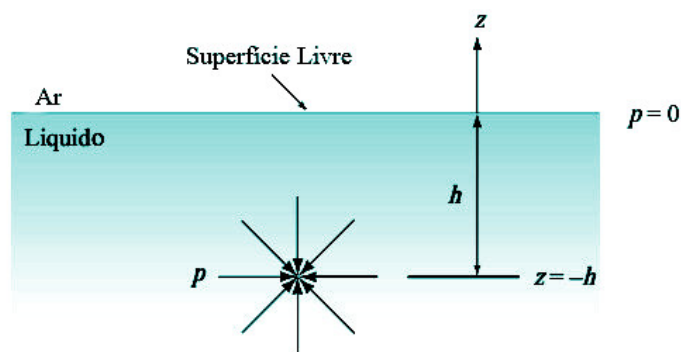


Figura 1.4: Pressão abaixo da superfície em um líquido.

1.3.2.3 Pressão em um Ponto da Atmosfera

O cálculo da pressão na atmosfera envolve algumas sutilezas. Em primeiro lugar, a densidade da atmosfera não é constante, mas varia com a altitude $\rho = \rho(z)$. A atmosfera também pode ser dividida em quatro importantes camadas, a troposfera, a estratosfera, a mesosfera e a ionosfera (figura 1.5). As condições nestas camadas mudam no tempo e com a latitude, sendo que essas camadas são mais espessas no equador e mais finas nos polos. Assim basearemos nossos cálculos na atmosfera padrão, a qual se encontra a 40° de latitude.

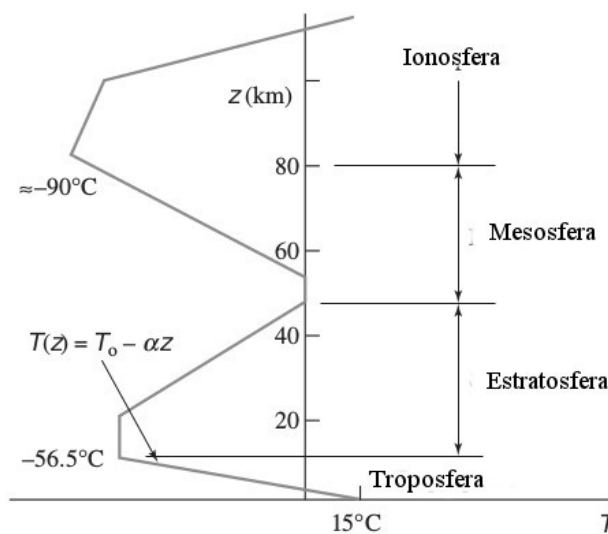


Figura 1.5: Diagrama de altitude $z(Km)$ versus temperatura $T(K)$ para a atmosfera padrão.

Na troposfera a temperatura varia linearmente com a altitude.

$$T(z) = T_0 - \alpha z, \quad (1.25)$$

onde $\alpha=0.0065$ Km/m é a taxa de variação da temperatura e $T_0=288.16$ K. Na parte inicial da estratosfera a temperatura é constante e volta a aumentar com a proximidade a mesosfera, ao passo que cai novamente até o limite da ionosfera. Para o cálculo da variação de pressão na troposfera, procedemos a partir da equação 1.19 e da função de estado do gás ideal.

$$dp = -\rho g dz \quad (1.26)$$

$$pV = nRT, p = \frac{nRT}{V}, p = \rho RT \quad (1.27)$$

Nesse ponto, substituímos ρ obtido da equação 1.27 na equação 1.26, e integramos ambos os lados da equação resultante de forma que:

$$\int_{p_{atm}}^p \frac{dp}{p} = \frac{-g}{R} \int_0^z \left(\frac{dz}{T}\right) \quad (1.28)$$

Porém, na estratosfera, a dependência da temperatura com a altitude se dá por meio da equação $T = T(z) = T_0 - \alpha z$, de forma que:

$$\int_{p_{atm}}^p \frac{dp}{p} = -\frac{g}{R} \int_0^z \left(\frac{dz}{T_0 - \alpha z}\right) \quad (1.29)$$

Para resolver a equação anterior, procedendo a seguinte troca de variáveis:

$$u = T_0 - \alpha z \quad (1.30)$$

$$\int_{p_{atm}}^p \frac{dp}{p} = -\frac{g}{\alpha R} \int_{T_0}^{T_0 - \alpha z} \left(\frac{du}{u}\right) \quad (1.31)$$

$$\ln \frac{p}{p_{atm}} = \frac{g}{\alpha R} \ln \left(\frac{T_0 - \alpha z}{T_0}\right) \quad (1.32)$$

$$\ln \frac{p}{p_{atm}} = \ln \left(\frac{T_0 - \alpha z}{T_0}\right)^{\frac{g}{\alpha R}}. \quad (1.33)$$

Por fim, obtemos uma expressão para a variação da pressão ao longo da troposfera com a seguinte forma:

$$p = p_{atm} \left(\frac{T_0 - \alpha z}{T_0}\right)^{\left(\frac{g}{\alpha R}\right)} \quad (1.34)$$

Na parte inferior da estratosfera, onde a temperatura é constante, a equação 1.19 será integrada como:

$$\int_{p_s}^p \frac{dp}{p} = -\frac{g}{RT_s} \int_{z_s}^z dz \quad (1.35)$$

Na equação anterior, o subíndice s significa que a integração inicia no limite entre a troposfera e a estratosfera. O resultado da integração leva a seguinte expressão:

$$\ln \frac{p}{p_s} = \frac{-g}{RT}(z - z_s) \quad (1.36)$$

Multiplicando ambos os lados da equação anterior por $\ln e$, e aplicando a propriedade dos logaritmos obtemos:

$$p = p_s e^{\frac{g}{RT}(z_s - z)} \quad (1.37)$$

1.4 Campo de Velocidades

É definido como sendo a distribuição de velocidades das partículas de um fluido ao longo do espaço e do tempo. Essa distribuição é uma função vetorial $\vec{v}(x, y, z, t)$, a qual representa a velocidade do fluido no ponto (x, y, z) no instante t . A quantidade $\vec{v}(x, y, z, t)$ é chamada de campo vetorial de velocidade. Pode ser pensado em cada instante no tempo como uma coleção de vetores, um para cada ponto no espaço cuja direção e magnitude descrevem a direção e magnitude da velocidade do fluido naquele ponto. Esta descrição do campo vetorial de velocidade do fluido refere-se a pontos fixos no espaço e não a partículas em movimento no fluido. O campo de velocidades pode ser escrito em termos de três componentes escalares como:

$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}, \quad (1.38)$$

onde v_x , v_y e v_z são as componentes do vetor \vec{v} ao longo das direções x , y e z . Em geral, cada componente, v_x , v_y e v_z , será uma função de x , y , z e t . Precisamos ser claros sobre o que $\vec{v}(x, y, z, t)$ mede. Ele indica a velocidade do fluido que passa pelo ponto (x, y, z) no tempo t . Podemos continuar medindo a velocidade no mesmo ponto ou escolher qualquer outro ponto (x, y, z) no instante seguinte; o ponto (x, y, z) não é a posição contínua de uma partícula de fluido individual, mas um ponto que escolhemos observar. Portanto, x , y e z são variáveis independentes. Então, $\vec{v}(x, y, z, t)$ deve ser entendido como o campo de velocidades de todas

as partículas, e não como a velocidades de uma partícula individual.

Se as propriedades em cada ponto em um campo de fluxo não mudam com o tempo, o fluxo é denominado permanente ou uniforme. Matematicamente, podemos escrever esta condição como:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = 0, \quad (1.39)$$

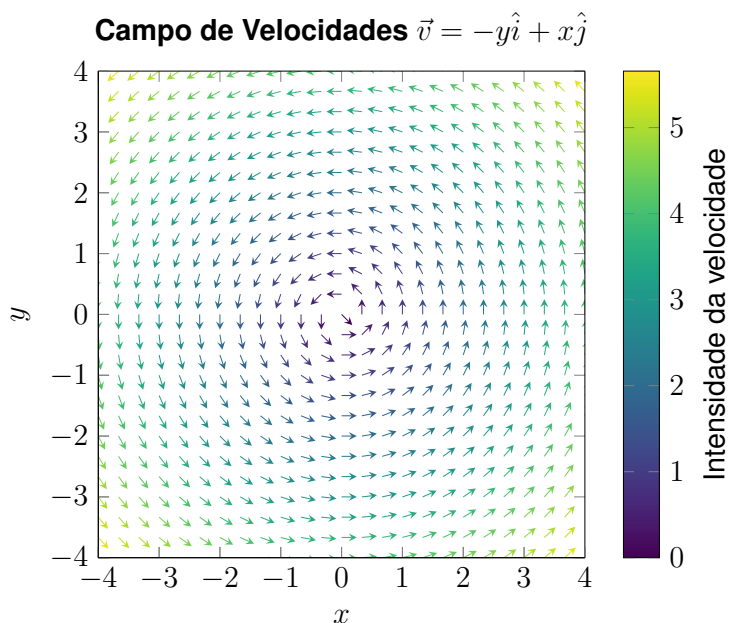
onde η representa qualquer propriedade do fluido. De forma geral, em um fluxo uniforme,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \text{ ou } \rho = \rho(x, y, z), \quad (1.40)$$

e

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0, \text{ ou } \vec{v} = \vec{v}(x, y, z) \quad (1.41)$$

O gráfico abaixo apresenta um representação do campo de velocidades dado por $\vec{v} = -y\hat{i} + x\hat{j}$, onde a barra lateral indica a intensidade da velocidade no ponto (x, y) .



1.5 Tensão de Deformação (ou Corte) e Lei de Newton da Viscosidade

1.5.1 Tensão de Deformação

Na seção 1.1 foi demonstrado que uma força que atua sobre uma superfície de um fluido, da origem a duas tensões; uma normal a superfície e uma tangencial ou paralela superfície. A origem destas tensões ocorrem do contato entre a partícula de fluido e as demais partículas adjacentes ou a vizinhança. Considere uma porção $\delta\vec{A}$ de uma superfície em ponto C (figura 1.6). A orientação de $\delta\vec{A}$ é dado pelo vetor unitário \hat{n} .

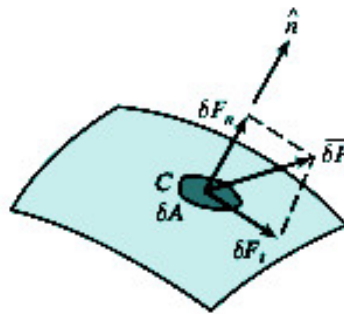


Figura 1.6: Componentes normal e tangencial da força.

A força $\delta\vec{F}$ agindo sobre $\delta\vec{A}$ pode ser resolvida em duas componentes de tensão, no senso da seção 1.1, e escritas na forma:

$$\tau_n = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\delta F_n}{\delta A} \quad (1.42)$$

e

$$\tau_t = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\delta F_t}{\delta A} \quad (1.43)$$

Podemos generalizar o conceito de tensão considerando uma partícula infinitesimal de fluido como a da figura 1.7 a seguir, onde estão destacadas as faces da partícula, bem como as tensões sobre cada uma destas. Em cada face da partícula existem três tensões, sendo uma normal e duas paralelas a face. Estas duas últimas são tensões de deformação e atuam no plano da face.

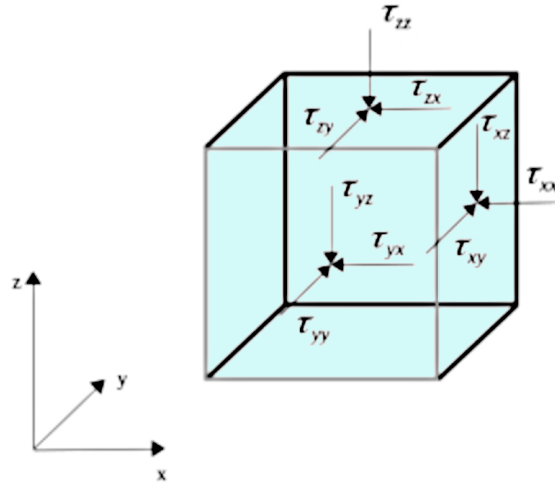


Figura 1.7: Partícula infinitesimal de fluido onde sobre cada face temos a ação de três tensões, uma normal e duas paralelas a face (tensões de deformação).

Considere um elemento de área δA_x , com direção para fora da partícula de fluido, e apontando no sentido positivo do eixo x . A força sobre esta face pode ser decomposta em três componentes, cada uma associada a uma direção espacial. Dividindo a magnitude de cada componente da força pela área δA_x , e tomando o limite de δA_x quando este tende a zero, definimos as três componentes de tensão que agem sobre a face.

$$\tau_{xx} = \lim_{\delta A_x \rightarrow 0} \frac{\delta F_x}{\delta A_x} \quad (1.44)$$

$$\tau_{xy} = \lim_{\delta A_x \rightarrow 0} \frac{\delta F_y}{\delta A_x} \quad (1.45)$$

$$\tau_{xz} = \lim_{\delta A_x \rightarrow 0} \frac{\delta F_z}{\delta A_x} \quad (1.46)$$

As componentes da tensão apresentam uma notação com dois subíndices. A convenção para a interpretação do par de índices considera que o primeiro índice representa a direção perpendicular ao plano sobre o qual a tensão esta atuando. O segundo índice indica a direção na qual a tensão atua. Se considerarmos o elemento de área δA_y , podemos definir outras três componentes de tensão representadas por τ_{yy} , τ_{yx} e τ_{yz} . O mesmo raciocínio pode ser estendido para a direção espacial z . Embora tenhamos generalizado o conceito de tensão sobre uma partícula de fluido cúbica, esta pode ter qualquer forma e pode ser formada por infinitos

planos (faces). Entretanto, o estado de tensão em um ponto pode ser descrito completamente especificando as tensões que atuam em quaisquer três planos mutuamente perpendiculares as direções espaciais. No limite onde a partícula de fluido tem um volume infinitesimal, estas são as tensões que agem no ponto ocupado pela partícula. De forma geral, a tensão em um ponto é especificada por nove componentes.

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} \quad (1.47)$$

1.5.2 Lei de Newton da Viscosidade

Uma das diferenças marcantes entre sólidos e fluidos tem a ver com os efeitos sofridos por ambos quando uma força é aplicada. Os sólidos se deformam pouco sob a ação de uma força, e na maioria das vezes, voltam a forma original quando a força é cessada. Neste caso a força é conhecida como tensão e seu efeito deformação. Os fluidos por sua vez, se deformam de forma contínua sob a ação de uma força e não retornam a forma original quando esta cessa. Quando uma força é aplicada, os elementos de fluido se movem. Camadas de fluido deslizam umas sobre as outras, sendo que a medida deste deslizamento tem uma relação de proporcionalidade com a distância. Esta relação de proporcionalidade é diferente entre líquidos e gases. Para fluidos em geral a força aplicada, a tensão, é proporcional a deformação ou mais precisamente, a taxa de deformação. O valor desta quantidade é simplesmente a diferença de velocidade entre camadas de fluido adjacentes. Se duas camadas adjacentes se movem com velocidades diferentes, definimos uma taxa de deformação entre as camadas. Por outro lado, se as velocidades forem as mesmas não existe deformação entre as camadas. A medida que o fluido acelera, de acordo com a Lei de Newton, a taxa de deformação aumenta e conseqüentemente, as forças internas de tensão aumentam. O fluido pode eventualmente chegar a um equilíbrio onde a taxa de força de tensão equilibra a força aplicada.

A viscosidade é uma medida empírica das forças internas de tensão que se opõem a deformação do fluido. As forças internas são forças intermoleculares. Essas forças dependem na distância de separação entre as moléculas. Elas terão valor significativo quando as moléculas simplesmente se aproximam.

Líquidos que fluem muito lentamente, como glicerina ou mel, têm alta viscosidade. Aqueles como éter ou gasolina, que fluem muito prontamente, têm baixa viscosidade. A viscosidade tem origem nas forças intermoleculares de atração e especialmente pela forma das moléculas do líquido. Líquidos cujas moléculas são polares ou podem formar ligações com átomos de hidrogênio são geralmente mais viscosos do que substâncias apolares semelhantes.

Líquidos contendo moléculas longas são geralmente muito viscosos, porque as cadeias moleculares se ligam para formar emaranhados como espaguete de moléculas, e para que o líquido flua as moléculas devem primeiro se desemaranhar. Óleos, graxas, lubrificante e compostos similares de cadeias longa são bastante viscosos por esse motivo. O glicerol, é viscoso em parte devido ao comprimento da cadeia, mas também devido às amplas possibilidades de ligações de hidrogênio entre as moléculas.

A viscosidade de um líquido sempre diminui com o aumento da temperatura. À medida que as moléculas adquirem mais energia cinética, elas podem escapar a atração mútua mais facilmente. Moléculas de cadeia longa também podem se desemaranhar mais facilmente a altas temperaturas.

A viscosidade nos gases independe da pressão ou densidade. A viscosidade de um gás diluído aumenta à medida que a temperatura aumenta, ao contrário dos líquidos. A taxa de aumento varia aproximadamente como T^s , onde s está entre 1/2 e 1, e depende do gás em particular. Ela surge de moléculas que atravessam camadas de fluxo e transferem momentum entre as essas camadas. Essa transferência de momentum pode ser pensada como uma força de resistência interna entre camadas do fluxo. Como a transferência de momentum é causada pelas colisões entre as moléculas do gás, e o aumento da agitação térmica das moléculas resulta em um aumento destas colisões, a viscosidade aumenta. Assim, a viscosidade dos gases aumenta com a temperatura.

A atmosfera é composta de uma mistura de gases chamada de ar e nossas leis devem ser endereçadas a este caso. Do ponto de vista macroscópico, uma força, a tensão de deformação pode ser definida como:

$$\tau = \mu \nabla \vec{u}, \quad (1.48)$$

onde $\nabla \vec{u}$ é o gradiente de velocidade. De forma a ilustrarmos este conceito, considere o ex-

perimento simples a seguir. Uma camada de fluido incompressível é confinada entre planos horizontais separados por uma distância l conforme a figura abaixo.

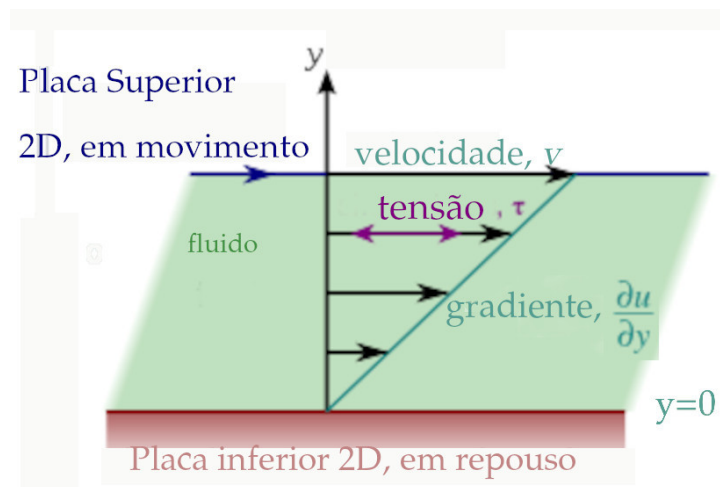


Figura 1.8: Fluxo de Couette ilustrando o conceito de viscosidade.

O plano $y = 0$ (y_0) está em repouso, enquanto o plano $y = y$ se encontra em movimento com velocidade. O plano y tende a puxar a camada de fluido por meio de uma força aplicada sobre a mesma. Por outro lado, o plano $y = 0$ tende a retardar o movimento do plano y por meio de uma força de mesmo módulo mas de sentido contrário. Esta é a mesma força que deve ser aplicada ao plano y para que este se movimente com velocidade constante. O experimento indica que esta força tangencial (de viscosidade) é dada pela relação:

$$\vec{F}_v = \mu \left(\frac{Av_0}{y} \right), \quad (1.49)$$

onde μ é o coeficiente de viscosidade dinâmico dado em unidades de $Kg/m \cdot s = N \cdot m \cdot s / kg = J \cdot s / kg$. Generalizando, escreveremos:

$$\vec{F}_v = \mu A \left(\frac{\delta \vec{v}}{\delta y} \right), \quad (1.50)$$

A razão \vec{F}_v / A é conhecida como tensão de deformação τ (cisalhamento ou corte).

$$\tau = \mu \lim_{\delta y \rightarrow 0} \frac{\delta \vec{v}}{\delta y} = \mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial y}. \quad (1.51)$$

A equação anterior foi a confirmação do postulado de Newton que acreditava que a tensão tangencial entre duas camadas era proporcional ao gradiente de velocidade na direção perpen-

dicular as camadas. Portanto, a equação 1.51 é conhecida como lei de Newton da viscosidade e os fluidos que a obedecem são chamados de Newtonianos. O ar, a água e outros fluidos simples são Newtonianos. O coeficiente de viscosidade dinâmico é constante para um determinado fluido mas dependente da temperatura.

Considerações Finais:

(1) Conversão de unidade de massa atômica em gramas(g)

Uma(1) unidade de massa atômica (*uma*) é definida como sendo 1/12 avos da massa de 1 átomo de carbono 12. O número de Avogadro é igual ao número total de entidades em 12 g de $^{12}\text{C} = 6.02 \times 10^{23}$ átomos de ^{12}C . Um(1) mol de ^{12}C pesa 12 g. Portanto, 6.02×10^{23} átomos de ^{12}C tem massa de 12g, o que implica que 1 átomo de ^{12}C tem massa de,

$$m_{^{12}\text{C}} = \frac{1 \text{at}^{12}\text{C} \times 12\text{g}}{6.02 \times 10^{23} \text{at}^{12}\text{C}} = 1.99 \times 10^{-23} \text{g}$$

Por fim, uma unidade de massa atômica (1uma) é:

$$1\text{uma} = \frac{1}{12} \times m_{^{12}\text{C}} = 1.66 \times 10^{-24} \text{g}$$

(2) Da definição de número de mols,

$$n = \frac{N \text{ (Número de moléculas)}}{N_a \text{ (Número de Avogadro)}}$$

ou,

$$n = \frac{M_s \text{ (Massa da amostra em gramas)}}{M \text{ (Massa Molar em gramas/mol)}} = \frac{M_s \text{ (Massa da amostra em gramas)}}{m N_a}$$

A massa molar é também conhecida como "massa molecular ou peso molecular e sua unidade é *g/mol*.

(3) Massa de uma molécula em gramas

$$m \text{ (Massa de uma molécula em g)} = \frac{\text{Massa Molar em g/mol}}{N_a}$$

1.6 Lista de Questões e Problemas

1. Um gás a 20° pode ser considerado rarefeito, desviando-se do conceito de meio contínuo, quando contém menos de 1×10^{12} moléculas por milímetro cúbico. Se o número de Avogadro é 6.023×10^{23} moléculas por mol, que pressão absoluta (em Pa) para o ar isso representa?

Solução

O ar seco é composto de 78,09 % de nitrogênio, 20,95 % de oxigênio, 0,93 % de argônio, 0,04 % de dióxido de carbono e outros gases em quantidades escassas. O vapor de água também é um constituinte do ar em quantidades variáveis, juntamente com as partículas de poeira. Considerando apenas os gases, a massa molar da mistura é dada por:

$$M_{mis} = \sum_{i=1}^k y_i M_i$$

Na equação anterior, Y_i é a fração molar de cada gás, M_i é a massa molar de cada gás. Para 1 mol de ar na atmosfera, as frações molares e massas molares de cada gás são:

Gás	y_i	M_i
N_2	0.7809	28g/mol
O_2	0.2095	32g/mol
Ar	0.0004	39.95g/mol

Tabela 1.1:

A massa molar de ar seco é:

$$M_{mis} = 0.7895 \times 28\text{g/mol} + 0.2095 \times 32\text{g/mol} + 0.0004 \times 39.95\text{g/mol} = 28.95\text{g/mol}$$

Agora, a massa de uma molécula de ar pode ser calculada.

$$m = \frac{M_{mis}}{N_a} = \frac{28.95\text{g/mol}}{6.02 \times 10^{23}\text{moléculas/mol}} = 4.81 \times 10^{-23}\text{g}$$

A densidade do ar contendo 1×10^{12} moléculas por mm^3 é no SI,

$$\rho = \left[1 \times 10^{12} \frac{\text{molécula}}{\text{mm}^3} \right] \left[4.81 \times 10^{-23} \frac{\text{g}}{\text{molécula}} \right]$$

$$\rho = 4.81 \times 10^{-11} \frac{g}{mm^3} = 4.81 \times 10^{-5} \frac{kg}{m^3}$$

Para aplicarmos valores na equação do gás ideal, precisamos calcular a constantes dos gases para a mistura de gases.

$$R_m = \frac{R}{M_m} = \frac{\left(8.31 \frac{J}{molK}\right)}{28.95 \frac{g}{mol}} = \frac{8.31 \times 1000 \frac{gm^2}{molKs^2}}{28.95 \frac{g}{mol}} = 287 \frac{m^2}{Ks^2}$$

Finalmente, obtemos:

$$P = \rho R_m T = \left(4.81 \times 10^{-5} \frac{kg}{m^3}\right) \left(287 \frac{m^2}{Ks^2}\right) (293K) = 4Pa$$

2. A tabela 3 da seção 1.7, lista a massa específica da atmosfera padrão como função da altitude. Utilize esses valores para estimar grosseiramente — digamos, dentro de um fator 2 — o número de moléculas de ar em toda a atmosfera da terra.

Solução

A atmosfera da terra pode ser modelada como uma camada uniforme de ar com espessura de 20 Km e densidade média de 0.51 Kg/m^3 . Considere que o raio da terra é 6377 Km. A massa total de ar contida nesta camada pode ser estimada por:

$$m_t = \int dm = \int \rho dV = \int \rho_{\text{médio}} dv = \rho_{\text{médio}} V_{\text{camada}}$$

O volume da camada de ar será:

$$V_{\text{camada}} = \text{Área de superfície do planeta} \times \text{Espessura da camada de ar}$$

$$V_{\text{camada}} = 4\pi R_{\text{terra}}^2 \times 20000m$$

$$V_{\text{camada}} = 4\pi (6377 \times 1000m)^2 \times 20000m = 1.022 \times 10^{19} m^3$$

Agora, podemos calcular a massa de ar contida nesta camada multiplicando o volume obtido pela densidade:

$$m = 0.51 \frac{Kg}{m^3} \times 1.022 \times 10^{19} m^3 = 5.2 \times 10^{18} Kg$$

Dividindo agora a massa da atmosfera calculada pela massa de uma molécula de ar calculado no exercício 1, chegamos a uma estimativa para o número de moléculas na atmosfera.

$$N_{molculas} = \frac{m(\text{atmosfera})}{m(\text{molécula de ar})} = \frac{5.2 \times 10^{18} Kg}{4.8 \times 10^{-23} \frac{g}{molcula}} = 1.3 \times 10^{44} \text{moléculas}$$

3. Novamente, usado a tabela 3 da seção 1.7, calcule o livre caminho médio na atmosfera em elevações de 30000 m, 50000 m e 80000 m.

Solução

O livre caminho médio de uma molécula na atmosfera é dado por:

$$\lambda = 0.255 \frac{m}{\rho d^2} = \frac{8.94 \times 10^{-8} \frac{Kg}{m^2}}{\rho},$$

sendo que a densidade para altitudes de 30000m igual a 0.0184 kg/m³.

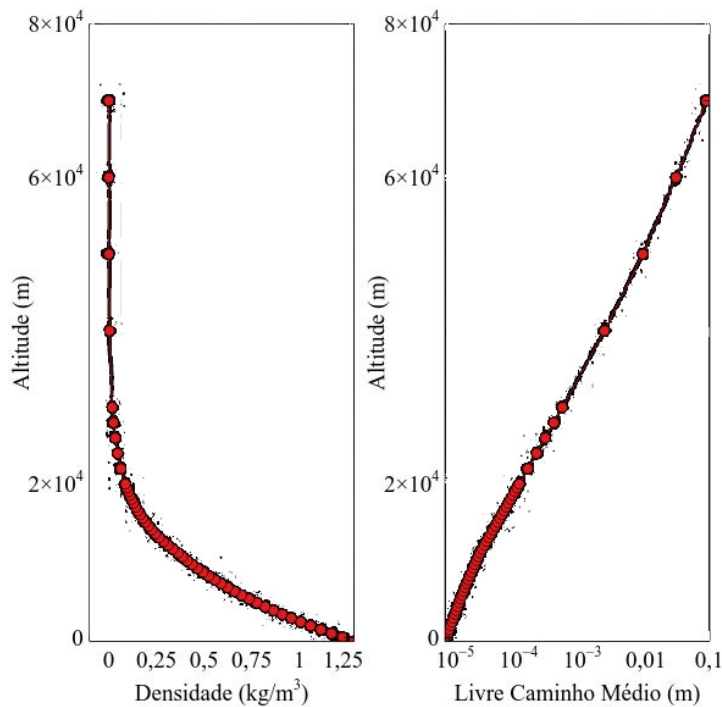
$$\lambda = 4.85 \times 10^{-6} m,$$

sendo que a densidade para altitudes de 50000m igual a 0.0010 kg/m³.

$$\lambda = 8.94 \times 10^{-5} m$$

sendo que a densidade para altitudes de 80000m igual 0.0010 a kg/m³.

$$\lambda = 8.94 \times 10^{-4} m$$



4. Se a pressão ao nível do mar for 1.01350×10^5 Pa, calcule a pressão padrão a uma altitude de 5.000 m, usando (a) a fórmula exata (eq.1.35) e (b) uma suposição isotérmica de uma temperatura padrão ao nível do mar de 15°C. A aproximação isotérmica é adequada?

Solução

(a) Considere a equação 1.34.

$$p = p_{atm} \left(\frac{T_0 - \alpha z}{T_0} \right)^{\left(\frac{g}{\alpha R} \right)}$$

O coeficiente $\frac{g}{\alpha R}$ é adimensional. Considerando $R = 287 \frac{m^2}{s^2 K}$, o coeficiente em questão vale 5.26. Assim,

$$p = p_{atm} \left(1 - \frac{\alpha z}{T_0} \right)^{5.26}$$

$$p = 101350 Pa \left[1 - \frac{(0.0065 K/m) 5000 m}{288.16 K} \right]^{5.26}$$

$$p = (101350 Pa)(0.5328) = 54000 Pa$$

(b) Se a atmosfera fosse isotérmica a 288.16 K, usaríamos a equação 1.37.

$$p = p_s e^{\frac{g}{RT}(z_s - z)} \quad (1.52)$$

$$p = (101350 Pa) e^{\left[\frac{9.8 \frac{m}{s^2}}{(287 m^2 / (s^2 K))(288.16 K)} \right] (0m - 5000m)} \quad (1.53)$$

$$p = (101350 Pa) e^{-0.5929} \approx 56000 Pa \quad (1.54)$$

Esse resultado é 4% maior que o resultado obtido em (a). A aproximação isotérmica é então imprecisa.

5. O Newfound Lake, um lago de água doce perto de Bristol, New Hampshire, tem uma profundidade máxima de 60 m, e a pressão atmosférica média é de 91 kPa. Calcule a pressão absoluta em kPa nessa profundidade máxima. (considere $\gamma_{gua} = 9.790 \text{ N/m}^3$)

Solução

$$P = P_{atm} - \gamma z = 91000 Pa - (9.709 \text{ N/m}^3)(-60)m = 678400 Pa \approx 678 kPa$$

6. Vênus tem uma massa de $4.90 \times 10^{24} \text{ kg}$ e um raio de 6050 km. A atmosfera em Vênus é 96 % CO_2 , mas vamos considerar que seja 100 %. A temperatura média na sua superfície é de 730 K, diminuindo para 250 K a uma altitude de 70 km. A pressão média na superfície é de 9,1 MPa. Calcule a pressão atmosférica de Vênus a uma altitude de 5 km.

Solução

O valor da aceleração gravitacional em Venus é de 8.9 m/s^2 . O valor da constante dos gases R para o dióxido de carbono pode ser obtido da tabela 4 da seção 1.7, sendo este de $R_{CO_2} \approx 189 \text{ m}^2 / (\text{s}^2 \text{ K})$. A taxa de variação da temperatura para Venus pode ser estimada a partir das informações dadas:

$$\alpha_{Venus} \approx \frac{\Delta T}{\Delta z} = \frac{730 K - 250 K}{70000 m} \approx 0.00686 K/m$$

O expoente $g/\alpha R$ no caso específico fica:

$$\frac{g}{\alpha R} = \frac{8.93}{189 \times 0.00686} = 6.89$$

Neste ponto podemos usar a equação 1.34 para estimar a pressão em $z = 5\text{km}$ na atmosfera de Vênus.

$$p = 9.1\text{MPa} \left[1 - \frac{0.00686\text{K/m}(5000\text{m})}{730\text{K}} \right]^{6.89} \approx 6.5\text{MPa}$$

7. Uma atmosfera politrópica² é definida pela lei de potência $(p/p_0) = (\rho/\rho_0)^m$, em que m é um expoente da ordem de 1,3 e p_0 e ρ_0 são valores da pressão e massa específica ao nível do mar. (a) Integre essa expressão na atmosfera estática e encontre uma distribuição $\rho(z)$. (b) Considerando um gás ideal, $p = \rho RT$, mostre que o seu resultado em (a) implica uma distribuição linear de temperatura, como na Equação 1.25. (c) Mostre que o valor padrão $\alpha = 0,0065\text{K/m}$ é equivalente a $m = 1.235$.

Solução

(a) Partimos da eq. 120.

$$dp = -\gamma dz = -\rho g dz$$

A aproximação de atmosfera politrópica implica,

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^m$$

$$p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^m$$

Substituindo na equação 1.19 e integrando:

$$dp = -\rho_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{m}}$$

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p^{\frac{1}{m}}} = - \left(\frac{\rho_0 g}{p_0^{\frac{1}{m}}} \right) \int_0^z dz$$

$$\int_{p_0}^p p^{-\frac{1}{m}} dp = - \left(\frac{\rho_0 g}{p_0^{\frac{1}{m}}} z \right)$$

²é um modelo para uma atmosfera em equilíbrio hidrostático onde a taxa de variação da temperatura é não nula

$$\left[\frac{p^{-\frac{1}{m}+1}}{-\frac{1}{m}} \right]_{p_0} = - \left(\frac{\rho_0 g}{p_0^{\frac{1}{m}}} z \right)$$

$$\frac{p^{\frac{m-1}{m}}}{\frac{m-1}{m}} - \frac{p_0^{\frac{m-1}{m}}}{\frac{m-1}{m}} = - \left(\frac{\rho_0 g}{p_0^{\frac{1}{m}}} z \right)$$

$$p^{\frac{m-1}{m}} - p_0^{\frac{m-1}{m}} = \left[\frac{m-1}{m} \right] \left(- \frac{\rho_0 g}{p_0^{\frac{1}{m}}} z \right)$$

$$p^{\frac{m-1}{m}} = p_0^{\frac{m-1}{m}} - \left[\frac{m-1}{m} \right] \left(- \frac{\rho_0 g}{p_0^{\frac{1}{m}}} z \right)$$

Colocando $p_0^{\frac{m-1}{m}}$ em evidência nos termos a direita da igualdade na equação anterior,

$$p^{\frac{m-1}{m}} = p_0^{\frac{m-1}{m}} \left(1 - \left[\frac{m-1}{m} \right] \frac{\rho_0 g}{p_0} z \right)$$

Elevando ambos os lados da equação anterior ao termo $\frac{m}{m-1}$,

$$p = p_0 \left(1 - \left[\frac{m-1}{m} \right] \frac{\rho_0 g}{p_0} z \right)^{\frac{m}{m-1}}$$

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 - \left[\frac{m-1}{m} \right] \frac{\rho_0 g}{p_0} z \right)^{\frac{m}{m-1}}$$

(b) Considerando a equação do gás ideal,

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^m = \left(\frac{p}{RT} \frac{RT_0}{p_0} \right)^m$$

Resolvendo para T/T_0 ,

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{pT_0}{Tp_0} \right)^m$$

$$\left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{m}} = \left(\frac{pT_0}{Tp_0} \right)$$

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{m}} \frac{p_0}{p} = \left(\frac{T_0}{T}\right)$$

$$\left(\frac{p^{\frac{1}{m}} p^{-1}}{p_0^{\frac{1}{m}} p_0^{-1}}\right) = \frac{T_0}{T}$$

$$\left(\frac{p^{\frac{1-m}{m}}}{p_0^{\frac{1-m}{m}}}\right) = \frac{T_0}{T}$$

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{-\frac{1-m}{m}} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{m-1}{m}}$$

Usando a resposta do item (a) para p/p_0 ,

$$\frac{T}{T_0} = \left[\left(1 - \left[\frac{m-1}{m} \right] \frac{\rho_0 g}{p_0} z \right)^{\frac{m}{m-1}} \right]^{\frac{m-1}{m}}$$

$$\frac{T}{T_0} = \left(1 - \left[\frac{m-1}{m} \right] \frac{gz}{RT_0} \right)$$

(c) Comparando a resposta do item (b) com a equação 1.25,

$$T = \left(T_0 - \left[\frac{m-1}{m} \right] \frac{gz}{R} \right)$$

$$T = T_0 - \alpha z$$

podemos escrever α como:

$$\alpha = \left[\frac{m-1}{m} \right] \frac{g}{R}$$

$$\frac{R\alpha}{g} = \frac{m-1}{m}$$

$$m - m \frac{R\alpha}{g} = 1$$

$$m \left(1 - \frac{R\alpha}{g} \right) = 1$$

$$m = \frac{1}{\left(1 - \frac{R\alpha}{g} \right)}$$

$$m = \frac{1}{\frac{g - R\alpha}{g}}$$

$$m = \frac{g}{g - R\alpha}$$

$$m = \frac{9.8 \text{ m/s}^2}{9.8 \text{ m/s}^2 - (0.0065 \text{ K/m} / 287 \text{ m}^2/\text{K s}^2)} = 1.235$$

8. Sob algumas condições a atmosfera é adiabática, $\rho \approx C\rho^k$, em que k é a razão entre calores específicos. Mostre que, para uma atmosfera adiabática, a variação de pressão é dada por

$$p = p_0 \left[1 - \frac{(k-1)gz}{kRT_0} \right]^{\frac{k}{k-1}}$$

Compare essa fórmula para o ar em $z = 5.000\text{m}$ com a atmosfera padrão da tabela 3, seção 1.7.

Considere $k=1.40$.

Solução

Inserindo a condição adiabática na equação hidrostática,

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$

$$\frac{d(C\rho)^k}{dz} = kC\rho^{k-1} \frac{d\rho}{dz} = -\rho g$$

$$\frac{d(\rho)}{dz} C \rho^{k-1} = \frac{-g}{k}$$

$$d\rho C \rho^{k-2} = -\frac{g}{k} dz$$

$$\int d\rho C \rho^{k-2} = - \int \frac{g}{k} dz$$

$$C \frac{\rho^{k-1}}{k-1} = -\frac{gz}{k} + \text{constante}$$

Fazendo $z = 0$ na equação anterior, determinamos a constante como:

$$\text{constante} = C \frac{\rho_0^{k-1}}{k-1}$$

$$C \frac{\rho^{k-1}}{k-1} = -\frac{gz}{k} + C \frac{\rho_0^{k-1}}{k-1}$$

$$C \frac{\rho^{k-1}}{k-1} - C \frac{\rho_0^{k-1}}{k-1} = -\frac{gz}{k}$$

Dividindo ambos os lados da equação anterior pela "constante",

$$\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{k-1} - 1 = -\frac{\frac{gz}{k}}{C \frac{\rho_0^{k-1}}{k-1}}$$

$$\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{k-1} = 1 - \frac{(k-1)}{k} \frac{gz}{C \rho_0^{k-1}}$$

Neste ponto considere que,

$$C \rho_0^{k-1} = C \rho_0^k \rho_0^{-1} = C \frac{\rho_0^k}{\rho_0} = \frac{p_0}{\rho_0} = RT_0$$

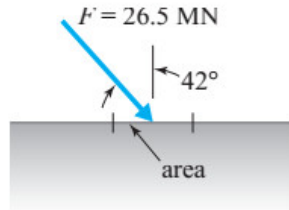
T_0 é a temperatura na superfície. Assim,

$$1 - \frac{(k-1)}{k} \frac{gz}{C \rho_0^{k-1}} = 1 - \frac{(k-1)}{k} \frac{gz}{RT_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}$$

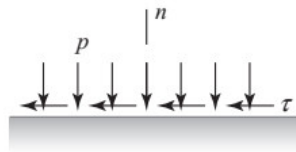
$$\left(\frac{p}{p_0}\right) = \left(1 - \frac{(k-1)}{k} \frac{gz}{RT_0}\right)^{\frac{k}{k-1}}$$

9. Uma força aplicada de 26.5 MN é distribuída uniformemente sobre 152 cm² de área; entretanto, ela age em um ângulo de 42° com respeito ao vetor normal. Se ela produz uma tensão de

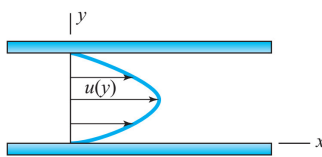
compressão, calcule a pressão resultante.



10. A força em uma área de 0.2 cm^2 é devida a uma pressão de 120 kPa e uma tensão de deformação de 20 Pa , como ilustrado na figura abaixo. Calcule a magnitude da força atuando na área e o ângulo da força com respeito a coordenada normal.



11. Considere um fluxo de fluido entre duas placas paralelas fixas separadas por 5 cm , como mostra a figura abaixo. A distribuição de velocidade para o fluxo é dada por $v(y) = 120(0,05y - y^2) \text{ m/s}$ onde y está em metros. O fluido é água a 10° C . Calcule a magnitude da tensão de deformação atuando em cada uma das placas. O coeficiente de viscosidade dinâmica para água a 10° C é $\mu = 1.308 \times 10^{-3} \text{ Ns/m}^2$.



Solução

A tensão de deformação é obtida a partir da equação 1.51.

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy}$$

$$\frac{dv}{dy} = \frac{d(120(0,05y - y^2))}{dy} = 120(0.05 - 2y)$$

Assim, na placa inferior $y=0$ e:

$$\left| \frac{dv}{dy} \right| = |120(0.05 - 0)| = 6s^{-1}, \quad \tau = 1.308 \times 10^{-3} \times 6s^{-1} = 7.848 \times 10^{-3} N/m^2$$

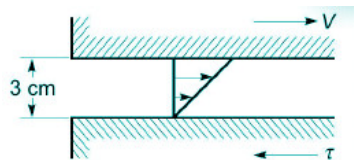
Na placa superior, $y=0.05m$ e:

$$\left| \frac{dv}{dy} \right| = |120(0.05 - (2 \times 0.05))| = 6s^{-1}, \quad \tau = 1.308 \times 10^{-3} \times 6s^{-1} = 7.848 \times 10^{-3} N/m^2$$

12. Uma distribuição de velocidade em um tubo com diâmetro de 2 polegadas é medida como $u(r) = 30(1 - r^2/(r_0)^2)$ ft /s, onde r_0 é o raio do tubo. Calcular a tensão de corte na parede do tubo se água a 75 °F está fluindo.

13. A distribuição de velocidade em um tubo de 1,0 cm de diâmetro é dado por $u(r) = 16(1 - r^2/(r_0)^2)$ m/s, onde r_0 é o raio do tubo. Calcule a tensão de cisalhamento na linha central, $r=0,25$ cm, e na parede se água a 20 °C está fluindo.

14. O espaço entre duas placas paralelas distantes 3 mm uma da outra é preenchido com um óleo de viscosidade dinâmica 0,2 Pa · s. Qual é a tensão de tangencial na placa inferior fixa, se a superior for movida com uma velocidade de 1.50 m/s?



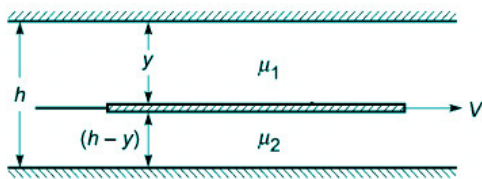
15. A distribuição de velocidade perto da parede sólida em uma seção em um fluxo laminar é dada por,

$$u = 5 \operatorname{sen}(5\pi y)$$

para $y \leq 0,10$ m. Calcular a tensão tangencial em uma seção em (a) $y = 0$, (b) $y = 0,05m$ e (c) $y = 0,10m$. A viscosidade dinâmica do fluido é 0.5 Pa · s.

16. Uma placa fina é colocada entre duas superfícies planas distantes uma da outra de h cm's, de modo que a viscosidade dos líquidos na região acima e abaixo da placa são μ_1 e μ_2 respectivamente. Determine a posição da fina placa de modo que a resistência viscosa ao movimento

uniforme seja mínimo. (Suponha que h é muito pequeno).



1.7 Tabelas de Dados

Tabela 1: Viscosidade e densidade da água a 1atm .

$T, ^\circ\text{C}$	$\rho, \text{kg/m}^3$	$\mu, \text{N} \cdot \text{s/m}^2$	$\nu, \text{m}^2/\text{s}$	$T, ^\circ\text{F}$	$\rho, \text{slug/ft}^3$	$\mu, \text{lb} \cdot \text{s/ft}^2$	$\nu, \text{ft}^2/\text{s}$
0	1.000	1,788 E-3	1,788 E-6	32	1,940	3,73 E-5	1,925 E-5
10	1.000	1,307 E-3	1,307 E-6	50	1,940	2,73 E-5	1,407 E-5
20	998	1,003 E-3	1,005 E-6	68	1,937	2,09 E-5	1,082 E-5
30	996	0,799 E-3	0,802 E-6	86	1,932	1,67 E-5	0,864 E-5
40	992	0,657 E-3	0,662 E-6	104	1,925	1,37 E-5	0,713 E-5
50	988	0,548 E-3	0,555 E-6	122	1,917	1,14 E-5	0,597 E-5
60	983	0,467 E-3	0,475 E-6	140	1,908	0,975 E-5	0,511 E-5
70	978	0,405 E-3	0,414 E-6	158	1,897	0,846 E-5	0,446 E-5
80	972	0,355 E-3	0,365 E-6	176	1,886	0,741 E-5	0,393 E-5
90	965	0,316 E-3	0,327 E-6	194	1,873	0,660 E-5	0,352 E-5
100	958	0,283 E-3	0,295 E-6	212	1,859	0,591 E-5	0,318 E-5

Tabela 2: Viscosidade e massa específica do ar a 1atm .

$T, ^\circ\text{C}$	$\rho, \text{kg/m}^3$	$\mu, \text{N} \cdot \text{s/m}^2$	$\nu, \text{m}^2/\text{s}$	$T, ^\circ\text{F}$	$\rho, \text{slug/ft}^3$	$\mu, \text{lb} \cdot \text{s/ft}^2$	$\nu, \text{ft}^2/\text{s}$
-40	1,52	1,51 E-5	0,99 E-5	-40	2,94 E-3	3,16 E-7	1,07 E-4
0	1,29	1,71 E-5	1,33 E-5	32	2,51 E-3	3,58 E-7	1,43 E-4
20	1,20	1,80 E-5	1,50 E-5	68	2,34 E-3	3,76 E-7	1,61 E-4
50	1,09	1,95 E-5	1,79 E-5	122	2,12 E-3	4,08 E-7	1,93 E-4
100	0,946	2,17 E-5	2,30 E-5	212	1,84 E-3	4,54 E-7	2,47 E-4
150	0,835	2,38 E-5	2,85 E-5	302	1,62 E-3	4,97 E-7	3,07 E-4
200	0,746	2,57 E-5	3,45 E-5	392	1,45 E-3	5,37 E-7	3,71 E-4
250	0,675	2,75 E-5	4,08 E-5	482	1,31 E-3	5,75 E-7	4,39 E-4
300	0,616	2,93 E-5	4,75 E-5	572	1,20 E-3	6,11 E-7	5,12 E-4
400	0,525	3,25 E-5	6,20 E-5	752	1,02 E-3	6,79 E-7	6,67 E-4
500	0,457	3,55 E-5	7,77 E-5	932	0,89 E-3	7,41 E-7	8,37 E-4

Tabela 3: Propriedades da atmosfera padrão.

Propriedades da atmosfera padrão	z , m	T , K	p , Pa	ρ , kg/m ³	a , m/s
	-500	291,41	107.508	1,2854	342,2
	0	288,16	101.350	1,2255	340,3
	500	284,91	95.480	1,1677	338,4
	1.000	281,66	89.889	1,1120	336,5
	1.500	278,41	84.565	1,0583	334,5
	2.000	275,16	79.500	1,0067	332,6
	2.500	271,91	74.684	0,9570	330,6
	3.000	268,66	70.107	0,9092	328,6
	3.500	265,41	65.759	0,8633	326,6
	4.000	262,16	61.633	0,8191	324,6
	4.500	258,91	57.718	0,7768	322,6
	5.000	255,66	54.008	0,7361	320,6
	5.500	252,41	50.493	0,6970	318,5
	6.000	249,16	47.166	0,6596	316,5
	6.500	245,91	44.018	0,6237	314,4
	7.000	242,66	41.043	0,5893	312,3
	7.500	239,41	38.233	0,5564	310,2
	8.000	236,16	35.581	0,5250	308,1
	8.500	232,91	33.080	0,4949	306,0
	9.000	229,66	30.723	0,4661	303,8
	9.500	226,41	28.504	0,4387	301,7
	10.000	223,16	26.416	0,4125	299,5
	10.500	219,91	24.455	0,3875	297,3
	11.000	216,66	22.612	0,3637	295,1
	11.500	216,66	20.897	0,3361	295,1
	12.000	216,66	19.312	0,3106	295,1
	12.500	216,66	17.847	0,2870	295,1
	13.000	216,66	16.494	0,2652	295,1
	13.500	216,66	15.243	0,2451	295,1
	14.000	216,66	14.087	0,2265	295,1
	14.500	216,66	13.018	0,2094	295,1
	15.000	216,66	12.031	0,1935	295,1
	15.500	216,66	11.118	0,1788	295,1
	16.000	216,66	10.275	0,1652	295,1
	16.500	216,66	9496	0,1527	295,1
	17.000	216,66	8775	0,1411	295,1
	17.500	216,66	8110	0,1304	295,1
	18.000	216,66	7495	0,1205	295,1
	18.500	216,66	6926	0,1114	295,1
	19.000	216,66	6401	0,1029	295,1
	19.500	216,66	5915	0,0951	295,1
	20.000	216,66	5467	0,0879	295,1
	22.000	218,6	4048	0,0645	296,4
	24.000	220,6	2972	0,0469	297,8
	26.000	222,5	2189	0,0343	299,1
	28.000	224,5	1616	0,0251	300,4
	30.000	226,5	1197	0,0184	301,7
	40.000	250,4	287	0,0040	317,2
	50.000	270,7	80	0,0010	329,9
	60.000	255,7	22	0,0003	320,6
	70.000	219,7	6	0,0001	297,2

Tabela 4: Propriedades dos gases comuns a 1 atm e 20°C.

Gás	Peso Molecular	$R, \text{m}^2/(\text{s}^2 \cdot \text{K})$	$\rho_g, \text{N}/\text{m}^3$	$\mu, \text{N} \cdot \text{s}/\text{m}^2$	Razão de calores específicos	expoente n^* da lei de potência
H ₂	2,016	4.124	0,822	9,05 E-6	1,41	0,68
He	4,003	2.077	1,63	1,97 E-5	1,66	0,67
H ₂ O	18,02	461	7,35	1,02 E-5	1,33	1,15
Ar	39,944	208	16,3	2,24 E-5	1,67	0,72
Ar seco	28,96	287	11,8	1,80 E-5	1,40	0,67
CO ₂	44,01	189	17,9	1,48 E-5	1,30	0,79
CO	28,01	297	11,4	1,82 E-5	1,40	0,71
N ₂	28,02	297	11,4	1,76 E-5	1,40	0,67
O ₂	32,00	260	13,1	2,00 E-5	1,40	0,69
NO	30,01	277	12,1	1,90 E-5	1,40	0,78
N ₂ O	44,02	189	17,9	1,45 E-5	1,31	0,89
Cl ₂	70,91	117	28,9	1,03 E-5	1,34	1,00
CH ₄	16,04	518	6,54	1,34 E-5	1,32	0,87