

Mecânica Estatística Quântica – 3

Alexandre Diehl

Departamento de Física - UFPel



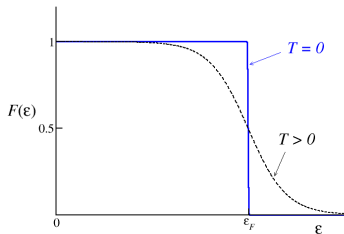
Limite degenerado para o gás ideal de Fermi

O chamado *limite degenerado* para o gás ideal de Fermi é obtido quando a *densidade de férmions é elevada* ou a *temperatura é baixa*. Neste limite,

$$\frac{n\lambda^3}{g_s} \gg 1 \quad \left(n = \frac{N}{V} \quad e \quad \lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}} \right)$$

Neste caso, não podemos usar expansões em potências de $z = (n\lambda^3/g_s)$, como no caso *não-degenerado* (z pequeno).

● Limite completamente degenerado ($T = 0$)



$$F(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1} = \begin{cases} 1 & \text{para } \epsilon < \epsilon_F \\ 0 & \text{para } \epsilon > \epsilon_F \end{cases}$$

Para $T = 0$, o potencial químico tem um valor igual à *energia de separação entre os estados ocupados dos não ocupados* (**energia de Fermi**):

$$\mu(T = 0) = \epsilon_F$$



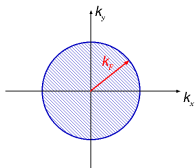
Gás ideal quântico

Limite completamente degenerado para o gás ideal de Fermi

$$\text{energia (caso não relativístico)} \rightarrow \varepsilon = \frac{p^2}{2m} \quad \vec{p} = \hbar\vec{k} \quad \rightarrow \varepsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

Cálculo da energia de Fermi para $T = 0$:

$$\varepsilon_F = \frac{p_F^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} \rightarrow k_F \equiv \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} \varepsilon_F} \quad \text{momento de Fermi} \quad \left\{ \begin{array}{l} k < k_F \quad \text{estados ocupados} \\ k > k_F \quad \text{estados vazios} \end{array} \right.$$



$$N = \sum_j \langle n_j \rangle = g_s \sum_{\vec{k}} F(\varepsilon) \xrightarrow{T=0} g_s \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k$$

$$= g_s \frac{V}{(2\pi)^3} 4\pi \int_0^{k_F} k^2 dk = g_s \frac{V}{(2\pi)^3} \left(\frac{4}{3} \pi k_F^3 \right)$$

cada elétron possui 2 estados de spin

estados de translação

$$n = \frac{N}{V} = \frac{g_s}{6\pi^2} \left(\frac{2m\varepsilon_F}{\hbar^2} \right)^{3/2}$$

$$\rightarrow \boxed{\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{6\pi^2 n}{g_s} \right)^{2/3}} \quad k_F = \left(\frac{6\pi^2 n}{g_s} \right)^{1/3}$$



Limite completamente degenerado para o gás ideal de Fermi

Energia no estado fundamental (ponto zero)

$$E_0 = \sum_j \varepsilon F(\varepsilon) \xrightarrow{T=0} g_s \sum_{\vec{k}} \varepsilon_k = g_s \frac{V}{(2\pi)^3} 4\pi \int_0^{k_F} \varepsilon_k k^2 dk$$

integral em energia: $\varepsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \rightarrow k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} \varepsilon_k \quad dk = \frac{1}{2k} \frac{2m}{\hbar^2} d\varepsilon_k = \frac{1}{2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{1/2} \frac{1}{\varepsilon_k^{1/2}} d\varepsilon_k$

$$\begin{aligned} \frac{E_0}{V} &= 2g_s \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\varepsilon_F} \varepsilon \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right) \varepsilon \frac{1}{2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{1/2} \frac{1}{\varepsilon^{1/2}} d\varepsilon \\ &= \int_0^{\varepsilon_F} d\varepsilon \left[\frac{2g_s}{(2\pi)^2} \frac{1}{2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{\varepsilon} \right] \varepsilon \\ &= \int_0^{\varepsilon_F} d\varepsilon g(\varepsilon) \varepsilon \quad \underbrace{g(\varepsilon) = C \sqrt{\varepsilon}}_{\text{densidade de estados}} \quad \left[C \equiv \left(\frac{2\pi m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{2g_s}{\sqrt{\pi}} \right] \end{aligned}$$

$$n = \frac{N}{V} = \int_0^{\varepsilon_F} d\varepsilon g(\varepsilon)$$

Densidade de estados: número de estados com energia ε , por unidade de energia por volume



Limite completamente degenerado para o gás ideal de Fermi

Energia no estado fundamental (ponto zero)

$$\left. \begin{aligned} \frac{E_0}{V} &= C \int_0^{\varepsilon_F} d\varepsilon \varepsilon^{3/2} = \frac{2}{5} C \varepsilon_F^{5/2} \\ n &= \frac{N}{V} = C \int_0^{\varepsilon_F} d\varepsilon \varepsilon^{1/2} = \frac{2}{3} C \varepsilon_F^{3/2} \end{aligned} \right\} \frac{E_0}{V} = \frac{3}{5} \frac{N}{V} \varepsilon_F = \frac{3}{5} n \varepsilon_F$$

$$\frac{E_0}{N} = \frac{3}{5} \varepsilon_F \rightarrow \boxed{\text{o gás de Fermi tem energia considerável à } T = 0}$$

Pressão no estado fundamental

$$\frac{p}{k_B T} = \frac{g_s}{\lambda^3} f_{5/2}(z) \quad \frac{E}{V} = \frac{3}{2} k_B T \frac{g_s}{\lambda^3} f_{5/2}(z) \quad \rightarrow \quad p_0 = \frac{2}{3} \frac{E_0}{V}$$

$$p_0 = \frac{2}{3} n \varepsilon_F \rightarrow \boxed{\text{o gás de Fermi tem pressão considerável à } T = 0}$$



Limite degenerado ($T \approx 0$) para o gás ideal de Fermi

- A diferença com o caso totalmente degenerado ($T = 0$, ou estado fundamental) não é grande:

→ a diferença é da ordem de $k_B T$ em torno da energia de Fermi.

- O limite degenerado é razoável quando $k_B T \ll \varepsilon_F$:

$$\begin{aligned}k_B T &\ll \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{6\pi^2 n}{g_s} \right)^{2/3} \\ \frac{2\pi m k_B T}{h^2} &\ll \frac{1}{4\pi} \left(\frac{6\pi^2 n}{g_s} \right)^{2/3} \quad \left(\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}} \right) \\ \lambda^2 &\gg 4\pi \left(\frac{g_s}{6\pi^2 n} \right)^{2/3} \\ \boxed{\frac{n\lambda^3}{g_s} \gg \frac{4}{3\sqrt{\pi}}} &\rightarrow \begin{cases} \frac{n\lambda^3}{g_s} \gg 1 & \text{limite degenerado} \\ \frac{n\lambda^3}{g_s} \ll 1 & \text{limite clássico} \end{cases}\end{aligned}$$



Limite degenerado ($T \approx 0$) para o gás ideal de Fermi

- A diferença com o caso totalmente degenerado ($T = 0$, ou estado fundamental) não é grande:

→ a diferença é da ordem de $k_B T$ em torno da energia de Fermi.

- O limite degenerado é razoável quando $k_B T \ll \varepsilon_F$ ou, em termos da **Temperatura de Fermi**,

$$T \ll T_F \quad \boxed{T_F = \frac{\varepsilon_F}{k_B}} \quad \rightarrow \quad T_F = \frac{\hbar^2}{2mk_B} \left(\frac{6\pi^2 n}{g_s} \right)^{2/3}$$

- A temperatura de Fermi define a região a partir da qual o limite clássico é aceitável.

*Assim, para $T \gg T_F$ temos o limite clássico, enquanto que para $T \ll T_F$ o gás é dito **degenerado**, ou seja, devemos tratá-lo quanticamente.*

$$\text{Algumas temperaturas de Fermi : } \left\{ \begin{array}{ll} \text{cobre} & \rightarrow T_F \approx 80000 \text{ K} \\ \text{sódio} & \rightarrow T_F \approx 10000 \text{ K} \end{array} \right.$$



Limite degenerado ($T \approx 0$) para o gás ideal de Fermi

Para **temperatura baixas** o valor de $z = e^{\beta\mu}$ é **finito, mas grande** comparado com a unidade.

Como obter a função de Fermi $f_\nu(z)$ nesta região?

$$f_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} F_\nu(z) \quad \rightarrow \quad F_\nu(z) = \int_0^\infty \frac{x^{\nu-1}}{z^{-1}e^x + 1} dx$$

Valores grandes de z \rightarrow $\boxed{\xi = \ln z}$ $F_\nu(e^\xi) = \int_0^\infty \frac{x^{\nu-1}}{e^{-\xi}e^x + 1} dx = \int_0^\infty \frac{x^{\nu-1}}{e^{x-\xi} + 1} dx$

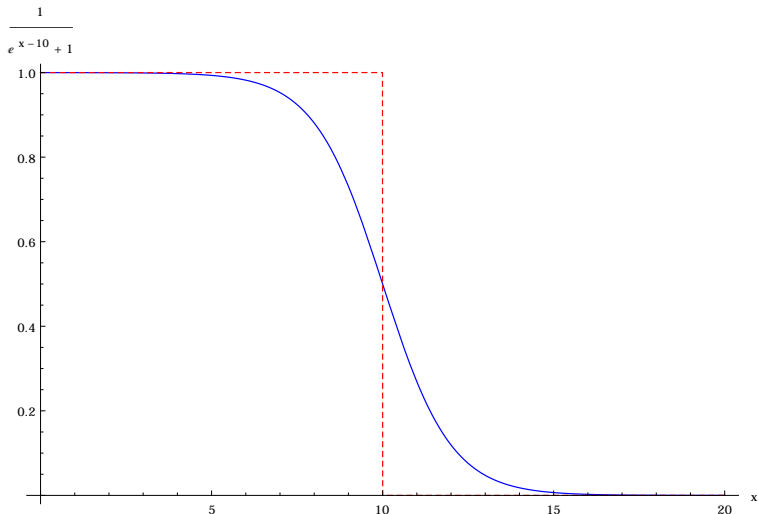
O comportamento da função $F_\nu(e^\xi)$ é determinado pelo fator

$$\frac{1}{e^{x-\xi} + 1} ,$$

pois o valor de ξ é grande.

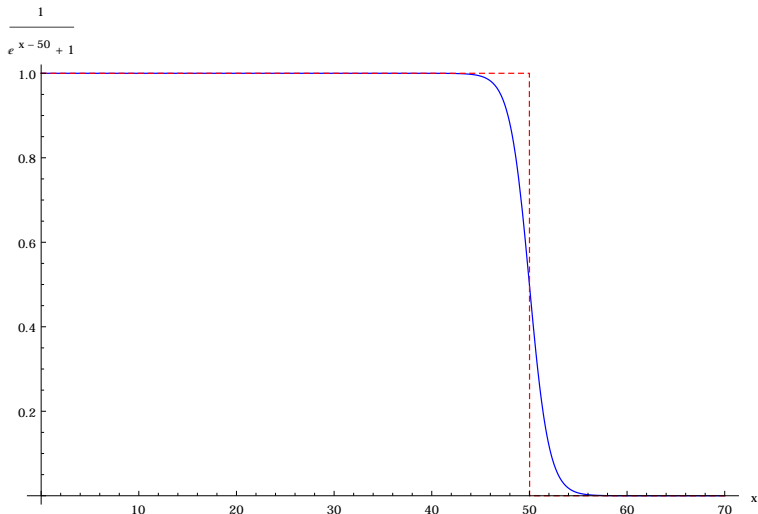


Limite degenerado ($T \approx 0$) para o gás ideal de Fermi

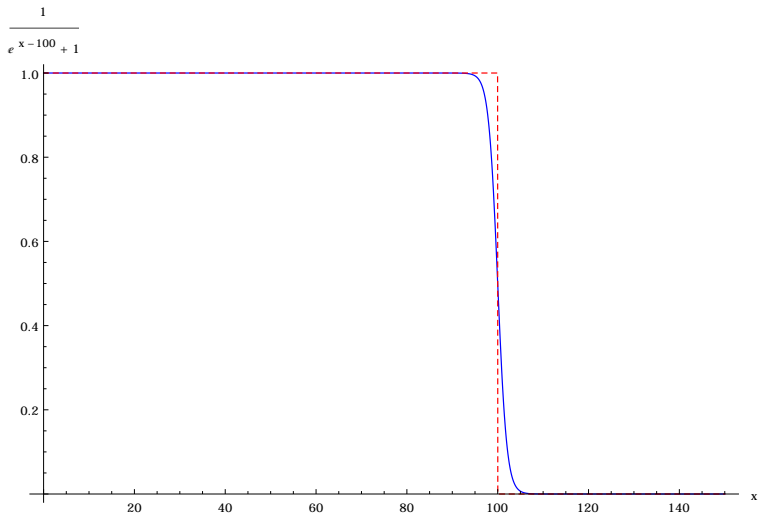


Gás ideal quântico

Limite degenerado ($T \approx 0$) para o gás ideal de Fermi



Limite degenerado ($T \approx 0$) para o gás ideal de Fermi



Limite degenerado ($T \approx 0$) para o gás ideal de Fermi

Para **temperatura baixas** o valor de $z = e^{\beta\mu}$ é **finito, mas grande** comparado com a unidade.

Como obter a função de Fermi $f_v(z)$ nesta região?

$$f_v(z) = \frac{1}{\Gamma(v)} F_v(z) \quad \rightarrow \quad F_v(z) = \int_0^\infty \frac{x^{v-1}}{z^{-1}e^x + 1} dx$$

Valores grandes de z \rightarrow $\boxed{\xi = \ln z}$ $F_v(e^\xi) = \int_0^\infty \frac{x^{v-1}}{e^{-\xi}e^x + 1} dx = \int_0^\infty \frac{x^{v-1}}{e^{x-\xi} + 1} dx$

Primeira aproximação:

Para valores grandes de ξ , a função $(e^{x-\xi} + 1)^{-1}$ se aproxima de uma **função degrau** (limite completamente degenerado):

$$F_v(e^\xi) \approx \int_0^\xi x^{v-1} dx = \frac{\xi^v}{v} \quad \rightarrow \quad f_v(z) \approx \frac{1}{\Gamma(v)} \frac{\xi^v}{v} = \frac{\xi^v}{\Gamma(v+1)}$$



Limite degenerado ($T \approx 0$) para o gás ideal de Fermi

Para **temperatura baixas** o valor de $z = e^{\beta\mu}$ é **finito**, **mas grande** comparado com a unidade.

Segunda aproximação:

$$\begin{aligned}F_\nu(e^\xi) &= \int_0^\infty \frac{x^{\nu-1}}{e^{x-\xi} + 1} dx = \int_0^\xi \frac{x^{\nu-1}}{e^{x-\xi} + 1} dx + \int_\xi^\infty \frac{x^{\nu-1}}{e^{x-\xi} + 1} dx \\&= \int_0^\xi x^{\nu-1} \left[1 - \frac{1}{e^{\xi-x} + 1} \right] dx + \int_\xi^\infty \frac{x^{\nu-1}}{e^{x-\xi} + 1} dx \\&= \int_0^\xi x^{\nu-1} dx - \int_0^\xi \frac{x^{\nu-1}}{e^{\xi-x} + 1} dx + \int_\xi^\infty \frac{x^{\nu-1}}{e^{x-\xi} + 1} dx \\&= \frac{\xi^\nu}{\nu} - \int_0^\xi \frac{x^{\nu-1}}{e^{\xi-x} + 1} dx + \int_\xi^\infty \frac{x^{\nu-1}}{e^{x-\xi} + 1} dx\end{aligned}$$

troca de variável: $\xi - x = \eta_1 \rightarrow dx = -d\eta_1$ $x - \xi = \eta_2 \rightarrow dx = d\eta_2$

$$F_\nu(e^\xi) = \frac{\xi^\nu}{\nu} + \int_\xi^0 \frac{(\xi - \eta_1)^{\nu-1}}{e^{\eta_1} + 1} d\eta_1 + \int_0^\infty \frac{(\xi + \eta_2)^{\nu-1}}{e^{\eta_2} + 1} d\eta_2$$



Limite degenerado ($T \approx 0$) para o gás ideal de Fermi

Para **temperatura baixas** o valor de $z = e^{\beta\mu}$ é **finito**, **mas grande** comparado com a unidade.

Segunda aproximação:

$$\begin{aligned}F_v(e^\xi) &= \int_0^\infty \frac{x^{v-1}}{e^{x-\xi} + 1} dx = \int_0^\xi \frac{x^{v-1}}{e^{x-\xi} + 1} dx + \int_\xi^\infty \frac{x^{v-1}}{e^{x-\xi} + 1} dx \\&= \int_0^\xi x^{v-1} \left[1 - \frac{1}{e^{\xi-x} + 1} \right] dx + \int_\xi^\infty \frac{x^{v-1}}{e^{x-\xi} + 1} dx \\&= \int_0^\xi x^{v-1} dx - \int_0^\xi \frac{x^{v-1}}{e^{\xi-x} + 1} dx + \int_\xi^\infty \frac{x^{v-1}}{e^{x-\xi} + 1} dx \\&= \frac{\xi^v}{v} - \int_0^\xi \frac{x^{v-1}}{e^{\xi-x} + 1} dx + \int_\xi^\infty \frac{x^{v-1}}{e^{x-\xi} + 1} dx\end{aligned}$$

troca de variável: $\xi - x = \eta_1 \rightarrow dx = -d\eta_1$ $x - \xi = \eta_2 \rightarrow dx = d\eta_2$

$$F_v(e^\xi) = \frac{\xi^v}{v} - \int_0^\xi \frac{(\xi - \eta_1)^{v-1}}{e^{\eta_1} + 1} d\eta_1 + \int_0^\infty \frac{(\xi + \eta_2)^{v-1}}{e^{\eta_2} + 1} d\eta_2$$



Limite degenerado ($T \approx 0$) para o gás ideal de Fermi

Para **temperatura baixas** o valor de $z = e^{\beta\mu}$ é **finito, mas grande** comparado com a unidade.

Segunda aproximação:

$$F_v(e^\xi) = \frac{\xi^v}{v} - \int_0^\xi \frac{(\xi - \eta_1)^{v-1}}{e^{\eta_1} + 1} d\eta_1 + \int_0^\infty \frac{(\xi + \eta_2)^{v-1}}{e^{\eta_2} + 1} d\eta_2$$

O limite superior da primeira integral pode ser **estendido para ∞** , já que o integrando cai rapidamente para zero.

$$\begin{aligned} F_v(e^\xi) &= \frac{\xi^v}{v} - \int_0^\infty \frac{(\xi - \eta_1)^{v-1}}{e^{\eta_1} + 1} d\eta_1 + \int_0^\infty \frac{(\xi + \eta_2)^{v-1}}{e^{\eta_2} + 1} d\eta_2 \\ &= \frac{\xi^v}{v} + \int_0^\infty \frac{(\xi + \eta)^{v-1} - (\xi - \eta)^{v-1}}{e^\eta + 1} d\eta \end{aligned}$$

Como $\eta \ll \xi$, podemos **expandir o numerador em potências** de η :

```
In[6]:= Series[(xi + eta)^(v - 1) - (xi - eta)^(v - 1), {eta, 0, 6}]
```

```
Out[6]= 2 xi^{-2+v} (-1 + v) eta + 1/3 xi^{-4+v} (-3 + v) (-2 + v) (-1 + v) eta^3 +
```

$$\frac{1}{60} \xi^{-6+v} (-5 + v) (-4 + v) (-3 + v) (-2 + v) (-1 + v) \eta^5 + O[\eta]^7$$



Limite degenerado ($T \approx 0$) para o gás ideal de Fermi

Para **temperatura baixas** o valor de $z = e^{\beta\mu}$ é **finito**, **mas grande** comparado com a unidade.

Segunda aproximação:

$$F_\nu(e^\xi) = \frac{\xi^\nu}{\nu} - \int_0^\xi \frac{(\xi - \eta_1)^{\nu-1}}{e^{\eta_1} + 1} d\eta_1 + \int_0^\infty \frac{(\xi + \eta_2)^{\nu-1}}{e^{\eta_2} + 1} d\eta_2$$

O limite superior da primeira integral pode ser estendido para ∞ , já que o integrando cai rapidamente para zero.

$$\begin{aligned} F_\nu(e^\xi) &= \frac{\xi^\nu}{\nu} - \int_0^\infty \frac{(\xi - \eta_1)^{\nu-1}}{e^{\eta_1} + 1} d\eta_1 + \int_0^\infty \frac{(\xi + \eta_2)^{\nu-1}}{e^{\eta_2} + 1} d\eta_2 \\ &= \frac{\xi^\nu}{\nu} + \int_0^\infty \frac{(\xi + \eta)^{\nu-1} - (\xi - \eta)^{\nu-1}}{e^\eta + 1} d\eta \end{aligned}$$

Como $\eta \ll \xi$, podemos **expandir o numerador em potências** de η :

$$\begin{aligned} (\xi + \eta)^{\nu-1} - (\xi - \eta)^{\nu-1} &= 2\xi^{\nu-2}(\nu-1)\eta + \frac{1}{3}\xi^{\nu-4}(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)\eta^3 \\ &\quad + \frac{1}{60}\xi^{\nu-6}(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)(\nu-4)(\nu-5)\eta^5 + O(\eta^7) \end{aligned}$$



Limite degenerado ($T \approx 0$) para o gás ideal de Fermi

Para **temperatura baixas** o valor de $z = e^{\beta\mu}$ **é finito, mas grande** comparado com a unidade.

Segunda aproximação:

$$F_v(e^\xi) = \frac{\xi^v}{v} + \int_0^\infty \frac{(\xi + \eta)^{v-1} - (\xi - \eta)^{v-1}}{e^\eta + 1} d\eta$$

Como $\eta \ll \xi$, podemos **expandir o numerador em potências** de η :

$$\begin{aligned}(\xi + \eta)^{v-1} - (\xi - \eta)^{v-1} &= 2\xi^{v-2}(v-1)\eta + \frac{1}{3}\xi^{v-4}(v-1)(v-2)(v-3)\eta^3 \\ &\quad + \frac{1}{60}\xi^{v-6}(v-1)(v-2)(v-3)(v-4)(v-5)\eta^5 + O(\eta^7) \\ &= 2 \sum_{j=1,3,5,\dots} \frac{(v-1)!}{j!(v-1-j)!} \xi^{v-1-j} \eta^j\end{aligned}$$

$$F_v(e^\xi) = \frac{\xi^v}{v} + 2 \sum_{j=1,3,5,\dots} \frac{(v-1)!}{j!(v-1-j)!} \xi^{v-1-j} \int_0^\infty \frac{\eta^j}{e^\eta + 1} d\eta$$



Limite degenerado ($T \approx 0$) para o gás ideal de Fermi

Para **temperatura baixas** o valor de $z = e^{\beta\mu}$ é **finito, mas grande** comparado com a unidade.

Segunda aproximação:

$$F_\nu(e^\xi) = \frac{\xi^\nu}{\nu} + 2 \sum_{j=1,3,5,\dots} \frac{(\nu-1)!}{j!(\nu-1-j)!} \xi^{\nu-1-j} \int_0^\infty \frac{\eta^j}{e^\eta + 1} d\eta$$

Como $\int_0^\infty \frac{\eta^j}{e^\eta + 1} d\eta = \left(1 - \frac{1}{2^j}\right) \Gamma(j+1) \zeta(j+1)$ $\left\{ \begin{array}{l} \zeta(j+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{j+1}} \quad (\text{função zeta de Riemann}) \\ \Gamma(j+1) = j! \end{array} \right.$

$$F_\nu(e^\xi) = \frac{\xi^\nu}{\nu} + 2\xi^\nu \sum_{j=1,3,5,\dots} \frac{(\nu-1)!}{(\nu-1-j)!} \xi^{-(j+1)} \left(1 - \frac{1}{2^j}\right) \zeta(j+1)$$

Assim,

$$\begin{aligned} f_\nu(e^\xi) &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} F_\nu(e^\xi) = \frac{\xi^\nu}{\nu \Gamma(\nu)} + \frac{2}{\Gamma(\nu)} \xi^\nu \sum_{j=1,3,5,\dots} \frac{(\nu-1)!}{(\nu-1-j)!} \xi^{-(j+1)} \left(1 - \frac{1}{2^j}\right) \zeta(j+1) \\ &= \frac{\xi^\nu}{\Gamma(\nu+1)} \left[1 + 2\nu \sum_{j=1,3,5,\dots} \frac{(\nu-1)!}{(\nu-1-j)!} \left(1 - \frac{1}{2^j}\right) \frac{\zeta(j+1)}{\xi^{j+1}} \right] \end{aligned}$$



Limite degenerado ($T \approx 0$) para o gás ideal de Fermi

Para **temperatura baixas** o valor de $z = e^{\beta\mu}$ **é finito, mas grande** comparado com a unidade.

Segunda aproximação: expansão de Sommerfeld (1928)

$$f_\nu(e^\xi) = \frac{\xi^\nu}{\Gamma(\nu+1)} \left[1 + 2\nu \sum_{j=1,3,5,\dots} \frac{(\nu-1)!}{(\nu-1-j)!} \left(1 - \frac{1}{2^j}\right) \frac{\zeta(j+1)}{\xi^{j+1}} \right]$$

Primeiros dois termos da expansão:

$$f_\nu(z) \approx \frac{\xi^\nu}{\Gamma(\nu+1)} \left[1 + 2\nu(\nu-1) \left(1 - \frac{1}{2}\right) \frac{\zeta(2)}{\xi^2} + 2\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3) \left(1 - \frac{1}{2^3}\right) \frac{\zeta(4)}{\xi^4} + \dots \right]$$

$$\text{Função zeta de Riemann} \quad \rightarrow \quad \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$$

$$f_\nu(z) \approx \frac{\xi^\nu}{\Gamma(\nu+1)} \left[1 + \nu(\nu-1) \frac{\pi^2}{6} \frac{1}{\xi^2} + \nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3) \frac{7\pi^4}{360} \frac{1}{\xi^4} + \dots \right]$$



Limite degenerado ($T \approx 0$) para o gás ideal de Fermi

Para **temperatura baixas** o valor de $z = e^{\beta\mu}$ **é finito, mas grande** comparado com a unidade.

$$f_\nu(z) \approx \frac{\xi^\nu}{\Gamma(\nu+1)} \left[1 + \nu(\nu-1) \frac{\pi^2}{6} \frac{1}{\xi^2} + \nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3) \frac{7\pi^4}{360} \frac{1}{\xi^4} + \dots \right]$$

Como $\xi = \ln z$,

$$f_\nu(z) \approx \frac{(\ln z)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} \left[1 + \nu(\nu-1) \frac{\pi^2}{6} (\ln z)^{-2} + \nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3) \frac{7\pi^4}{360} (\ln z)^{-4} + \dots \right]$$

$$f_{1/2}(z) \approx \frac{2}{\pi^{1/2}} (\ln z)^{1/2} \left[1 - \frac{\pi^2}{24} (\ln z)^{-2} + \dots \right]$$

$$f_{3/2}(z) \approx \frac{4}{3\pi^{1/2}} (\ln z)^{3/2} \left[1 + \frac{\pi^2}{8} (\ln z)^{-2} + \dots \right]$$

$$f_{5/2}(z) \approx \frac{8}{15\pi^{1/2}} (\ln z)^{5/2} \left[1 + \frac{5\pi^2}{8} (\ln z)^{-2} + \dots \right]$$



Limite degenerado ($T \approx 0$) para o gás ideal de Fermi

Potencial químico

$$\begin{aligned}\frac{N}{V} &= \frac{g_s}{\lambda^3} f_{3/2}(z) && \left(\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}} \right) \\ &= \frac{4\pi g_s}{3} \left(\frac{2m}{h^2} \right)^{3/2} (k_B T \ln z)^{3/2} \left[1 + \frac{\pi^2}{8} (\ln z)^{-2} + \dots \right] \\ \frac{3N}{4\pi g_s V} \left(\frac{h^2}{2m} \right)^{3/2} &= (k_B T \ln z)^{3/2} \left[1 + \frac{\pi^2}{8} (\ln z)^{-2} + \dots \right]\end{aligned}$$

como $\varepsilon_F = (3N/4\pi g_s V)^{2/3} h^2/2m$,

$$\begin{aligned}\varepsilon_F^{3/2} &= (k_B T \ln z)^{3/2} \left[1 + \frac{\pi^2}{8} (\ln z)^{-2} + \dots \right] \\ k_B T \ln z &= \varepsilon_F \frac{1}{\left[1 + \frac{\pi^2}{8} (\ln z)^{-2} + \dots \right]^{2/3}}\end{aligned}$$

Como $(\ln z)$ é grande, podemos usar uma expansão do tipo $\frac{1}{(1+x)^{2/3}} \approx 1 - \frac{2}{3}x + O(x^2)$



Limite degenerado ($T \approx 0$) para o gás ideal de Fermi

Potencial químico

$$k_B T \ln z = \varepsilon_F \frac{1}{\left[1 + \frac{\pi^2}{8} (\ln z)^{-2} + \dots\right]^{2/3}} \approx \varepsilon_F \left[1 - \frac{\pi^2}{12} (\ln z)^{-2} + \dots\right]$$

Mas $z = e^{\beta\mu}$, tal que $\ln z = \beta\mu$. Assim,

$$\mu \approx \varepsilon_F \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{k_B T}{\varepsilon_F}\right)^2 + \dots\right]$$

onde usamos a aproximação $\ln z = \beta\varepsilon_F$ no termo em $(\ln z)^{-2}$, uma vez que este termo é a correção de temperatura finita ao limite $T = 0$.

Nota que o potencial químico do gás de Fermi para $T \neq 0$ é menor do que o análogo à $T = 0$ (energia de Fermi).



Limite degenerado ($T \approx 0$) para o gás ideal de Fermi

Energia

$$\begin{aligned}\frac{U}{N} &= \frac{3}{2} k_B T \frac{f_{5/2}(z)}{f_{3/2}(z)} \\ &= \frac{3}{2} k_B T \frac{\frac{8}{15\pi^{1/2}} (\ln z)^{5/2} \left[1 + \frac{5\pi^2}{8} (\ln z)^{-2} + \dots\right]}{\frac{4}{3\pi^{1/2}} (\ln z)^{3/2} \left[1 + \frac{\pi^2}{8} (\ln z)^{-2} + \dots\right]} = \frac{3}{5} (k_B T \ln z) \frac{\left[1 + \frac{5\pi^2}{8} (\ln z)^{-2} + \dots\right]}{\left[1 + \frac{\pi^2}{8} (\ln z)^{-2} + \dots\right]}\end{aligned}$$

Como $(\ln z)$ é grande, usamos a expansão $1/(1+x) \approx 1-x + \mathcal{O}(x^2)$,

$$\begin{aligned}\frac{U}{N} &= \frac{3}{5} (k_B T \ln z) \left[1 + \frac{5\pi^2}{8} (\ln z)^{-2} + \dots\right] \left[1 - \frac{\pi^2}{8} (\ln z)^{-2} + \dots\right] \\ &= \frac{3}{5} (k_B T \ln z) \left[1 + \frac{\pi^2}{2} (\ln z)^{-2} + \dots\right] \quad \text{mas} \quad k_B T \ln z \approx \varepsilon_F \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{k_B T}{\varepsilon_F}\right)^2 + \dots\right] \\ &= \frac{3}{5} \varepsilon_F \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{k_B T}{\varepsilon_F}\right)^2 + \dots\right] \left[1 + \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{k_B T}{\varepsilon_F}\right)^2 + \dots\right] = \frac{3}{5} \varepsilon_F \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{k_B T}{\varepsilon_F}\right)^2 + \dots\right]\end{aligned}$$



Gás ideal quântico

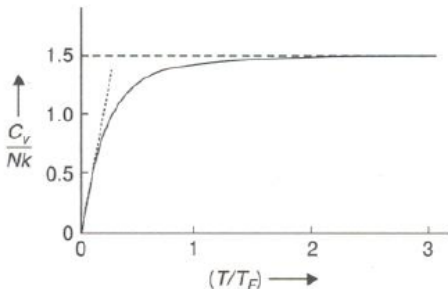
Limite degenerado ($T \approx 0$) para o gás ideal de Fermi

Pressão

$$p = \frac{2}{3} \frac{U}{V} = \frac{2}{5} \frac{N}{V} \varepsilon_F \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{k_B T}{\varepsilon_F} \right)^2 + \dots \right]$$

Calor Específico

$$\frac{C_V}{Nk_B} = \frac{1}{Nk_B} \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_{V,N} = \frac{\pi^2}{2} \frac{k_B T}{\varepsilon_F} + \dots$$



- A dependência linear com T se deve aos elétrons livres.
- As vibrações da rede cristalina não foram incluídas, já que para $T \approx 0$ a rede não deve vibrar.

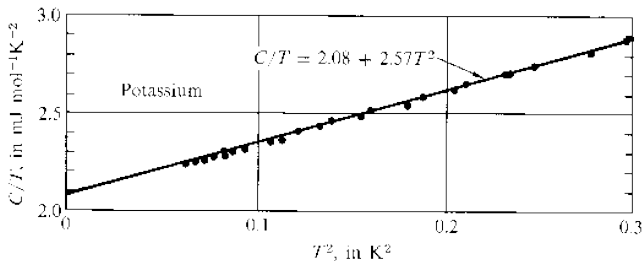
→ A **vibração da rede** é incluída quando consideramos a sua quantização, através da contribuição dos **fônons**.



Limite degenerado ($T \approx 0$) para o gás ideal de Fermi

Calor específico do **Potássio** a baixas temperaturas

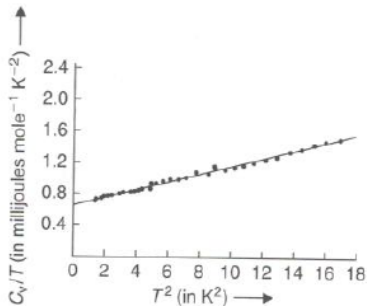
$$c_V = c_V^{(\text{elétrons})} + c_V^{(\text{rede})} = \gamma T + AT^3$$



Limite degenerado ($T \approx 0$) para o gás ideal de Fermi

Calor específico do **Cobre** a baixas temperaturas

$$c_V = c_V^{(\text{elétrons})} + c_V^{(\text{rede})} = \gamma T + AT^3$$



Corak *et al.*, 1955



Magnetismo

Propriedades magnéticas dos materiais

As propriedades magnéticas de uma substância são determinadas pelos elétrons da substância.

- **materiais paramagnéticos** : o paramagnetismo é gerado pelo acoplamento entre os spins dos elétrons com o campo externo aplicado na substância. São **atraídos ligeiramente** pelos ímãs. **Exemplos:** oxigênio (O), paládio (Pd)
- **materiais diamagnéticos** : o diamagnetismo é gerado pela interação entre o campo magnético externo com o movimento orbital dos elétrons. São **repelidos** pelos ímãs. **Exemplos:** antimônio (Sb), bismuto (Bi)
- **materiais ferromagnéticos** : são aquelas cujos ímãs elementares se orientam facilmente quando submetidos a um campo magnético externo. **Exemplos:** ferro (Fe), níquel (Ni)



Gás ideal quântico – Paramagnetismo de Pauli

Gás de elétrons livres não-relativísticos na presença de um campo externo H

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{2m} \left(\vec{p}_i + \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2 - \mu_B \vec{\sigma} \cdot \vec{H} \right] \quad \mu_B = \frac{q\hbar}{2m} \quad \text{magneton de Bohr (SI)}$$

tomando um campo na direção z , para 1 elétron teremos

$$\text{Espectro de energia} \quad \varepsilon_{\vec{k},\sigma} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu_B H \sigma \quad (\sigma = \pm 1)$$

Grande função de partição de Fermi-Dirac

$$\ln \Xi = \sum_j \ln(1 + ze^{-\beta \varepsilon_j}) \quad \left(\sum_j \rightarrow \sum_{\vec{k},\sigma} \right)$$

$$\ln \Xi = \sum_{\vec{k}} \sum_{\sigma} \ln \left(1 + ze^{-\beta \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \beta \mu_B H \sigma \right)} \right) = \sum_{\vec{k}} \ln \left(1 + ze^{-\beta \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \beta \mu_B H \right)} \right) + \sum_{\vec{k}} \ln \left(1 + ze^{-\beta \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \beta \mu_B H \right)} \right)$$



Gás ideal quântico – Paramagnetismo de Pauli

$$\ln \Xi = \ln \Xi_+ + \ln \Xi_- \quad \rightarrow \quad \ln \Xi_{\pm} = \sum_{\vec{k}} \ln \left(1 + z e^{-\beta \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \pm \beta \mu_B H} \right) \quad \left(\sum_{\vec{k}} \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k \right)$$

$$\ln \Xi_{\pm} = \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k \ln \left(1 + z e^{-\beta \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \pm \beta \mu_B H} \right) = \frac{V}{(2\pi)^3} 4\pi \int_0^{\infty} k^2 dk \ln \left(1 + z e^{-\beta \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \pm \beta \mu_B H} \right)$$

Em termos da energia $\varepsilon = \hbar^2 k^2 / 2m$,

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} \varepsilon \quad dk = \frac{1}{2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{1/2} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^{1/2}}$$

$$\ln \Xi_{\pm} = \frac{V}{(2\pi)^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} \varepsilon^{1/2} \ln \left(1 + z e^{-\beta \varepsilon \pm \beta \mu_B H} \right) d\varepsilon$$



Gás ideal quântico – Paramagnetismo de Pauli

$$\ln \Xi = \ln \Xi_+ + \ln \Xi_- \quad \ln \Xi_{\pm} = \frac{V}{(2\pi)^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} \varepsilon^{1/2} \ln(1 + z e^{-\beta\varepsilon \pm \beta\mu_B H}) d\varepsilon$$

Número médio de elétrons $\rightarrow N = z \frac{\partial \ln \Xi}{\partial z}$

$$\begin{aligned} N &= z \frac{V}{(2\pi)^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} \varepsilon^{1/2} \frac{e^{-\beta\varepsilon + \beta\mu_B H}}{1 + z e^{-\beta\varepsilon + \beta\mu_B H}} d\varepsilon + z \frac{V}{(2\pi)^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} \varepsilon^{1/2} \frac{e^{-\beta\varepsilon - \beta\mu_B H}}{1 + z e^{-\beta\varepsilon - \beta\mu_B H}} d\varepsilon \\ &= \frac{V}{(2\pi)^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^{1/2}}{z^{-1} e^{\beta(\varepsilon - \mu_B H)} + 1} d\varepsilon + \frac{V}{(2\pi)^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^{1/2}}{z^{-1} e^{\beta(\varepsilon + \mu_B H)} + 1} d\varepsilon \end{aligned}$$

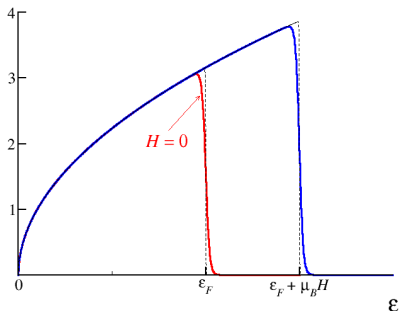
$$N = \langle N_+ \rangle + \langle N_- \rangle \quad \left(N = \sum_j \langle n_j \rangle = \sum_j \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_j - \mu)} + 1} \right)$$

$$\langle N_{\pm} \rangle = \frac{V}{(2\pi)^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^{1/2}}{z^{-1} e^{\beta(\varepsilon \mp \mu_B H)} + 1} d\varepsilon$$



Gás ideal quântico – Paramagnetismo de Pauli

- Limite de baixas temperaturas (estado fundamental)



$$\langle N_+ \rangle = \frac{V}{(2\pi)^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{1/2}}{z^{-1} e^{\beta(\epsilon - \mu_B H)} + 1} d\epsilon$$

$$\text{quando } \beta \rightarrow \infty \quad \frac{\epsilon^{1/2}}{z^{-1} e^{\beta(\epsilon - \mu_B H)} + 1} \approx \epsilon^{1/2}$$

tal que

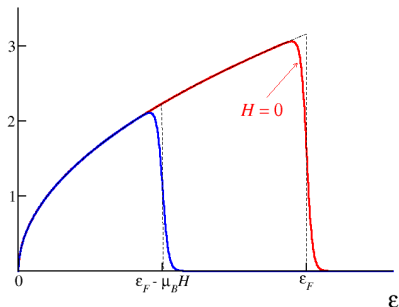
$$\langle N_+ \rangle = \frac{V}{(2\pi)^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^{\epsilon_F + \mu_B H} \epsilon^{1/2} d\epsilon$$

$$\langle N_+ \rangle = \frac{V}{(2\pi)^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{2}{3} (\epsilon_F + \mu_B H)^{3/2}$$



Gás ideal quântico – Paramagnetismo de Pauli

- Limite de baixas temperaturas (estado fundamental)



$$\langle N_- \rangle = \frac{V}{(2\pi)^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{1/2}}{z^{-1} e^{\beta(\epsilon + \mu_B H)} + 1} d\epsilon$$

$$\text{quando } \beta \rightarrow \infty \quad \frac{\epsilon^{1/2}}{z^{-1} e^{\beta(\epsilon + \mu_B H)} + 1} \approx \epsilon^{1/2}$$

tal que

$$\langle N_- \rangle = \frac{V}{(2\pi)^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^{\epsilon_F - \mu_B H} \epsilon^{1/2} d\epsilon$$

$$\langle N_- \rangle = \frac{V}{(2\pi)^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{2}{3} (\epsilon_F - \mu_B H)^{3/2}$$



Gás ideal quântico – Paramagnetismo de Pauli

- **Limite de baixas temperaturas (estado fundamental)**

Magnetização do sistema

$$M = \mu_B [\langle N_+ \rangle - \langle N_- \rangle] = \mu_B \frac{2}{3} \frac{V}{(2\pi)^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} [(\varepsilon_F + \mu_B H)^{3/2} - (\varepsilon_F - \mu_B H)^{3/2}]$$

$$M = \mu_B \frac{2}{3} \frac{V}{(2\pi)^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \varepsilon_F^{3/2} \left[\left(1 + \frac{\mu_B H}{\varepsilon_F} \right)^{3/2} - \left(1 - \frac{\mu_B H}{\varepsilon_F} \right)^{3/2} \right]$$

Para **campos fracos** ($\mu_B H \ll \varepsilon_F$) $(1 \pm x)^{3/2} \approx 1 \pm \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \dots$

$$M = \mu_B \frac{2}{3} \frac{V}{(2\pi)^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \varepsilon_F^{3/2} 3 \frac{\mu_B H}{\varepsilon_F} + O \left[\left(\frac{\mu_B H}{\varepsilon_F} \right)^3 \right]$$

$$M = 2 \frac{V}{(2\pi)^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \mu_B \varepsilon_F^{3/2} \frac{\mu_B H}{\varepsilon_F}$$



Gás ideal quântico – Paramagnetismo de Pauli

- **Limite de baixas temperaturas (estado fundamental)**

Magnetização do sistema

$$N = \langle N_+ \rangle + \langle N_- \rangle = \frac{2}{3} \frac{V}{(2\pi)^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \left[(\varepsilon_F + \mu_B H)^{3/2} + (\varepsilon_F - \mu_B H)^{3/2} \right]$$

Para **campos fracos** ($\mu_B H \ll \varepsilon_F$)

$$N = \frac{4}{3} \frac{V}{(2\pi)^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \varepsilon_F^{3/2} \quad \Rightarrow \quad M = \frac{3}{2} N \mu_B \frac{\mu_B H}{\varepsilon_F}$$

Susceptibilidade magnética a campo nulo

$$\chi_0 = \left(\frac{\partial M}{\partial H} \right)_{T=0, V, N, H=0} = \frac{3}{2} N \frac{\mu_B^2}{\varepsilon_F} \quad \Rightarrow \quad \text{Paramagnetismo de Pauli (1927)}$$

Os materiais paramagnéticos apresentam uma resposta ($\chi_0 > 0$) não nula para campo nulo a baixas temperaturas.



Gás ideal quântico – Paramagnetismo de Pauli

- Limite degenerado ($T \ll T_F$)

Magnetização do sistema

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln \Xi}{\partial H} & \ln \Xi_{\pm} &= \frac{V}{(2\pi)^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} \varepsilon^{1/2} \ln(1 + z e^{-\beta \varepsilon \pm \beta \mu_B H}) d\varepsilon \\ &= \frac{1}{\beta} \frac{V}{(2\pi)^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^{1/2} \beta \mu_B z e^{-\beta \varepsilon + \beta \mu_B H}}{z e^{-\beta \varepsilon + \beta \mu_B H} + 1} d\varepsilon - \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^{1/2} \beta \mu_B z e^{-\beta \varepsilon - \beta \mu_B H}}{z e^{-\beta \varepsilon - \beta \mu_B H} + 1} d\varepsilon \right\} \\ &= \mu_B \frac{V}{(2\pi)^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^{1/2}}{z^{-1} e^{\beta \varepsilon - \beta \mu_B H} + 1} d\varepsilon - \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^{1/2}}{z^{-1} e^{\beta \varepsilon + \beta \mu_B H} + 1} d\varepsilon \right\} \end{aligned}$$

Definindo a função de Fermi

$$F(\varepsilon) = \frac{1}{z^{-1} e^{\beta \varepsilon} + 1} \quad \left(f = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} + 1} \right)$$

$$M = \mu_B \frac{V}{(2\pi)^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \left\{ \int_0^{\infty} \varepsilon^{1/2} F(\varepsilon - \mu_B H) d\varepsilon - \int_0^{\infty} \varepsilon^{1/2} F(\varepsilon + \mu_B H) d\varepsilon \right\}$$



Gás ideal quântico – Paramagnetismo de Pauli

- Limite degenerado ($T \ll T_F$)

Magnetização do sistema

$$M = \mu_B \frac{V}{(2\pi)^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \left\{ \int_0^\infty \varepsilon^{1/2} [F(\varepsilon - \mu_B H) - F(\varepsilon + \mu_B H)] d\varepsilon \right\}$$

Para campos fracos ($\mu_B H \ll \varepsilon_F$) $\rightarrow F(\varepsilon - \mu_B H) - F(\varepsilon + \mu_B H) \approx -2\mu_B H F'(\varepsilon)$

$$M = -2\mu_B^2 H \frac{V}{(2\pi)^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty \varepsilon^{1/2} F'(\varepsilon) d\varepsilon$$

$$M = -2\mu_B^2 H \frac{V}{(2\pi)^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \left\{ \underbrace{\varepsilon^{1/2} F(\varepsilon)}_{=0} \Big|_0^\infty - \frac{1}{2} \int_0^\infty \varepsilon^{-1/2} F(\varepsilon) d\varepsilon \right\}$$

$$M = \mu_B^2 H \frac{V}{(2\pi)^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty \varepsilon^{-1/2} F(\varepsilon) d\varepsilon$$



Gás ideal quântico – Paramagnetismo de Pauli

- **Limite degenerado** ($T \ll T_F$)

Número médio de elétrons

$$\begin{aligned} N &= \langle N_+ \rangle + \langle N_- \rangle \\ &= \frac{V}{(2\pi)^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty \varepsilon^{1/2} [F(\varepsilon - \mu_B H) - F(\varepsilon + \mu_B H)] d\varepsilon \end{aligned}$$

Para **campos fracos** ($\mu_B H \ll \varepsilon_F$) \rightarrow $F(\varepsilon - \mu_B H) + F(\varepsilon + \mu_B H) \approx 2F(\varepsilon)$

$$N = 2 \frac{V}{(2\pi)^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty \varepsilon^{1/2} F(\varepsilon) d\varepsilon$$

$$M = \mu_B^2 H \frac{V}{(2\pi)^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty \varepsilon^{-1/2} F(\varepsilon) d\varepsilon$$

$$\int_0^\infty F(\varepsilon) \varphi(\varepsilon) d\varepsilon = \int_0^\mu \varphi(\varepsilon) d\varepsilon + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 \left. \frac{d\varphi}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\mu} + \dots \quad (\text{expansão de Sommerfeld})$$



Gás ideal quântico – Paramagnetismo de Pauli

- Limite degenerado ($T \ll T_F$)

Número médio de elétrons

$$N = \frac{4}{3} \frac{V}{(2\pi)^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \mu^{3/2} \left[1 + \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{k_B T}{\mu}\right)^2 + \dots\right]$$

Magnetização do sistema

$$M = 2 \mu_B^2 H \frac{V}{(2\pi)^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \mu^{1/2} \left[1 - \frac{\pi^2}{24} \left(\frac{k_B T}{\mu}\right)^2 + \dots\right]$$

Potencial químico do sistema

$$\mu = \varepsilon_F \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{k_B T}{\varepsilon_F}\right)^2 + \dots\right]$$



Gás ideal quântico – Paramagnetismo de Pauli

- Limite degenerado ($T \ll T_F$)

Magnetização do sistema

$$M = \frac{3}{2} N \frac{\mu_B^2 H}{\varepsilon_F} \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{k_B T}{\varepsilon_F} \right)^2 + \dots \right]$$

Susceptibilidade magnética do sistema

$$\chi_0 = \left. \frac{\partial M}{\partial H} \right|_{H=0} = \frac{3}{2} N \frac{\mu_B^2}{\varepsilon_F} \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{k_B T}{\varepsilon_F} \right)^2 + \dots \right]$$

Em termos da temperatura de Fermi $T_F = \varepsilon_F/k_B$

$$\chi_0 = \frac{3}{2} N \frac{\mu_B^2}{\varepsilon_F} \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{T}{T_F} \right)^2 + \dots \right]$$



- Limite clássico ($z \ll 1$)

$$F(\varepsilon) = \frac{1}{z^{-1}e^{\beta\varepsilon} + 1} \rightarrow ze^{-\beta\varepsilon}$$

Magnetização do sistema

$$M = N\mu_B \tanh\left(\frac{\mu_B H}{k_B T}\right)$$

Susceptibilidade magnética do sistema

$$\chi_0 = \left. \frac{\partial M}{\partial H} \right|_{H=0} = \frac{N\mu_B^2}{k_B T}$$

que é a **lei de Curie** para materiais paramagnéticos.

