# Capítulo 1

# Introdução ao cálculo de probabilidades

As leis da mecânica nos dizem que a história de um determinado sistema físico é governada por equações determinísticas, de tal forma que para um conjunto de condições iniciais, repetidas realizações produzem os mesmos resultados. Todavia, existe uma classe de experimentos em que os resultados não são essencialmente os mesmos, ainda que as condições de realização se mantenham praticamente as mesmas. Tais experimentos são chamados de **aleatórios**. Os exemplos são muitos, desde a mais simples brincadeira de "cara" e "coroa" com uma moeda, até o problema de um caminhante aleatório em 3 dimensões. Antes de iniciarmos o estudo dos métodos estatísticos em sistemas termodinâmicos, é interessante introduzirmos alguns conceitos básicos de teoria de probabilidade. Tais conceitos serão essenciais no estudo da formulação de Gibbs da mecânica estatística.

## Espaços amostrais

Um conjunto $\Omega$ que consiste de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório é chamado de **espaço amostral**; cada resultado é um **ponto amostral**.

**Exemplo**: Na jogada de dois dados, o espaço amostral é representado por um conjunto de 36 elementos:

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{cccccc} (1,1) & (2,1) & (3,1) & (4,1) & (5,1) & (6,1) \\ (1,2) & (2,2) & (3,2) & (4,2) & (5,2) & (6,2) \\ (1,3) & (2,3) & (3,3) & (4,3) & (5,3) & (6,3) \\ (1,4) & (2,4) & (3,4) & (4,4) & (5,4) & (6,4) \\ (1,5) & (2,5) & (3,5) & (4,5) & (5,5) & (6,5) \\ (1,6) & (2,6) & (3,6) & (4,6) & (5,6) & (6,6) \end{array} \right\} .$$

## Eventos

Um evento é um subconjunto $A$ do espaço amostral $\Omega$, isto é, é um conjunto de resultados possíves. No exemplo do lançamento dos 2 dados, cada um dos 36 elementos de $\Omega$ é dito um evento possível.

Como os eventos são conjuntos, podemos usar a álgebra de conjuntos. Assim, se $A$ e $B$ são eventos quaisquer, então:

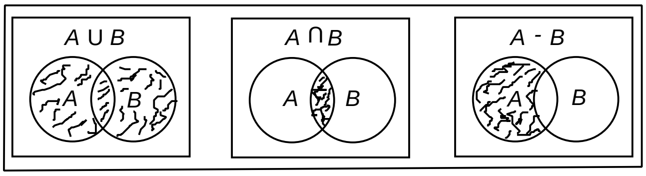
1) $A \cup B$ ($A$ **união** com $B$) é o evento "$A$, ou $B$, ou ambos".

2) $A \cap B$ ($A$ **intersecção** com $B$) é o evento "$A$ e $B$".

3) $A'$ é o evento "não $-A$".

4) $A - B$ é o evento "$A$ mas não $B$".

Podemos representar as relações acima graficamente como abaixo.




Se dois eventos $A$ e $B$ são ditos **mutuamente excludentes**, significa que os eventos <u>não</u> podem ocorrer simultaneamente. Neste caso, $A$ e $B$ são **disjuntos**, ou $A \cap B = \emptyset$.

## 1.1 O conceito de probabilidade

Em qualquer experimento aleatório, há sempre uma incerteza quanto à ocorrência, ou não, de um determinado evento. A fim de obtermos uma medida de chance, ou probabilidade, com que podemos esperar a ocorrência de determinado evento, é conveniente atribuírmos um número entre 0 e 1. Se temos a certeza de que o evento ocorrerá, dizemos que sua probabilidade é 100 %, ou 1; se estamos certos de que ele não ocorrerá, dizemos que sua probabilidade é zero. Qualquer valor intermediário dá uma idéia das chances de ocorrência deste evento.

Existem dois processos para se obter a estimativa da probabilidade de um evento:

### Processo clássico ou "a priori"

Se um evento pode ocorrer de $h$ maneiras diferentes, em um total de $n$ maneiras possíveis (todas igualmente prováveis), então a probabilidade do evento é $h/n$.

**Exemplo**: suponha que desejamos determinar a probabilidade do aparecimento de 1 "cara" em uma jogada dde uma moeda. Como há 2 resultados igualmente prováveis (supomos que a moeda não é "viciada"), a saber, "cara" e "coroa", e como só há uma maneira de aparecer "cara", dizemos que a probabilidade do evento "cara" na jjogada de uma moeda é $1/2$.

**Observac cão**: Neste exemplo da moeda, a probabilidade será tanto mais próxima de 0.5 quanto maior for o número de vezes que a moeda for lançada.

### Processo da freqüência, ou "a posteriori"

Se após $n$ repetições de um experimento ($n$ suficientemente grande), se observam $h$ ocorrências de determinado evento, então a probabilidade do evento é $h/n$. Esta probabilidade é chamada também de **probabilidade empírica**.

**Exemplo**: se jogarmos uma moeda 1000 vezes e aparece "cara" 532 vezes, estimamos a prossibilidade de "cara" em $532/1000 = 0,532$.

## 1.2 A formulação axiomática da probabilidade

Nota que tanto o processo clássico, como o processo da freqüência, apresentam sérias dificuldades com relação à precisão dos termos "igualmente provável" e "suficientemente grande". Assim, usamos uma definição axiomática da probabilidade.

### 1.2.1 Os axiomas da probabilidade

Suponha um espaço amostral $\Omega$. Para um dado evento $A$, a probabilidade do evento $A$ é dada por $P(A)$, desde que sejam satisfeitos os seguintes axiomas:

**Axioma 1:** Para todo evento mensurável,

$$P(A) \geqslant 0 \ ,$$

ou toda probabilidade é sempre positiva.

**Axioma 2:** Para todo evento certo (que sempre ocorre) de $\Omega$,

$$P(\Omega) = 1 \ ,$$

ou a probabilidade de que ocorra algum evento do espaço amostral $\Omega$ é 1.

**Axioma 3:** Para um número qualquer de eventos <u>mutuamente excludentes</u> $A_1, A_2, \ldots$,

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots \ .$$

### 1.2.2 Teoremas sobre probabilidades

**Teorema 1:** Se $A_1 \subset A_2$ ($A_1$ está contido em $A_2$: todo elemento de um conjunto $A_1$ é também elemento de um conjunto $A_2$, ou $A_1$ é subconjunto de $A_2$), então

$$P(A_1) \leqslant P(A_2) \qquad \text{e} \qquad P(A_2 - A_1) = P(A_2) - P(A_1) \ .$$

**Teorema 2:** Para todo evento $A$,

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1 \ .$$

**Teorema 3:** O evento impossível (que não ocorre) tem probabilidade zero,

$$P(\emptyset) = 0 \ ,$$

onde $\emptyset$ é o conjunto vazio. Por exemplo, se numa urna só existem bolas brancas, a probabilidade de se retirar uma bola verde (evento impossível, neste caso) é nula.

**Teorema 4:** Se $A'$ é o complemento de $A$, então,

$$P(A') = 1 - P(A) \ .$$

Por exemplo, ao sortear ao acaso um dos números naturais menores que 100, qual é a probabilidade do número sorteado ser menor do que 30? Podemos calcular esta probabilidade de duas formas. Na primeira, se $A$ é o evento, ou seja, o resultado ser menor do que 30, fazemos:

$$P(A) = \frac{30}{100} = 0.30 \ ,$$

pois 30 são as possibilidades do número ser menor do que 30, $A = \{0,\ 1,\ 2, \ldots,\ 29\}$, e 100 é o número de pontos do espaço amostral, $\Omega = \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 99\}$. Na segunda forma, usamos o teorema 4, fazendo

$$P(A) = 1 - \frac{70}{100} = 0.30 \ ,$$

pois 70 são as possibilidades do número ser maior ou igual do que 30.

**Teorema 5:** Se $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, onde $A_1,\ A_2, \ldots, A_n$ são eventos mutuamente excludentes, então,

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)\ .$$

Em particular, se $A = \Omega$ (o conjunto $A$ é o próprio espaço amostral), então

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1\ .$$

**Teorema 6:** Se $A$ e $B$ são dois eventos quaisquer,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)\ .$$

Mais geralmente, se $A_1$, $A_2$ e $A_3$ são 3 eventos quaisquer,

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2)P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_2 \cap A_3) - P(A_3 \cap A_1) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)\ .$$

Por exemplo, no lançamento de um dado, qual é a probabilidade de se obter um número ímpar ou mais de 4 pontos na face de cima? Para resolver, usamos o conteúdo do teorema 6. Digamos que o evento $A$ seja obter um número ímpar, $A = \{1,\ 3,\ 5\}$, enquanto $B$ é o evento maior do que 4, $B = \{5,\ 6\}$. A probabilidade de obtermos um número ímpar é $P(A) = 3/6$, e um número maior do que 4 é $P(B) = 2/6$. O evento intersecção, $A \cap B = \{5\}$, tem probabilidade $P(A \cap B) = 1/6$. Com isto,

$$P(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = 0.6667\ .$$

Nota que se $A \cap B = \emptyset$, dizemos que $A$ e $B$ são eventos mutuamente excludentes e, neste caso,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)\ ,$$

já que $P(\emptyset) = 0$, pois o evento é impossível. Este é o conteúdo do teorema 5.

**Teorema 7:** Para quaisquer eventos $A$ e $B$,

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B')\ .$$

**Teorema 8:** Se um experimento $A$ deve resultar em um dos eventos mutuamente excludentes $A_1$, $A_2, \ldots, A_n$, então,

$$P(A) = P(A \cap A_1) + P(A \cap A_2) + \ldots P(A \cap A_n)\ .$$

## Atribuição de probabilidades

A partir do teorema 5, vemos que podemos escolher arbitrariamente quaisquer números **não-negativos** (axioma 1) para a probabilidade dos eventos. Em particular, se admitimos **probabilidades iguais** (como num jogo de dados) para todos os eventos simples, então,

$$P(A_k) = \frac{1}{n}\ , \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

e se $A$ é um evento formado por $h$ desses eventos simples, então

$$P(A) = \frac{h}{n}$$

.

**Exemplo**: Lança-se um dado. Determinar a probabilidade de aparecer 2 ou 5.

Neste caso, o espaço amostral de eventos é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Como, em princípio, a probabilidade de ocorrência é a mesma para todos os pontos do espaço amostral,

$$P(1) = P(2) = \ldots = P(6) = \frac{1}{6}$$

Como queremos que "apareça" 2 ou 5, indicamos tal evento por $2 \cup 5$, e do axioma 3 teremos:

$$P(2 \cup 5) = P(2) + P(5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}\ .$$

## Probabilidade condicional

Sejam $A$ e $B$ dois eventos, com $P(A) > 0$. Definimos como $P(B|A)$, a probabilidade de ocorrência de $B$, na hipótese de $A$ ter ocorrido, através de

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

ou

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) \ .$$

Esta equação é particularmente útil se queremos calcular a probabilidade de ocorrência simultânea de dois eventos $A$ e $B$. Ela nos diz que a probabilidade de ocorrência de $A$ e $B$ ($A \cap B$) é igual à probabilidade de $A$ vezes a probabilidade da ocorrência de $B$ na hipótese de $A$ ter ocorrido.

Como exemplo, determine a probabilidade de a jogada de um dado resultar em um número menor que 4 (a) se não temos nenhuma outra informação e (b) sabendo-se que o resultado é um número ímpar.

(a) $B$ é o evento em questão, ou seja, menor do que 4.

Como as possíveis jogadas menores do que 4 são 1, 2 e 3, a partir do teorema 5, temos que

$$P(B) = P(1) + P(2) + P(3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

admitindo-se probabilidades iguais para todos os pontos.

(b) Seja $A$ o evento cujo resultado é um número ímpar.

No espaço amostral de um dado, são 3 as possibilidades de um número ímpar (1, 3 e 5). Assim,

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \ .$$

Por outro lado, como queremos um número ímpar <u>menor</u> do que 4 (ímpar e menor do que 4), temos apenas 2 possibilidades em 6, ou seja,

$$P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \ .$$

Assim,

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3} \ .$$

**Teorema 9:** Para 3 eventos quaisquer $A_1, A_2$ e $A_3$, a probabilidade da **ocorrência conjunta** de $A_1$, $A_2$ e $A_3$ é dada por

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \ .$$

**Teorema 10:** Se um experimento $A$ deve ter como resultado um dos eventos mutuamente excludentes $A_1$, $A_2, \ldots A_n$, então

$$P(A) = P(A_1)P(A|A_1) + P(A_2)P(A|A_2) + \ldots + P(A_n)P(A|A_n) \ .$$

## Eventos independentes

Se $P(B|A) = P(B)$, isto é, se a probabilidade de ocorrência de $B$ não é afetada pela occorrência, ou não de $A$, dizemos que $A$ e $B$ são **eventos independentes**:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \ .$$

Se $A_1$, $A_2$ e $A_3$ são independentes, então eles devem ser independentes dois a dois,

$$P(A_j \cap A_k) = P(A_j)P(A_k) \qquad j \neq k \qquad \text{onde} \quad j, k = 1, 2, 3$$

e também

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) \ .$$

Como exemplo, considere uma urna que possui 5 bolas vermelhas e 2 bolas brancas. Calcule a probabilidade de (a) em 2 retiradas, **sem reposição** da primeira bola retirada, sair uma bola vermelha e depois uma bola branca e (b) em duas retiradas, **com reposição** da primeira bola retirada, sair uma bola vermelha e depois uma bola branca.

No caso (a), ao retirarmos a primeira bola vermelha (V), temos a probabilidade $P(V) = 5/7$, pois existem 7 bolas na urna. Em seguida, como não existe reposição, ao retirarmos a segunda bola branca (B), temos a probabilidade condicional $P(B|V) = 2/6 = 1/3$. Assim, a probabilidade de na segunda retirada sair uma bola branca (B), dado que na primeira saiu uma vermelha (V), é dada por

$$P(V \cap B) = P(V)P(B|V) = \frac{5}{7}\,\frac{1}{3} = \frac{5}{21} = 0.2380 \ , \quad \text{ou } 23.8\% \ .$$

No caso (b), com reposição da primeira bola retirada, temos dois eventos independentes. Assim,

$$P(V \cap B) = P(V)P(B) = \frac{5}{7}\,\frac{2}{7} = \frac{10}{49} = 0.2041 \ , \quad \text{ou } 20.41\% \ .$$

### Distribuição binomial de probabilidades

Um caso importante a ser analisado refere-se ao experimento aleatório que pode ser repetido nas mesmas condições de realização. Seja $\Omega$ o espaço amostral desse experimento e $A$ um evento desse espaço amostral que ocorre com probabilidade $p$, sendo $A'$ o evento complementar de $A$, com probabilidade $1 - p$. Se o experimento for repetido $n$ vezes nas mesmas condições, a probabilidade do evento $A$ ocorrer exatamente $k$ vezes será dada pela expressão

$$P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}\,p^k(1-p)^{n-k} \ ,$$

conhecida como distribuição binomial.

Como exemplo, lançamos um dado 8 vezes. Qual é a probabilidade de sair exatamente 5 números iguais a 3?

O evento $A$ em questão é o número 3, $A = \{3\}$, com probabilidade $P(A) = 1/6$. Já o seu evento complementar $A'$ é não sair o número 3, $A' = \{1, 2, 4, 5, 6\}$, cuja probabilidade pode ser calculada facilmente como $P(A') = 1 - 1/6 = 5/6$. Assim, a probabilidade de após 8 lançamentos do dado termos 5 números 3 será dada por

$$P(8,5) = \frac{8!}{(8-5)!\,5!}\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right)^{8-5} = 56\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0.15 \ , \quad \text{ou } 15\% \ .$$

## 1.3 Análise combinatória

Quando o espaço amostral possui um número não muito grande de pontos, podemos, em geral, enumerar tais pontos. Quando temos problemas na contagem, podemos usar a técnica de análise combinatória, usando permutações, arranjos e combinações.

### Permutação

Obtemos uma permutação quando formamos agrupamentos com $n$ elementos, de forma que os $n$ elementos sejam distintos entre si pela ordem. As permutações podem ser simples, com repetições ou circulares. No caso das permutações simples, definimos a permutação como

$$P_n = n! \ .$$

De maneira geral, **todo problema onde apenas a ordem em que os elementos aparecem distingue os agrupamentos** é empregado o conceito de **permutação**.

Como exemplo, calcule o número de anagramas (qualquer palavra, com significado ou não, que pode ser formada com as letras da palavra dada) da palavra TRANCO. Neste caso, para a palavra proposta, TRANCO, temos 6 letras para agrupar. Com isto,

$$P_6 = 6! = 720 \, .$$

Suponha agora que um conjunto consista de $n$ objetos, dos quais $n_1$ são de um determinado tipo (não se distinguem entre si), $n_2$ de um segundo tipo, $\ldots$, $n_k$ de um $k$-ésimo tipo. Naturalmente, $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$. Neste caso, o número de permutações distintas dos $n$ objetos é

$${}_nP_{n_1,\, n_2,\, \ldots,\, n_k} = \frac{n!}{n_1!\, n_2!\, \ldots n_k!} \, .$$

Como exemplo, calcule o número de permutações distintas das 11 letras da palavra MISSISSIPPI (1 M, 4 I, 4 S e 2 P). Neste caso, existem

$${}_{11}P_{1,\,4,\,4,\,2} = \frac{11!}{1!\,4!\,4!\,2!} = 34650$$

permutações distintas.

## Arranjo

Obtemos um arranjo de $n$ elementos distintos tomados $r$ a $r$ através das sucessões de $r$ termos distintos escolhidos entre os $n$ elementos dados. Os arranjos podem ser simples ou com repetições. Os arranjos simples são definidos como

$$A(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!} \, .$$

De maneira geral, para **todo problema onde a ordem dos elementos é importante** empregamos o conceito de **arranjo**.

Como exemplo, calcule o número de arranjos distintos de 3 letras que podem ser formados com as 7 letras A, B, C, D, E, F, G. Neste caso, existem

$$A(7,3) = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = 7 \times 6 \times 5 = 210$$

arranjos distintos.

Nota que no caso das permutações e arranjos intervém a ordem dos objetos, ou seja, $abc$ é uma permutação distinta de $bca$.

## Combinação

**Quando a ordem em que os objetos aparecem não é relevante**, ou seja, estamos interessados apenas na escolha dos objetos, estamos falando de **combinações**. Neste caso, $abc$ e $bca$ representam a mesma combinação. Neste caso, definimos o número total de combinações de $r$ objetos escolhidos dentre $n$, ou combinações de $n$ objetos $r$ a $r$, através de

$$C(n,r) = \left( \begin{array}{c} n \\ \\ r \end{array} \right) = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \, .$$

Podemos escrever também

$$\left( \begin{array}{c} n \\ \\ r \end{array} \right) = \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{r!} = \frac{A(n,r)}{r!} \, ,$$

e

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \qquad \text{ou} \qquad C(n,r) = C(n,n-r)\ .$$

**Exemplo 1**: De quantas maneiras pode-se formar uma comissão de 5 pessoas escolhidas entre 9?

$$\binom{9}{5} = C(9,5) = \frac{9!}{5!\,(9-5)!} = \frac{9!}{5!\,4!} = 126\ .$$

**Problema 1.1 do Reif**: Qual é a probabilidade de obtermos um total de 6 pontos ou menos jogando com 3 dados?

Neste caso, o espaço amostral produzido pela jogada dos 3 dados consiste de 216 elementos ($6\times6\times6$). Destes, os possíveis arranjos que produzem uma soma igual ou menor do que 6 são representados abaixo:

| Evento | número de permutações |
|---|---|
| (1,1,1) | 1 |
| (1,1,2) | 3 |
| (1,1,3) | 3 |
| (1,1,4) | 3 |
| (1,2,2) | 3 |
| (1,2,3) | 6 |
| (2,2,2) | 1 |

Assim, a probabilidade é

$$\frac{20}{216} = \frac{5}{54} \approx 0,0926$$

Nota: Para encontrar o número de permutações acima, tome por exemplo o evento (1,1,1). Neste caso, existem 3 números 1. Assim,

$${}_3P_3 = \frac{3!}{3!} = 1$$

Da mesma forma, para o evento (1,1,2), temos 2 números 1 e 1 número 2. Assim,

$${}_3P_{2\,1} = \frac{3!}{2!\,1!} = 3$$

Usando o mesmo raciocínio para os demais eventos, chegamos facilmente ao resultado obtido acima.