O problema do caminhante aleatório – 2

Alexandre Diehl

Departamento de Física – UFPel

Limitações do problema do caminhante aleatório (até aqui)

- Difícil generalizar para os casos em que o comprimento do passo aleatório é variável.
- Difícil aplicação para os casos em que a caminhada aleatória é em mais de uma dimensão.

Definições

- o deslocamento no j-ésimo passo é caracterizado pelo comprimento aleatório s_j, tomado como uma **variável contínua**;
- cada passo s_i ocorre com uma dada probabilidade, que por simplicidade será tomada igual para cada passo, ou seja

  $$\omega(s_i)\, ds_i$$

  é a probabilidade que o i-ésimo passo esteja no intervalo entre s_i e $s_i + ds_i$;
- os passos sucessivos são **estatisticamente independentes**;
- $\omega_i(s_i)$ representa a distribuição de probabilidade para os tamanhos de cada passo, que agora **não** tem mais o mesmo comprimento ℓ.

Para o caso em que os passos têm igual comprimento l, com probabilidade p para direita e q para a esquerda,

$$\omega(s_i) = p\delta(s_i - l) + q\delta(s_i + l)$$

O caminhante aleatório: forma geral

Deslocamento total x após N passos:

$$x = s_1 + s_2 + s_3 + \ldots + s_N = \sum_{i=1}^{N} s_i$$

Valor médio de x:

$$\langle x \rangle = \langle \sum_{i=1}^{N} s_i \rangle = \langle (s_1 + s_2 + \ldots + s_N) \rangle = \sum_{i=1}^{N} \langle s_i \rangle$$

onde

$$\langle s_i \rangle = \int ds_i \, s_i \, \omega(s_i) \quad (s_i \text{ é tomada como contínua})$$

Agora, como $\omega(s_i)$ é independente de s_i (hipótese inicial) $\rightarrow$ $\langle s_i \rangle = \langle s \rangle$

teremos para o valor média do deslocamento total

$$\langle x \rangle = N \langle s \rangle$$

O caminhante aleatório: forma geral

Desvio de x:

$$\begin{aligned}\Delta x &= x - \langle x\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{N} s_i - N\langle s\rangle = \sum_{i=1}^{N}(s_i - \langle s\rangle) = \sum_{i=1}^{N}\Delta s_i\end{aligned}$$

tal que

$$(\Delta x)^2 = \left(\sum_{i=1}^{N}\Delta s_i\right)\left(\sum_{j=1}^{N}\Delta s_j\right) = \sum_{i=1}^{N}(\Delta s_i)^2 + \underbrace{\sum_{i}\sum_{j}}_{(i\neq j)}(\Delta s_i)\left(\Delta s_j\right)$$

Dispersão de x:

$$\langle(\Delta x)^2\rangle = \sum_{i=1}^{N}\langle(\Delta s_i)^2\rangle + \underbrace{\sum_{i}\sum_{j}}_{(j\neq j)}\langle\Delta s_i\ \Delta s_j\rangle$$

O caminhante aleatório: forma geral

Independência estatística entre os s_i:

$$\langle \Delta s_i \, \Delta s_j \rangle = \langle \Delta s_i \rangle \, \langle \Delta s_j \rangle \quad \Longrightarrow \quad \langle \Delta s_i \rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad \langle \Delta s_i \, \Delta s_j \rangle = 0$$

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle = \sum_{i=1}^{N} \langle (\Delta s_i)^2 \rangle = N \langle (\Delta s)^2 \rangle$$

$$\langle (\Delta s)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} ds \; (\Delta s)^2 \; \omega(s)$$

Desvio relativo:

$$\frac{\sqrt{\langle (\Delta x)^2 \rangle}}{\langle x \rangle} = \frac{\sqrt{\langle (\Delta s)^2 \rangle}}{\langle s \rangle} \, \frac{1}{\sqrt{N}} \sim \frac{1}{\sqrt{N}}$$

O caminhante aleatório: forma geral

Probabilidade de uma dada sequência:

$$\underbrace{\omega(s_1)\,ds_1}_{s_1 \text{ e } s_1+ds_1}\ \underbrace{\omega(s_2)\,ds_2}_{s_2 \text{ e } s_2+ds_2}\ \ldots\ \underbrace{\omega(s_N)\,ds_N}_{s_N \text{ e } s_N+ds_N}$$

Probabilidade total de encontrarmos o deslocamento x no intervalo entre x e $x + dx$:

$$\mathcal{P}(x)dx = \underbrace{\int\int\ldots\int}_{\text{restrição}} \omega(s_1)\,\omega(s_2)\ldots\omega(s_N)\; ds_1\, ds_2 \ldots ds_N$$

onde a restrição sobre as integrais é dada por:

$$x < \sum_{i=1}^{N} s_i < x + dx$$

Precisamos achar uma forma de eliminar as restrições sobre as integrais.

O caminhante aleatório: forma geral

Função delta de Dirac (Reif Apêndice A7):

$$\delta(x-x_0) = \begin{cases} 0\,, & \text{para } x \neq x_0 \\ +\infty\,, & \text{para } x = x_0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} \delta(x-x_0)\,dx = 1$$

$$\mathcal{P}(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int_{-\infty}^{+\infty} \omega(s_1)\,\omega(s_2)\ldots\omega(s_N)\left[\delta\left(x-\sum_{i=1}^{N}s_i\right)dx\right] ds_1\,ds_2\ldots ds_N$$

Representação integral da função δ de Dirac:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\kappa\, e^{-i\kappa x}$$

$$\mathcal{P}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int_{-\infty}^{+\infty} \omega(s_1)\,\omega(s_2)\ldots\omega(s_N)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\kappa\, e^{-i\kappa\left(x-\sum_{i=1}^{N}s_i\right)} ds_1\,ds_2\ldots ds_N$$

O caminhante aleatório: forma geral

$$\mathcal{P}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\kappa\; e^{-i\kappa x} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} ds_1\; \omega(s_1)\; e^{i\kappa s_1}} \int_{-\infty}^{+\infty} ds_2\; \omega(s_2)\; e^{i\kappa s_2} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} ds_N\; \omega(s_N)\; e^{i\kappa s_N}$$

Equações para o problema geral:

Tranformada de Fourier de $\omega(s)$

$$Q(\kappa) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} ds\; \omega(s)\; e^{i\kappa s}$$

Densidade de probabilidade para o deslocamento total x

$$\mathcal{P}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\kappa\; e^{-i\kappa x}\; Q^N(\kappa)$$

Um caminhante aleatório em uma dimensão

Densidade de probabilidade para os passos

$$\omega(s) = p\delta(s-\ell) + q\delta(s+\ell)$$

$$Q(\kappa) = \int_{-\infty}^{\infty} ds\, e^{i\kappa s} \left(p\delta(s-\ell) + q\delta(s+\ell)\right) = pe^{i\kappa\ell} + qe^{-i\kappa\ell}$$

$$Q^N(\kappa) = \left(pe^{i\kappa\ell} + qe^{-i\kappa\ell}\right)^N$$

Expansão binomial:

$$(p+q)^N = \sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{n!\,(N-n)!}\, p^n\, q^{N-n}$$

$$Q^N(\kappa) = \sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{n!\,(N-n)!} \left(pe^{i\kappa\ell}\right)^n \left(qe^{-i\kappa\ell}\right)^{N-n} = \sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{n!\,(N-n)!}\, p^n\, q^{N-n}\, e^{i\kappa\ell(2n-N)}$$

Um caminhante aleatório em uma dimensão

Densidade de probabilidade total

$$\mathcal{P}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\kappa \, e^{-i\kappa x} \, Q^N(\kappa)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(x) &= \sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{n!\,(N-n)!} p^n \, q^{N-n} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa \, e^{-i\kappa x} \, e^{i\kappa l(2n-N)} \right] \\ &= \sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{n!\,(N-n)!} p^n \, q^{N-n} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa \, e^{-i\kappa(x-(2n-N)\ell)} \right] \end{aligned}$$

$$\mathcal{P}(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{n!\,(N-n)!} p^n \, q^{N-n} \, \delta(x-(2n-N)\ell)$$

Um caminhante aleatório em uma dimensão

Probabilidade de encontrarmos o caminhante em $x = (2n - N)\ell$:

$$P((2n - N)\ell) = \int_{(2n-N)\ell-\epsilon}^{(2n-N)\ell+\epsilon} \mathcal{P}(x)\, dx$$

$$\begin{aligned} P((2n - N)\ell) &= \int_{(2n-N)\ell-\epsilon}^{(2n-N)\ell+\epsilon} \mathcal{P}(x)\, dx \\ &= \frac{N!}{n!\,(N-n)!}\, p^n\, q^{N-n} \underbrace{\int_{(2n-N)\ell-\epsilon}^{(2n-N)\ell+\epsilon} \delta(x - (2n-N)\ell)\, dx}_{=1} \end{aligned}$$

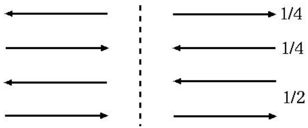
Distribuição binomial

$$P((2n - N)\ell) = \frac{N!}{n!\,(N-n)!}\, p^n\, q^{N-n}$$

Dois caminhantes aleatórios em uma dimensão

Reif 1.8

Dois bêbados partem juntos da origem do eixo x, cada um tendo probabilidades iguais de dar passos para a esquerda ou para a direita ao longo do referido eixo. Encontre a probabilidade de os bêbados se reencontrarem após N passos. Deve ser entendido que os bêbados dão os passos simultaneamente. (Pode ser de ajuda considerar o movimento relativo entre eles).



Possíveis movimentos:

1. aqueles que diminuem a distância relativa entre eles;
2. aumentam esta distância;
3. não alteram a distância entre os dois.

Densidade de probabilidade para os passos relativos

$$\omega(s) = \frac{1}{4}\,\delta(s-2\ell) + \frac{1}{2}\,\delta(s) + \frac{1}{4}\,\delta(s+2\ell)$$

Dois caminhantes aleatórios em uma dimensão

$$
\begin{aligned}
Q(\kappa) &= \int_{-\infty}^{+\infty} ds\, e^{i\kappa s} \omega(s) \\
&= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} ds\, e^{i\kappa s}\, \delta(s-2\ell) + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} ds\, e^{i\kappa s}\, \delta(s) + \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} ds\, e^{i\kappa s}\, \delta(s+2\ell)
\end{aligned}
$$

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \delta(x-x_0)\, dx = f(x_0)
$$

$$
Q(\kappa) = \frac{1}{4}\, e^{i2\kappa\ell} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\, e^{-i2\kappa\ell} = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2}\left(e^{i2\kappa\ell} + e^{-i2\kappa\ell}\right)\right] = \frac{1}{2}\, [1 + \cos(2\kappa\ell)]
$$

$$
\cos(2\kappa\ell) = \cos(\kappa\ell + \kappa\ell) = \cos^2(\kappa\ell) - \sin^2(\kappa\ell) = 2\cos^2(\kappa\ell) - 1
$$

$$
Q(\kappa) = \frac{1}{2}(1 + 2\cos^2(\kappa\ell) - 1) = \cos^2(\kappa\ell)
$$

Dois caminhantes aleatórios em uma dimensão

$$Q^N(\kappa) = (\cos(\kappa\ell))^{2N} = \left(\frac{e^{i\kappa\ell} + e^{-i\kappa\ell}}{2}\right)^{2N}$$

Expansão binomial,

$$(p+q)^N = \sum_{x=0}^{n} \frac{n!}{x!\,(n-x)!}\, p^x\, q^{n-x}$$

$$Q^N(\kappa) = \sum_{n=0}^{2N} \frac{(2N)!\,(1/2)^{2N}}{(2N-n)!\,n!}\, e^{i\kappa\ell n}\, e^{-i\kappa\ell(2N-n)}$$

$$Q^N(\kappa) = \sum_{n=0}^{2N} \frac{(2N)!\,(1/2)^{2N}}{(2N-n)!\,n!}\, e^{i2\kappa\ell(n-N)}$$

Dois caminhantes aleatórios em uma dimensão

densidade de probabilidade para o deslocamento relativo total

$$\mathcal{P}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\kappa}{2\pi}\, e^{-i\kappa x} Q^N(\kappa)$$

$$\mathcal{P}(x) = \sum_{n=0}^{2N} \frac{(2N)!\,(1/2)^{2N}}{(2N-n)!\,n!} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\kappa}{2\pi}\, e^{i\kappa(2(n-N)\ell - x)} = \sum_{n=0}^{2N} \frac{(2N)!\,(1/2)^{2N}}{(2N-n)!\,n!}\, \delta(x - 2(n-N)\ell)$$

Probabilidade dos dois bêbados estarem a uma distância relativa $x = 2(n-N)\ell$:

$$P(2(n-N)\ell) = \int_{2(n-N)\ell-\epsilon}^{2(n-N)\ell+\epsilon} \mathcal{P}(x)\, dx$$

Probabilidade dos dois bêbados se reencontrarem em $x = 0$ ou $n = N$

$$P(x=0) = \frac{(2N)!\,(1/2)^{2N}}{(N!)^2}$$