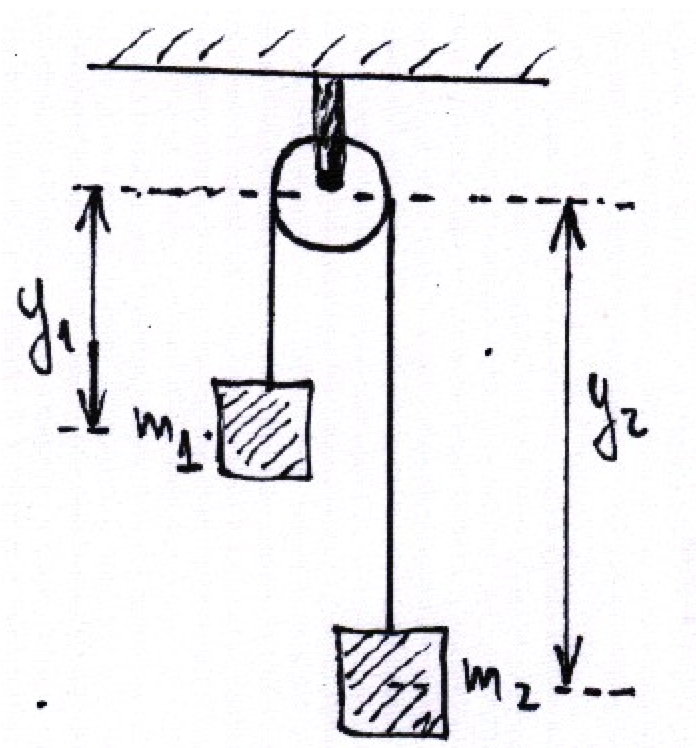
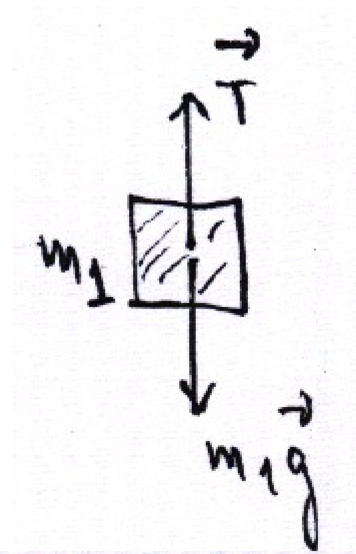
# USANDO O MODELLUS

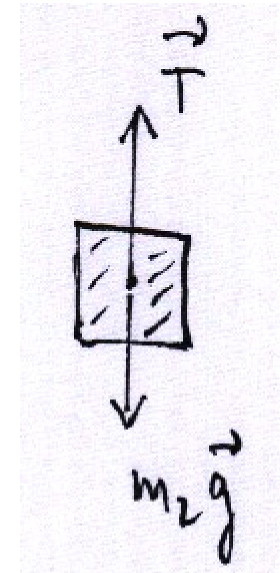
Aula 5

# Modelagem de duas partículas

**Máquina de Atwood (1784)**




$$T - m_1 g = m_1 a$$

$$m_2 g - T = m_2 a$$

Aceleração do Sistema

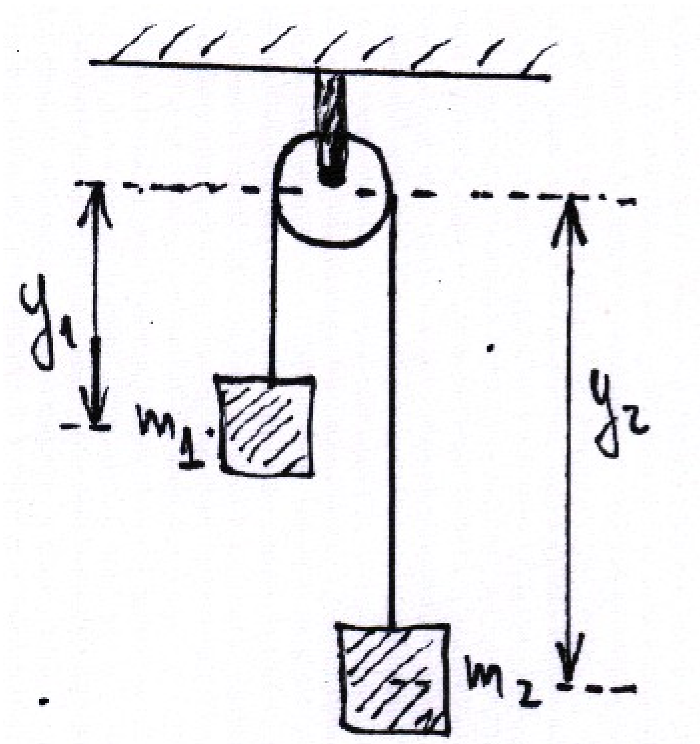
$$\boxed{a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}\, g}$$

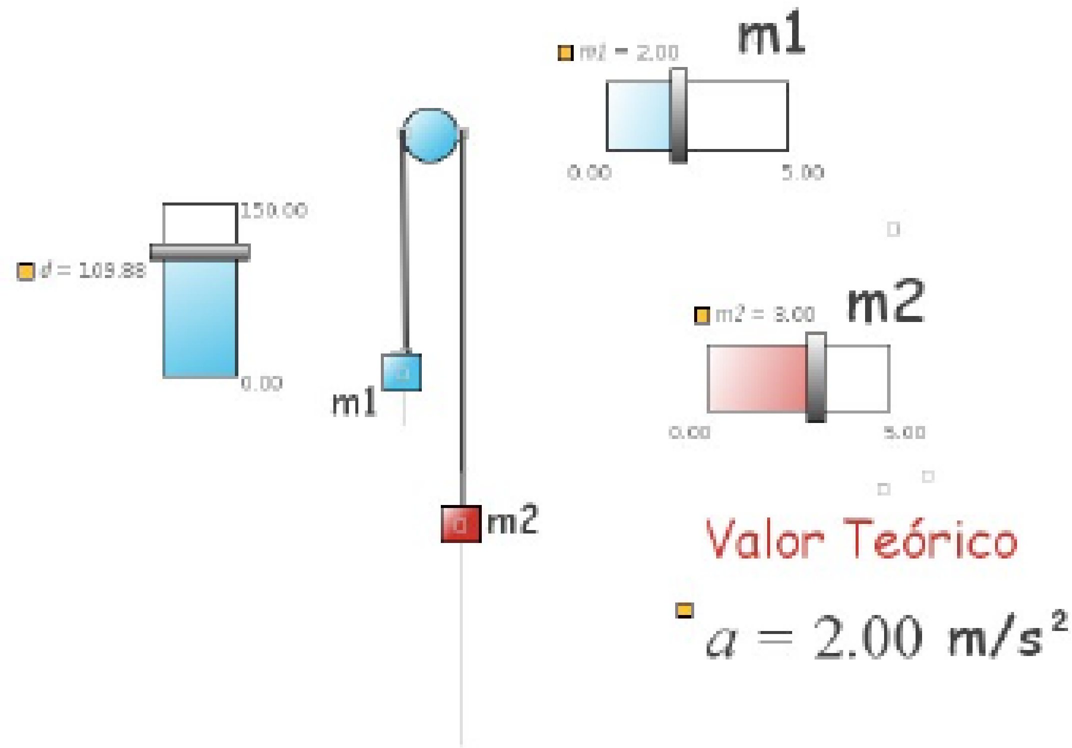
Tensão no cabo

$$\boxed{T = \frac{2\, m_1 m_2}{m_1 + m_2}\, g}$$

# Modelagem de duas partículas

## Máquina de Atwood (1784)




**Comprimento do cabo** → $L = y_1 + y_2 + \text{constante}$

# Modelagem de duas partículas

## Máquina de Atwood (1784)

$$T = 2\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g$$

**Condições iniciais**

$$L = y_1 + y_2 + \text{constante}$$

$$\frac{dy1}{dt} = v1$$

$$\frac{dv1}{dt} = \frac{T}{m1} - g$$

$$\frac{dy2}{dt} = v2$$

$$\frac{dv2}{dt} = \frac{T}{m2} - g$$

$$T = \frac{(2 \times m1 \times m2)}{(m1 + m2)} \times g$$

$$a = \frac{(m2 - m1)}{(m1 + m2)} \times g$$

$$y2_0 = -(L - \mathrm{abs}(y1_0))$$

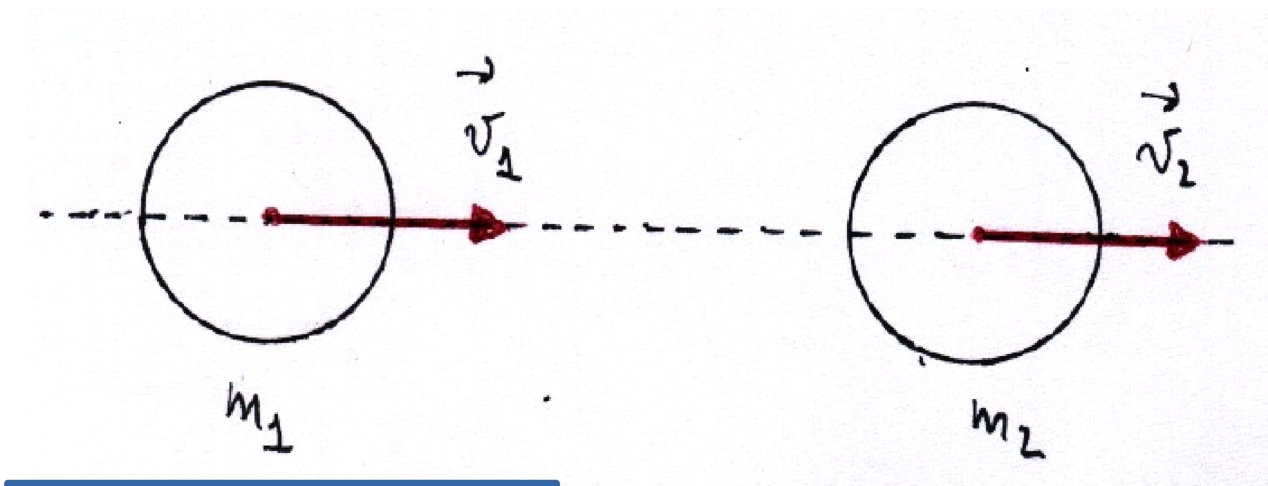
$$y1_0 = -d$$

$$T - m_1 g = m_1 a$$

$$m_2 g - T = m_2 a$$

# Modelagem de duas partículas

## Colisões binárias (elásticas e unidimensionais)




**Conservação do Momento linear total**

$$\vec{P}_{inicial} = \vec{P}_{final}$$

**Conservação da energia cinética total**

$$K_{inicial} = K_{final}$$

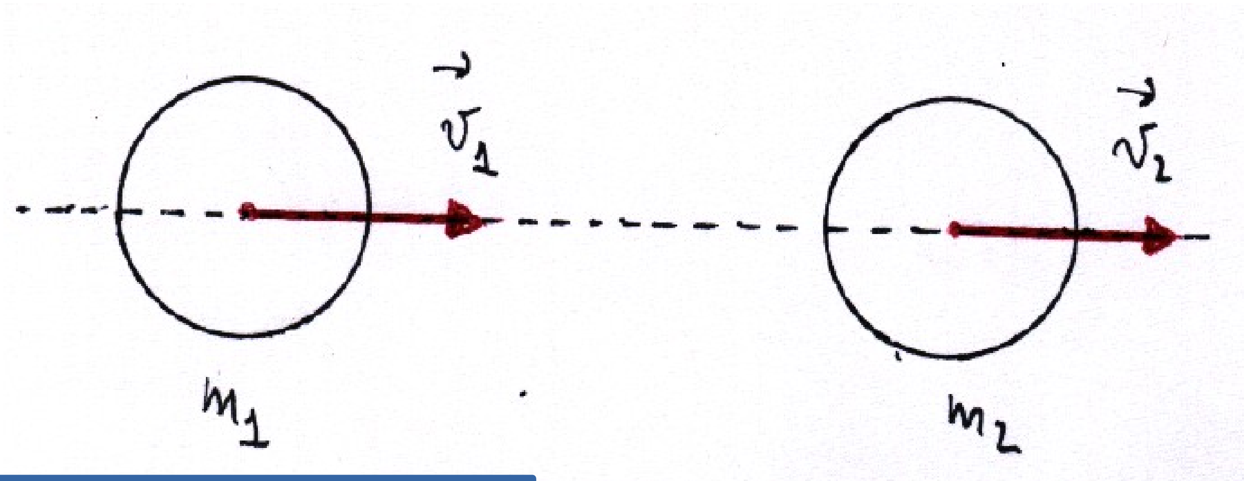
$$p_{2f} - p_{2i} = p_{1i} - p_{1f}$$

$$\lambda = \frac{m_2}{m_1}$$

$$p_{2f}^2 - p_{2i}^2 = \lambda\left(p_{1i}^2 - p_{1f}^2\right)$$

# Modelagem de duas partículas

## Colisões binárias (elásticas e unidimensionais)




**Conservação do Momento linear total**

$$\vec{P}_{inicial} = \vec{P}_{final}$$

**Conservação da energia cinética total**

$$K_{inicial} = K_{final}$$

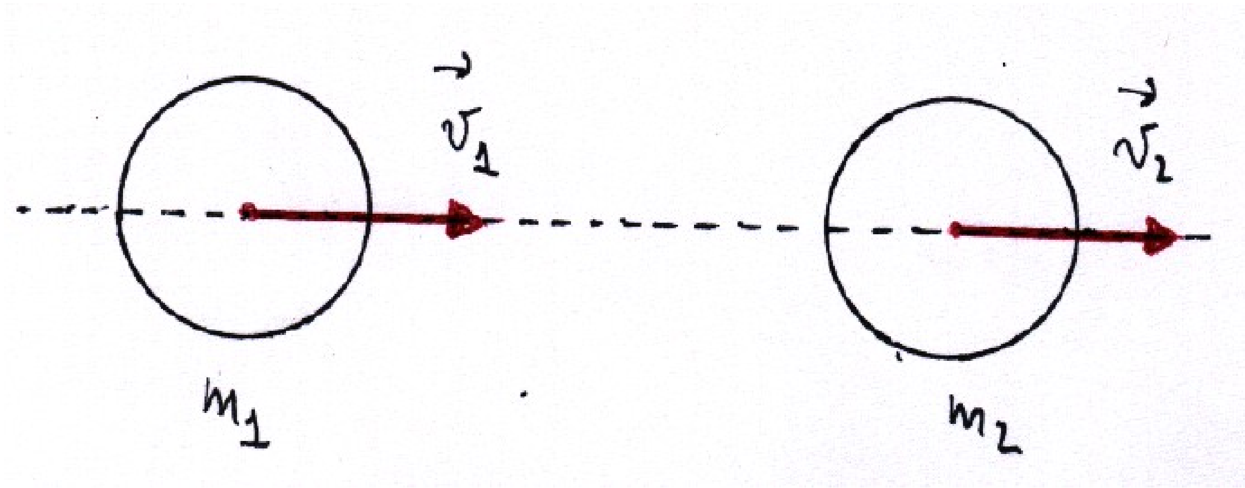
$$p_{2f} + p_{2i} = \lambda (p_{1i} + p_{1f})$$

**Inversão da velocidade relativa**

$$v_{2f} - v_{1f} = -(v_{2i} - v_{1i})$$

# Modelagem de duas partículas

## Colisões binárias (elásticas e unidimensionais)



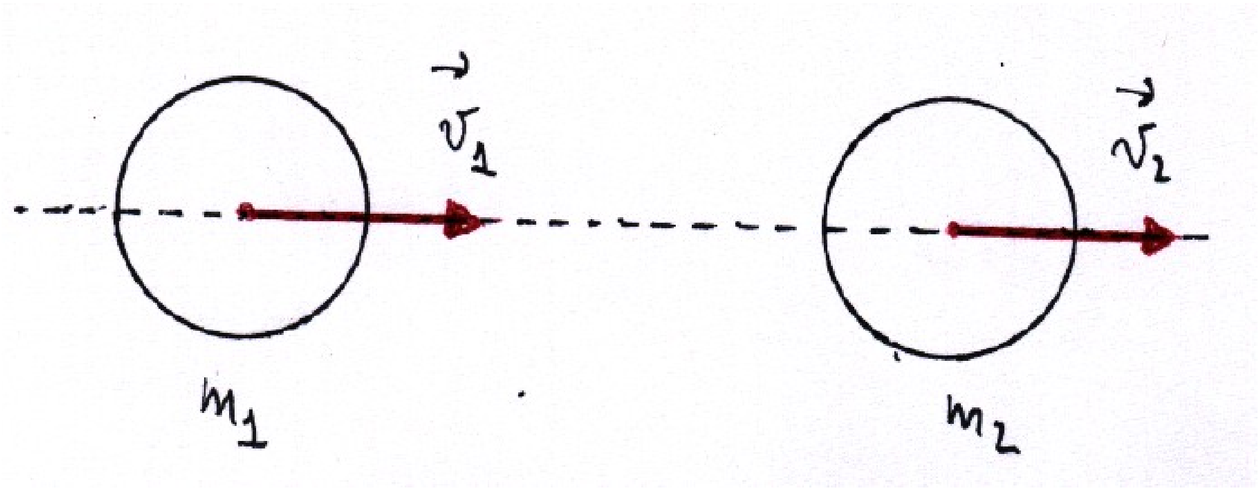

**Velocidades das massas após a colisão**

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} + \frac{2m_2}{(m_1 + m_2)} v_{2i}$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{(m_1 + m_2)} v_{1i} - \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{2i}$$

# Modelagem de duas partículas

## Colisões binárias (elásticas e unidimensionais)




**Casos particulares:**

**(a) Massas iguais** $m_1 = m_2$

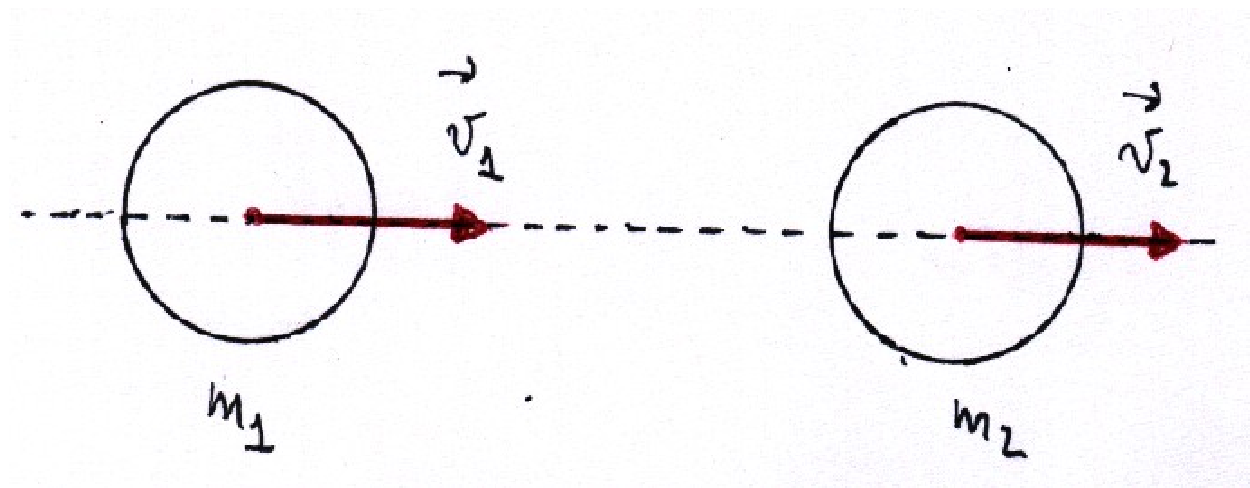
$$p_{1f} = p_{2i}$$
$$p_{2f} = p_{1i}$$

**Massas trocam os momentos e velocidades**

$$v_{1f} = v_{2i}$$
$$v_{2f} = v_{1i}$$

# Modelagem de duas partículas

## Colisões binárias (elásticas e unidimensionais)




**Casos particulares:**

**(b) Alvo em repouso (massa *$m_2$*)**

$$m_1 \ll m_2$$

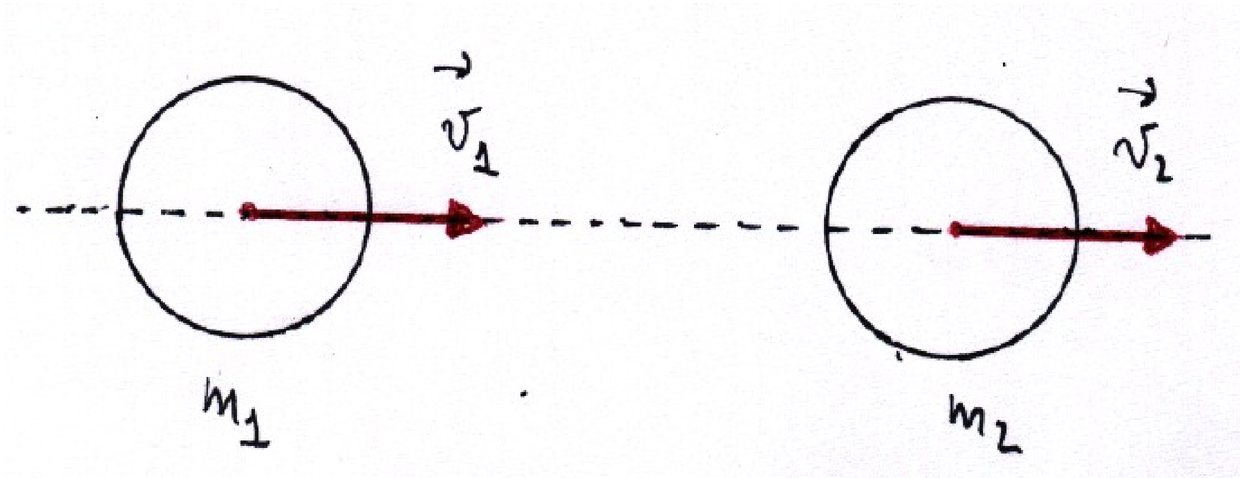
**Reflexão da massa menor e recuo da massa maior**

$$v_{1f} \approx -v_{1i}$$

$$v_{2f} \approx 2\frac{m_1}{m_2} v_{1i} \ll v_{1i}$$

# Modelagem de duas partículas

## Colisões binárias (elásticas e unidimensionais)




**Casos particulares:**

**(b) Alvo em repouso (massa $m_2$)** $m_1 \gg m_2$

**Massa maior não é freada e massa menor com velocidade duplicada**

$$v_{1f} \approx v_{1i} \quad \Rightarrow \quad v_{2f} \approx 2v_{1i}$$

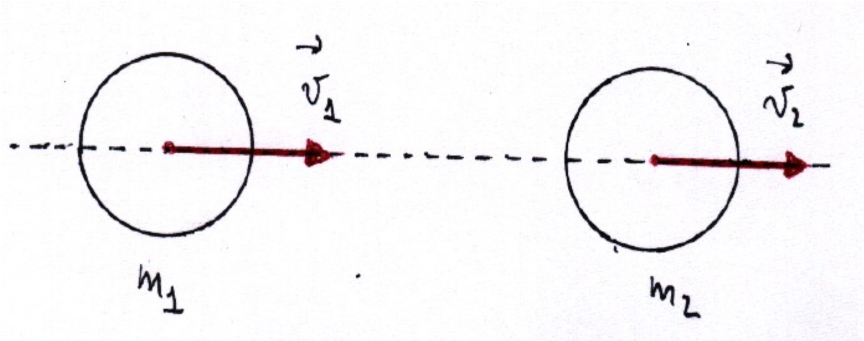
# Modelagem de duas partículas

## Colisões binárias (elásticas e unidimensionais)

### Como modelar usando um potencial repulsivo?

1. O potencial deve refletir o caráter elástico da colisão.

2. As forças advindas do potencial devem atuar dentro das dimensões características das partículas.




3. A escolha do potencial (e das forças) não é única!!

# Modelagem de duas partículas

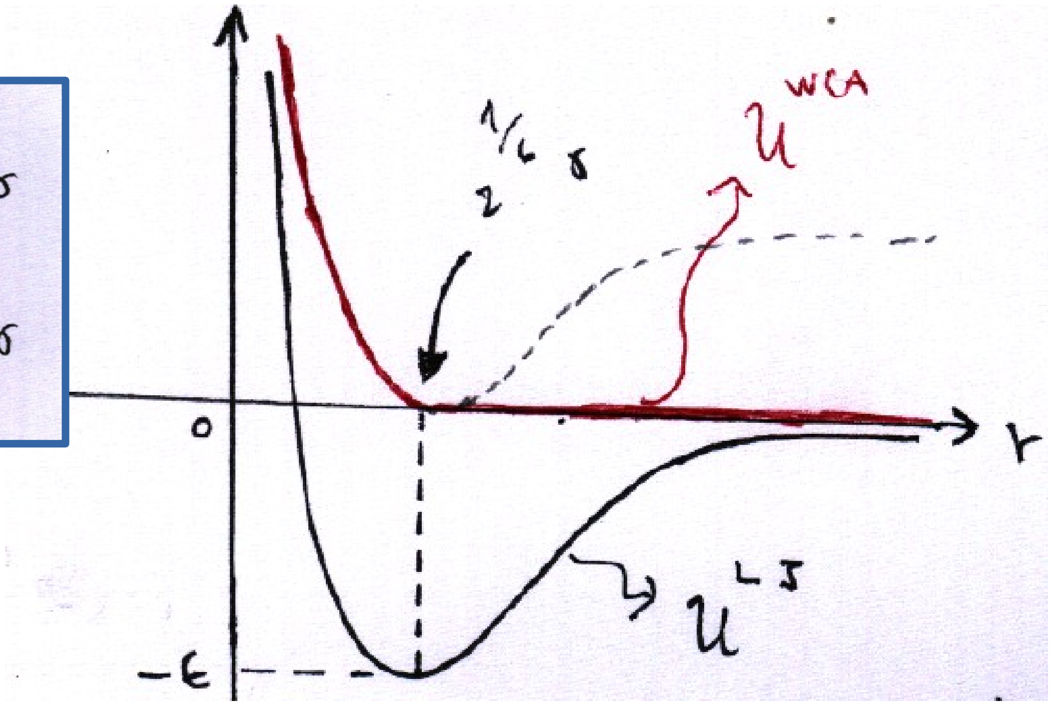
## Colisões binárias (elásticas e unidimensionais)

**Potencial WCA (1971)**

$$U^{WCA}(r) = \begin{cases} U^{LJ}(r) + \epsilon, & r \leq 2^{1/6}\sigma \\ 0, & r > 2^{1/6}\sigma \end{cases}$$

Potencial Lennard-Jones (1924)

$$U^{LJ}(r) = 4\epsilon\left[\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6}\right]$$




$r \rightarrow$ separação entre duas partículas

# Modelagem de duas partículas

## Colisões binárias (elásticas e unidimensionais)

**Forças de WCA**

$$\vec{f} = -\vec{\nabla} U$$

$$\vec{f}^{\,WCA} = \begin{cases} \dfrac{48\epsilon}{\sigma^2}\left[\left(\dfrac{\sigma}{r}\right)^{14} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sigma}{r}\right)^{8}\right]\vec{r} \, , & \text{se } r \leq 2^{1/6}\sigma \\ \vec{0} \, , & \text{se } r > 2^{1/6}\sigma \end{cases}$$

# Modelagem de duas partículas

## Colisões binárias (elásticas e unidimensionais)

### Equação de movimento (genérica)

$$m \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \frac{48\epsilon}{\sigma^2} \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{N} \left[ \left( \frac{\sigma}{r_{ij}} \right)^{14} - \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma}{r_{ij}} \right)^{8} \right] \vec{r}_{ij}$$

$$\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$$

$$r_{ij} = | \vec{r}_{ij} |$$

# Modelagem de duas partículas

**Colisões binárias (elásticas e unidimensionais)**

**Equação de movimento (2 partículas)**

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{48\epsilon}{\sigma^2}\left[\left(\frac{\sigma}{x_{12}}\right)^{14} - \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{x_{12}}\right)^{8}\right](x_1 - x_2)$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = \frac{48\epsilon}{\sigma^2}\left[\left(\frac{\sigma}{x_{12}}\right)^{14} - \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{x_{12}}\right)^{8}\right](x_2 - x_1)$$

Separação entre as massas $x_{12} = |x_1 - x_2|$

# Modelagem de duas partículas

## Colisões binárias (elásticas e unidimensionais)

### Modelo Matemático usando Modellus

$$\frac{dx1}{dt} = v1$$

$$\frac{dv1}{dt} = \frac{f1}{m1}$$

$$\frac{dx2}{dt} = v2$$

$$\frac{dv2}{dt} = \frac{-f1}{m2}$$

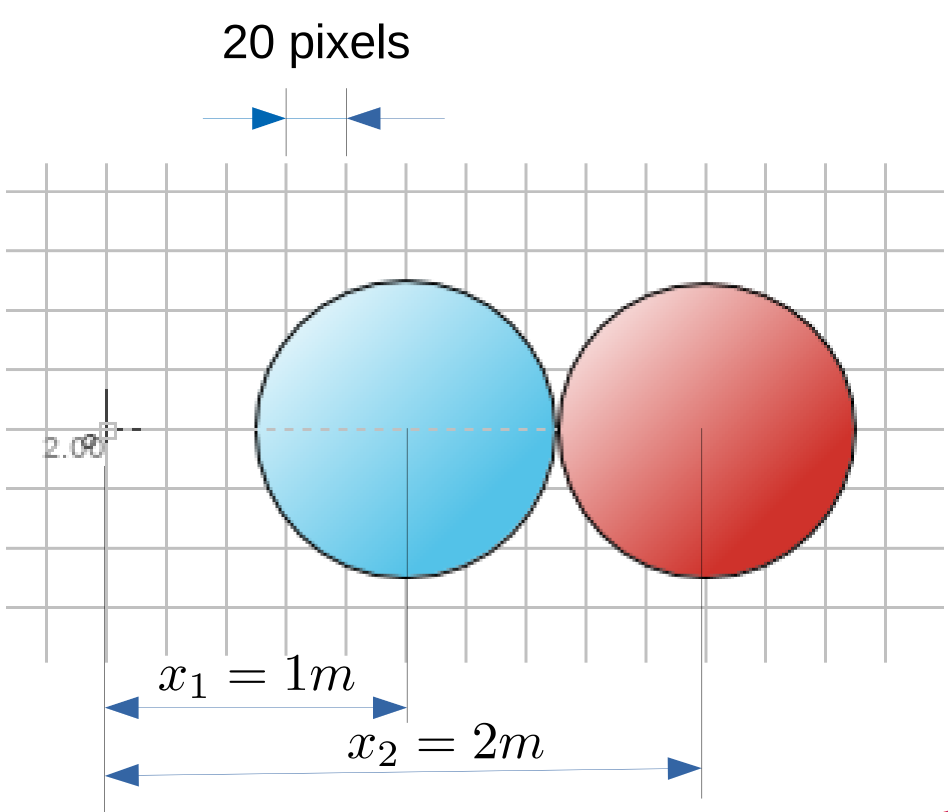
$$d = \mathrm{abs}(x1 - x2)$$

$$rcut = 2^{\left(\frac{1}{6}\right)} \times sigma$$

$$f1 = \begin{cases} 48 \times \left(\left(\frac{sigma}{d}\right)^{14} - 0.5 \times \left(\frac{sigma}{d}\right)^{8}\right) \times (x1 - x2), & d < rcut \\ 0 \end{cases}$$

# Modelagem de duas partículas

Espaçamento entre as linhas da grelha (tela Início)




**Posição da partícula 1**

20 pixels x 5 linhas = 100 pixels

**Posição da partícula 2**

20 pixels x 10 linhas = 200 pixels

Como encontrar posição em metros?

Alterando a relação de escala para a unidade (tela Animação):

1 m → 100 pixels