# USANDO O MODELLUS

Aula 3

# Forma diferencial de modelagem

- A evolução temporal é dada pela **solução numérica** de **equações diferenciais**.

**Exemplo:**
**Movimento Retilíneo Uniforme**

$$\frac{dx}{dt} = v$$

**Exemplo:**
**Movimento Retilíneo Uniformemente variado**

$$\frac{dx}{dt} = v$$

$$\frac{dv}{dt} = a$$

- As derivadas são selecionadas na aba **Modelo**, opção **Taxa de Variação**.
- No Modellus **não é possível** inserir no Modelo Matemático uma **equação diferencial de segunda ordem**.

# Forma diferencial de modelagem

- Os **valores iniciais** para as variáveis que evoluem no tempo são definidos na **aba Condições Iniciais**.

$$\frac{dx}{dt} = v$$

Aqui apenas ***x*** tem um valor inicial a ser definido

$$\frac{dx}{dt} = v$$
$$\frac{dv}{dt} = a$$

Aqui ***x*** e ***v*** têm valores iniciais a serem definidos

***v*** e ***a*** são Parâmetros a serem definidos

- As **constantes** são definidas na **aba Parâmetros**.

# Forma diferencial de modelagem

- Os **valores iniciais** podem ser definidos dentro do **Modelo Matemático**, usando a opção **Índice** $x_i$ na **aba** **Modelo**.

**Exemplo:**

**Movimento Retilíneo Uniforme**

com condição inicial **$x$ = 10m** para **$t$ = 0**

$$\frac{dx}{dt} = v$$

$$x_0 = 10$$

- O valor inicial definido com a opção **Índice** será inserido automaticamente na **aba** **Condições Iniciais**.

- As **constantes** são definidas na **aba** **Parâmetros**.

# Forma diferencial de modelagem

## Precisão na solução numérica da equação diferencial

- **Modellus** utiliza o método de **Runge-Kutta de quarta ordem** para a solução numérica das equações diferenciais.

### Problemas típicos da solução numérica

- o **passo na variável independente** (o tempo, por exemplo) é **grande**;
- a quantidade que especifica a **variação** (a derivada) de outra é **grande**. Por exemplo, uma força "impulsiva" (muito grande durante um intervalo de tempo curto) será difícil de tratar numericamente.

# Forma diferencial de modelagem

## Precisão na solução numérica da equação diferencial

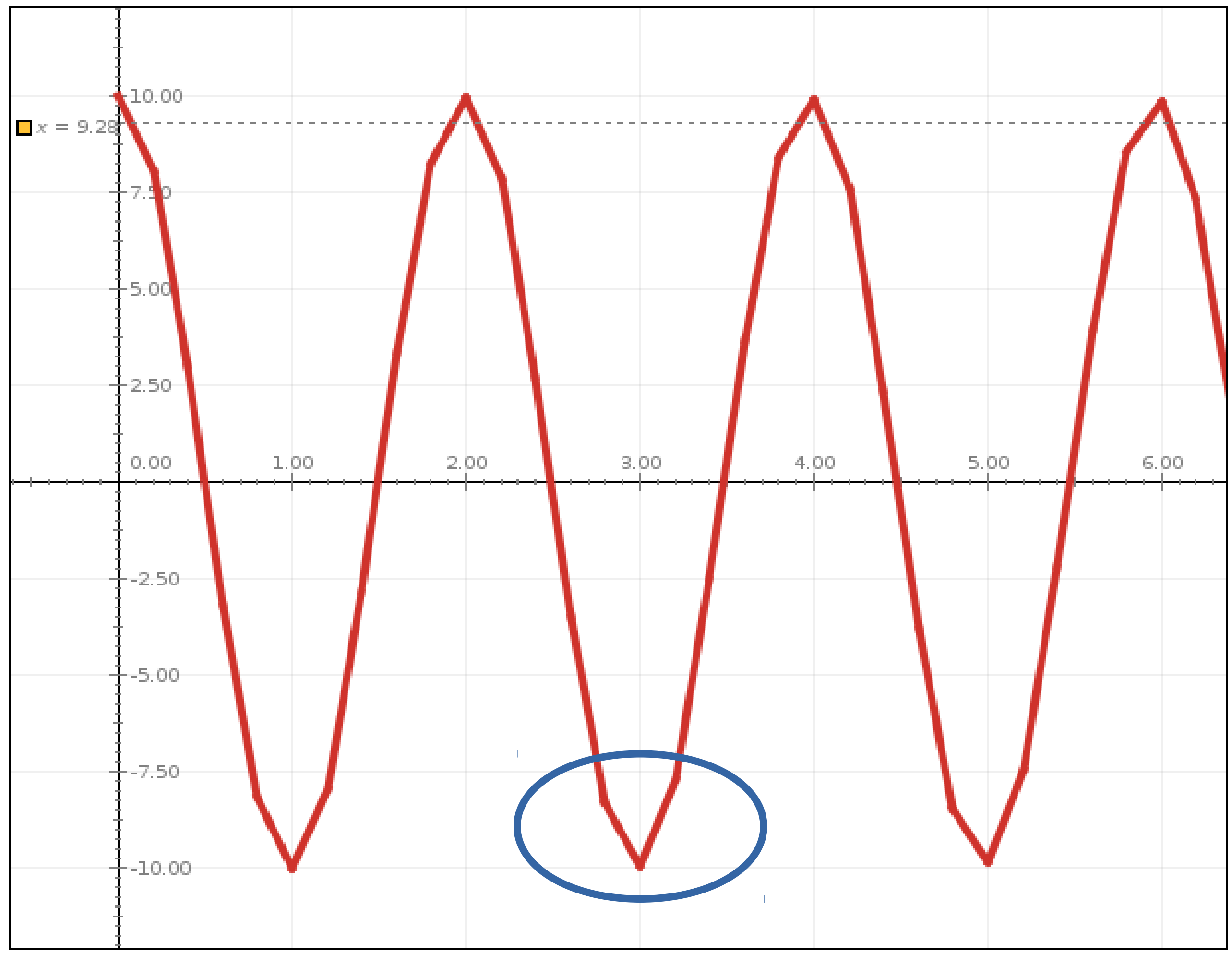
**MHS**

**Passo de tempo $\Delta t$ = 0.2s**

$$F = -k \times x$$

$$\frac{dx}{dt} = v$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}$$



# Forma diferencial de modelagem

## Precisão na solução numérica da equação diferencial

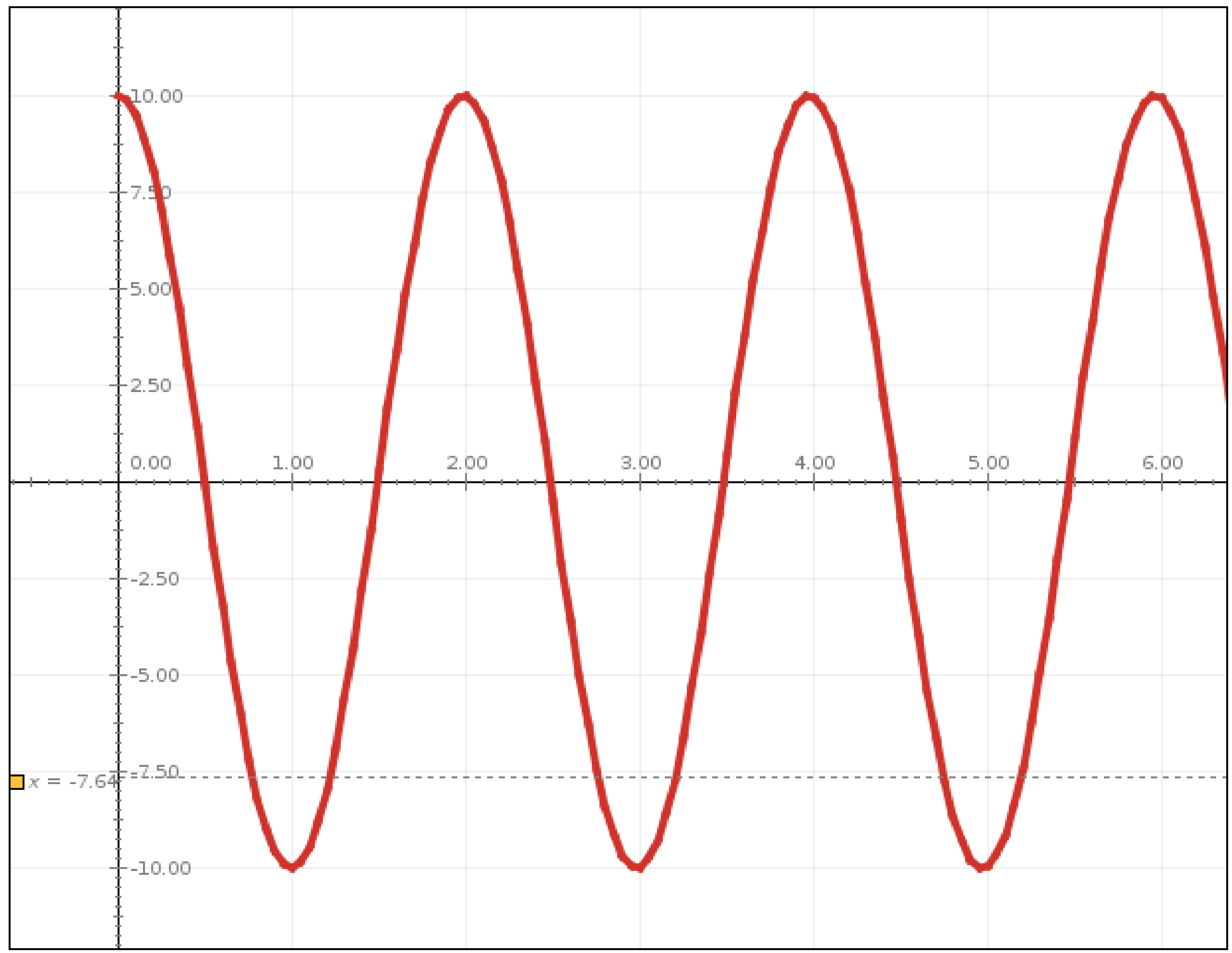
**MHS**

**Passo de tempo $\Delta t$ = 0.05s**

$$F = -k \times x$$

$$\frac{dx}{dt} = v$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}$$



# Forma diferencial de modelagem

## Precisão na solução numérica da equação diferencial

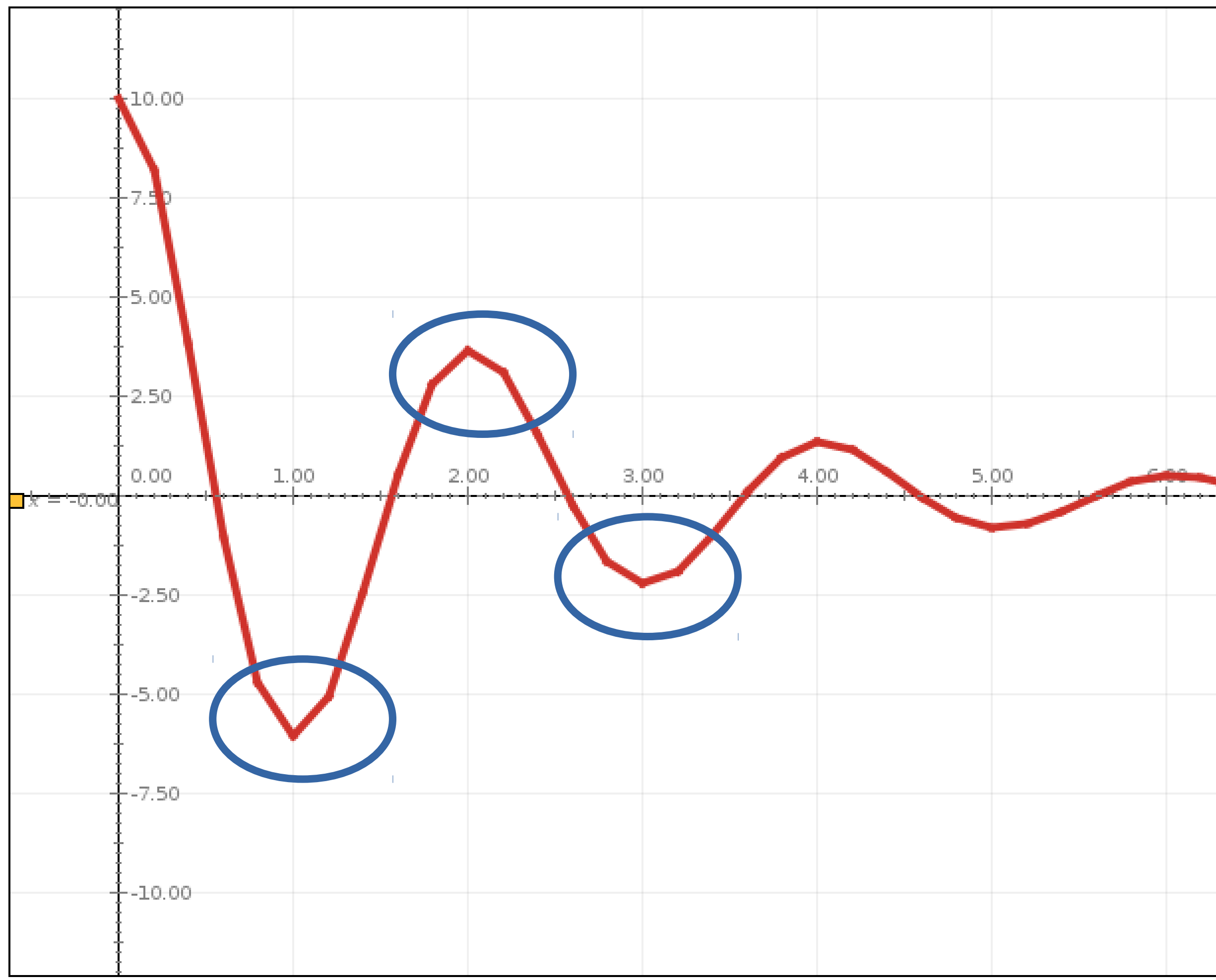
**MHS amortecido**

**Passo de tempo $\Delta t = 0.2$s**

$$F = -k \times x - b \times v$$

$$\frac{dx}{dt} = v$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}$$



# Forma diferencial de modelagem

## Precisão na solução numérica da equação diferencial

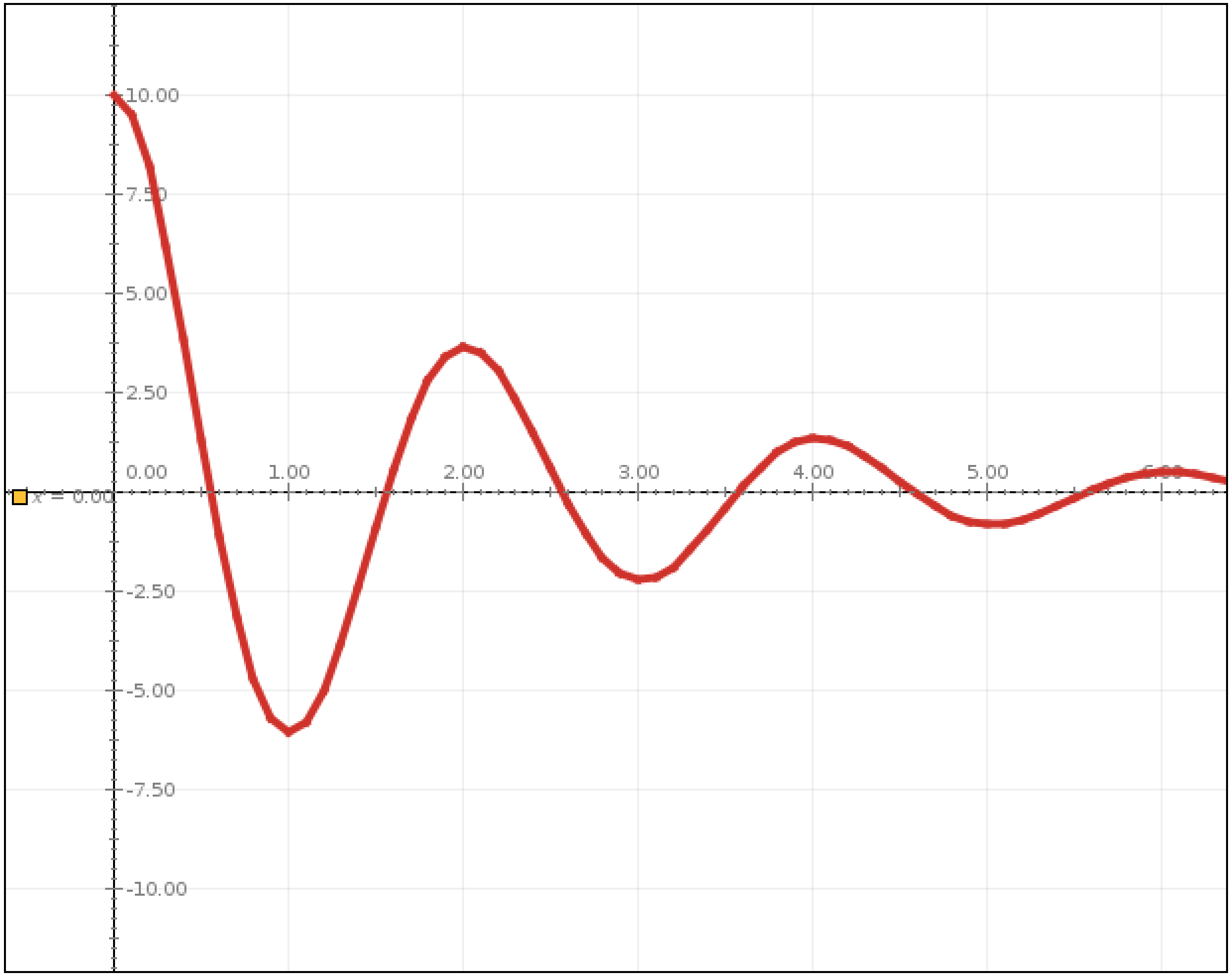
**MHS amortecido**

**Passo de tempo $\Delta t = 0.1s$**

$$F = -k \times x - b \times v$$

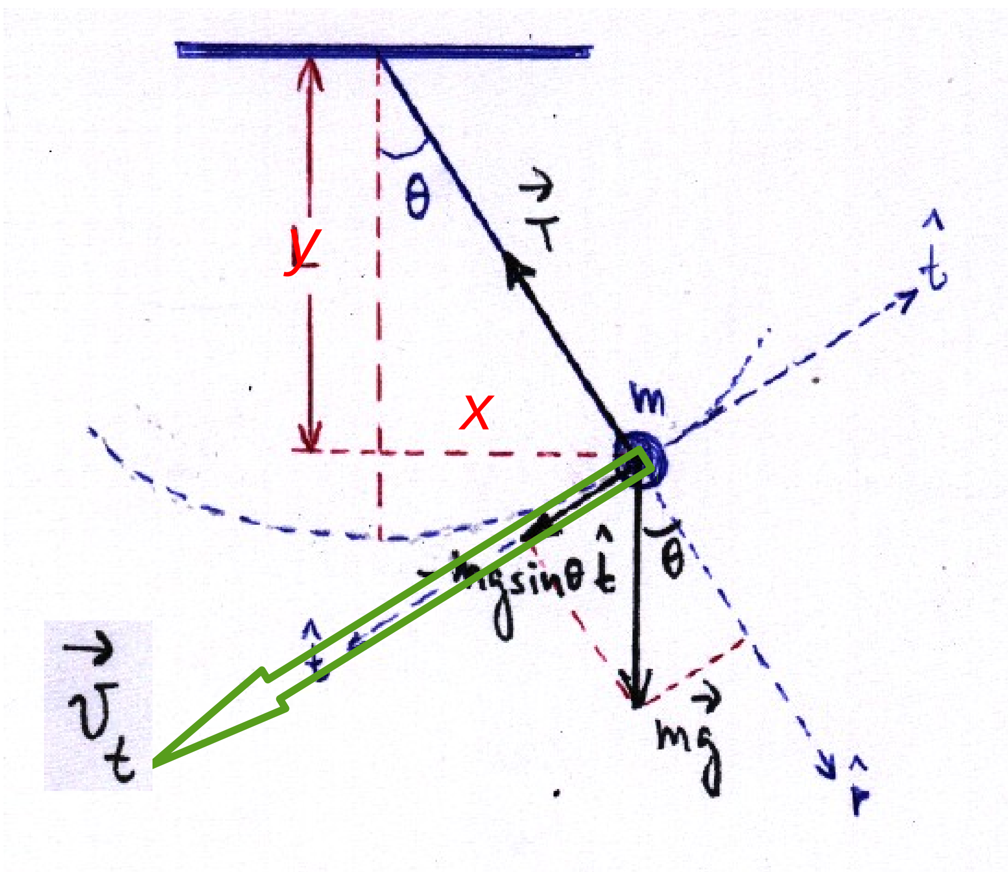
$$\frac{dx}{dt} = v$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}$$



# Forma diferencial de modelagem

**Exemplo: Pêndulo preso no teto**




Componente tangencial ($\hat{t}$)

$$\boxed{m a_t = -mg\sin\theta}$$

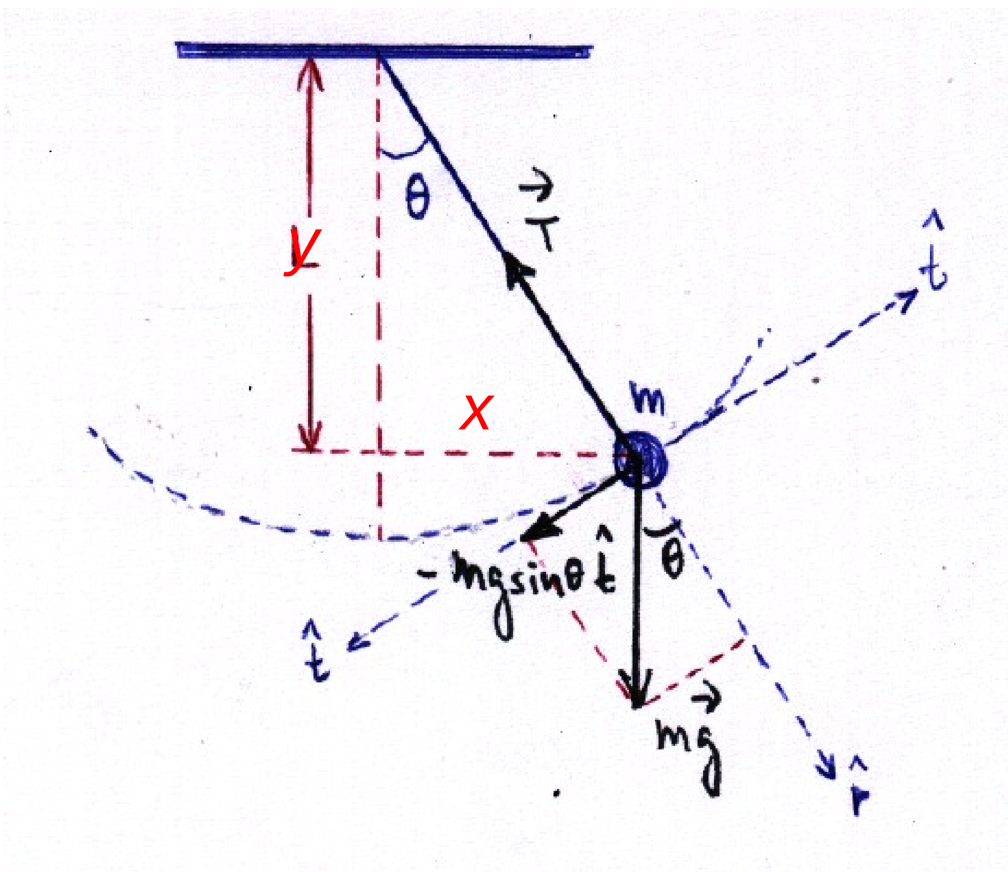
$$v_t = \omega L \quad , \quad \omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$a_t = L\frac{d\omega}{dt} = L\frac{d^2\theta}{dt}$$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta}$$

# Forma diferencial de modelagem

## Exemplo: Pêndulo preso no teto




$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta}$$

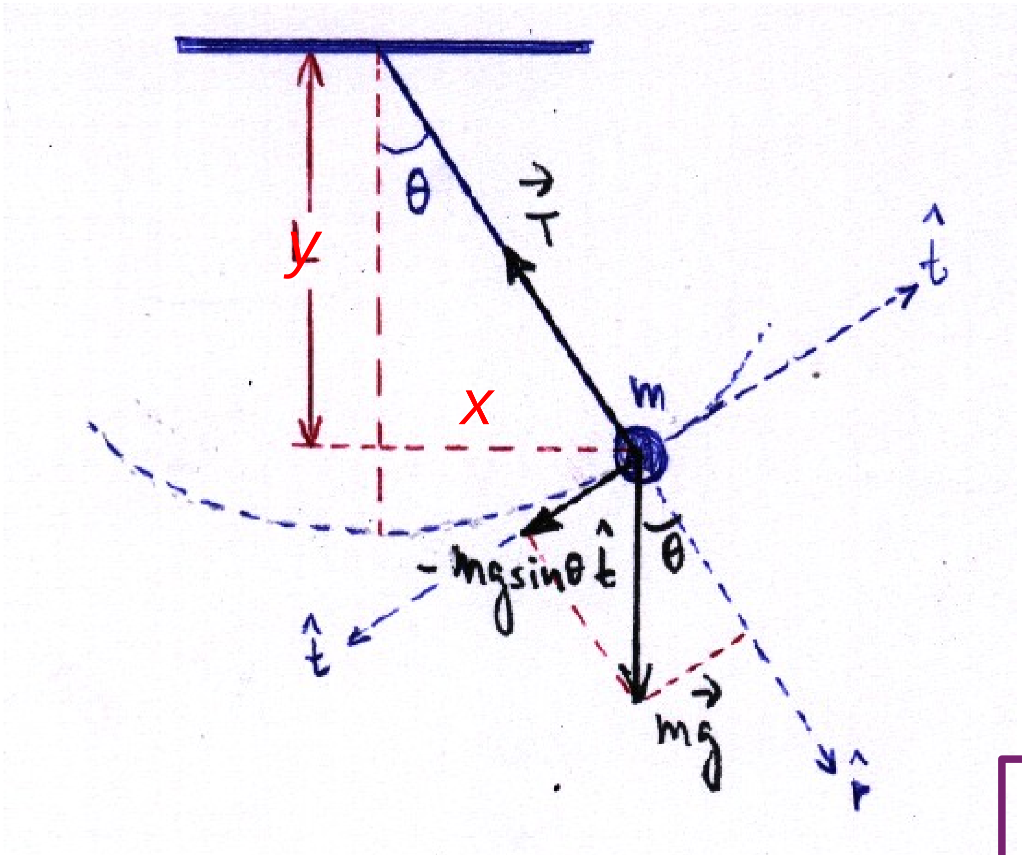
Frequência angular de oscilação

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega_0^2\sin\theta}$$

# Forma diferencial de modelagem

**Exemplo: Pêndulo preso no teto**




$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega_0^2 \sin\theta$$

**Pequenas oscilações:** $\sin\theta \approx \theta$

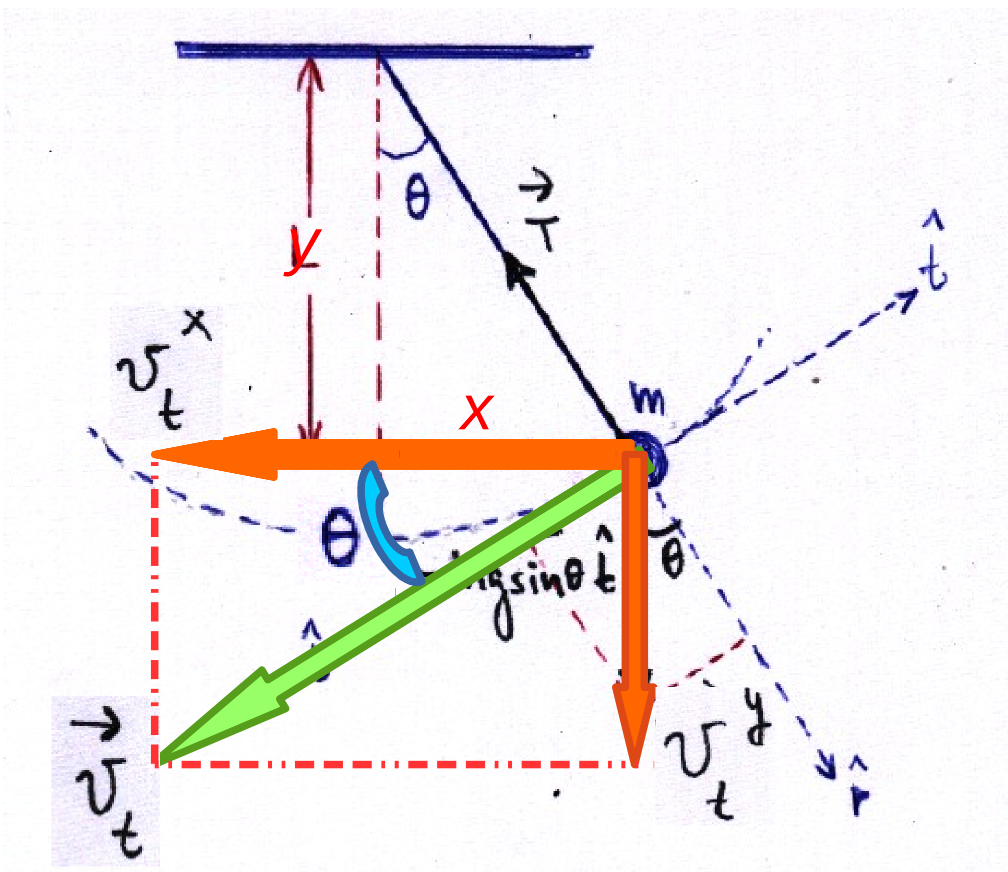
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega_0^2 \theta$$

**Período de oscilação**
**(pequenas oscilações)**

$$\tau = 2\pi\,\omega_0^{-1} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

# Forma diferencial de modelagem

## Exemplo: Pêndulo preso no teto




**Velocidade tangencial** $\vec{v}_t$

**Componentes cartesianas**

$$v_t^x = v_t \cos\theta$$

$$v_t^y = v_t \sin\theta$$

# Forma diferencial de modelagem

## Exemplo: Pêndulo preso no teto

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dq}{dt} = w$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{-g}{L} \times \sin(q)$$

$$x = L \times \sin(q)$$

$$y = L \times \cos(q)$$

$$vt = w \times L$$

$$vx = vt \times \cos(q)$$

$$vy = -vt \times \sin(q)$$

$$q_0 = a$$

$$v_t = \omega L$$

$$\begin{cases} v_x = v_t \cos\theta \\ v_y = v_t \sin\theta \end{cases}$$

**Variável ângular** $\theta \xrightarrow{\text{Modellus}} q$

# Forma diferencial de modelagem

## Exemplo: Pêndulo preso no teto

$$\frac{dq}{dt} = w$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{-g}{L} \times \sin(q)$$

$$x = L \times \sin(q)$$

$$y = L \times \cos(q)$$

$$vt = w \times L$$

$$vx = vt \times \cos(q)$$

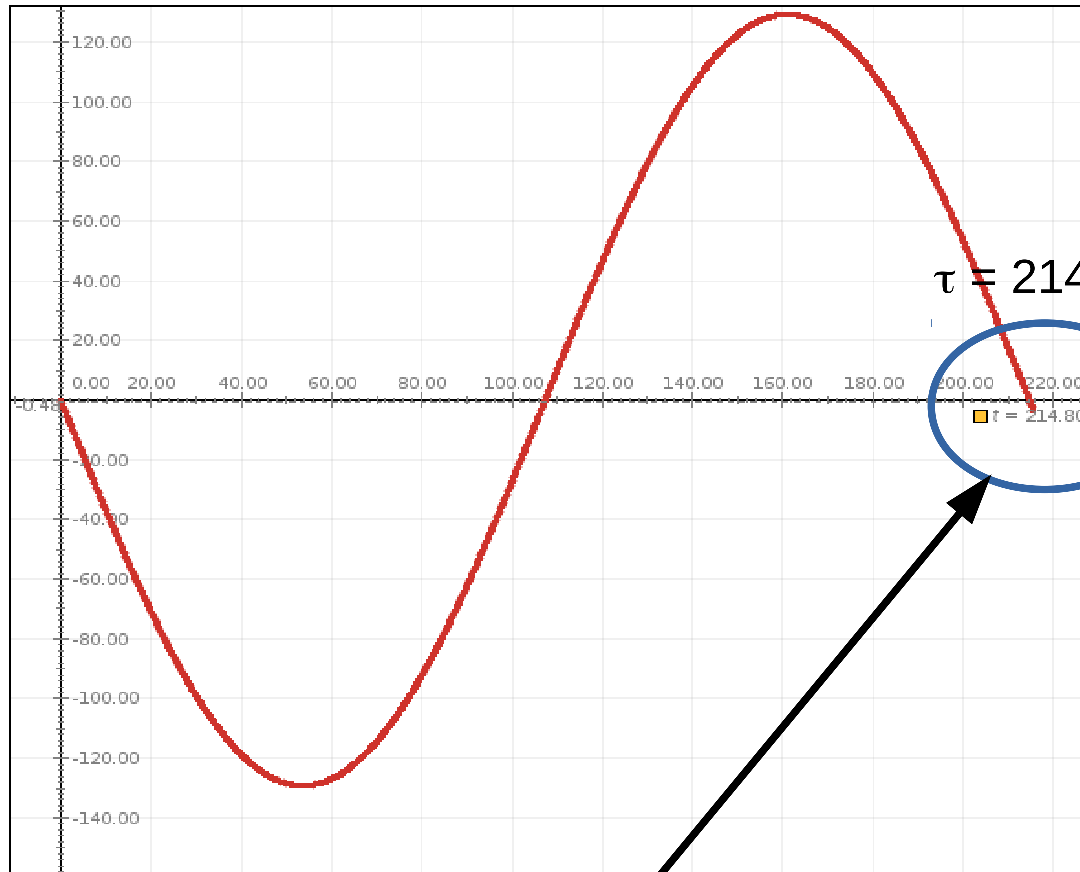
$$vy = -vt \times \sin(q)$$

$$\boxed{q_0 = a}$$

Condição Inicial

$L$ = 200m  $g$ = 10m/s$^2$  $a$ = 22$^o$

$$\tau = 2\pi\,\omega_0^{-1} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 28.10\ \text{s}$$




$\tau$ = 214.80s

Período medido pelo Modellus

**Funções trigonométricas** devem ser avaliadas em **radianos**

# Forma diferencial de modelagem

## Exemplo: Pêndulo preso no teto

$$\frac{dq}{dt} = w$$

Pequenas oscilações

$$\boxed{\frac{dw}{dt} = \frac{-g}{L} \times q}$$

$$x = L \times \sin(q)$$

$$y = L \times \cos(q)$$

$$vt = w \times L$$

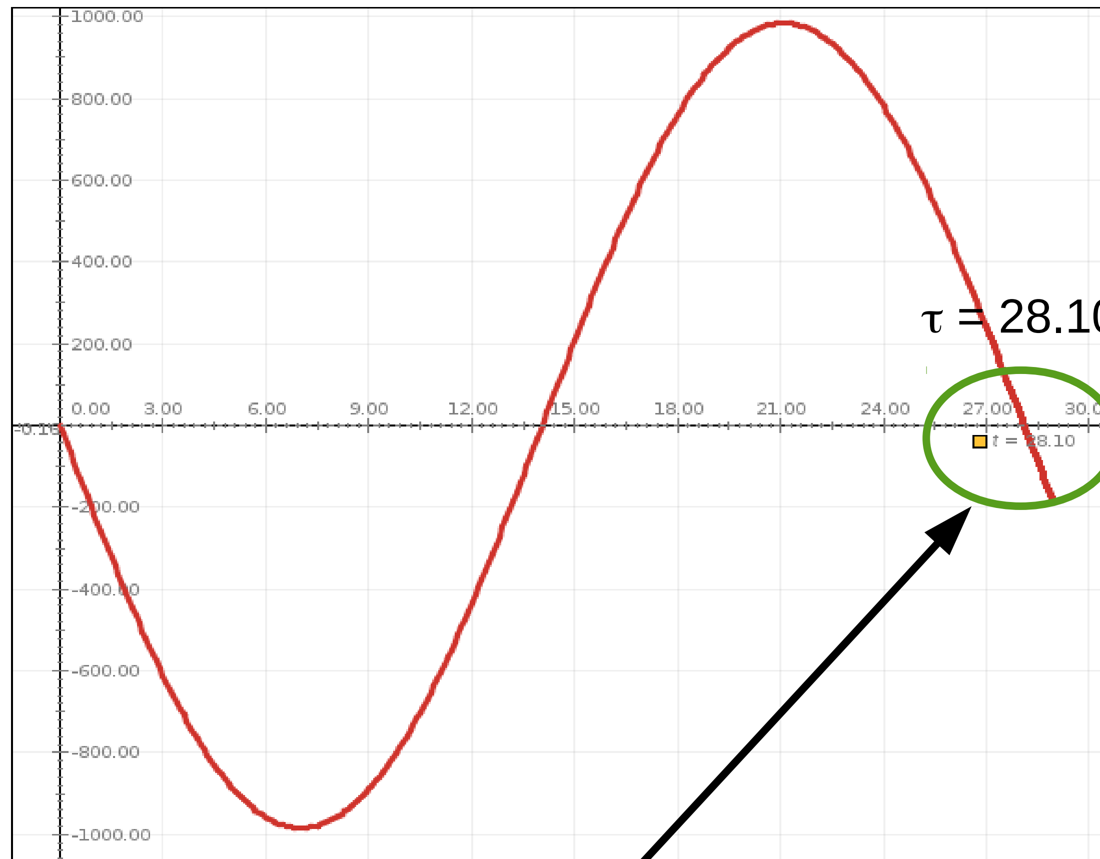
$$vx = vt \times \cos(q)$$

$$vy = -vt \times \sin(q)$$

$$q_0 = a$$

$L$ = 200m $g$ = 10m/s$^2$ $a$ = 22$^o$

$$\tau = 2\pi\, \omega_0^{-1} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} = 28.10 \text{ s}$$




$\tau$ = 28.10s

Período medido pelo Modellus

# Forma diferencial de modelagem

## Exemplo: Pêndulo preso no teto

$$\frac{dq}{dt} = w$$

$$\boxed{\frac{dw}{dt} = \frac{-g}{L} \times \sin(q)}$$

$$x = L \times \sin(q)$$

$$y = L \times \cos(q)$$

$$vt = w \times L$$

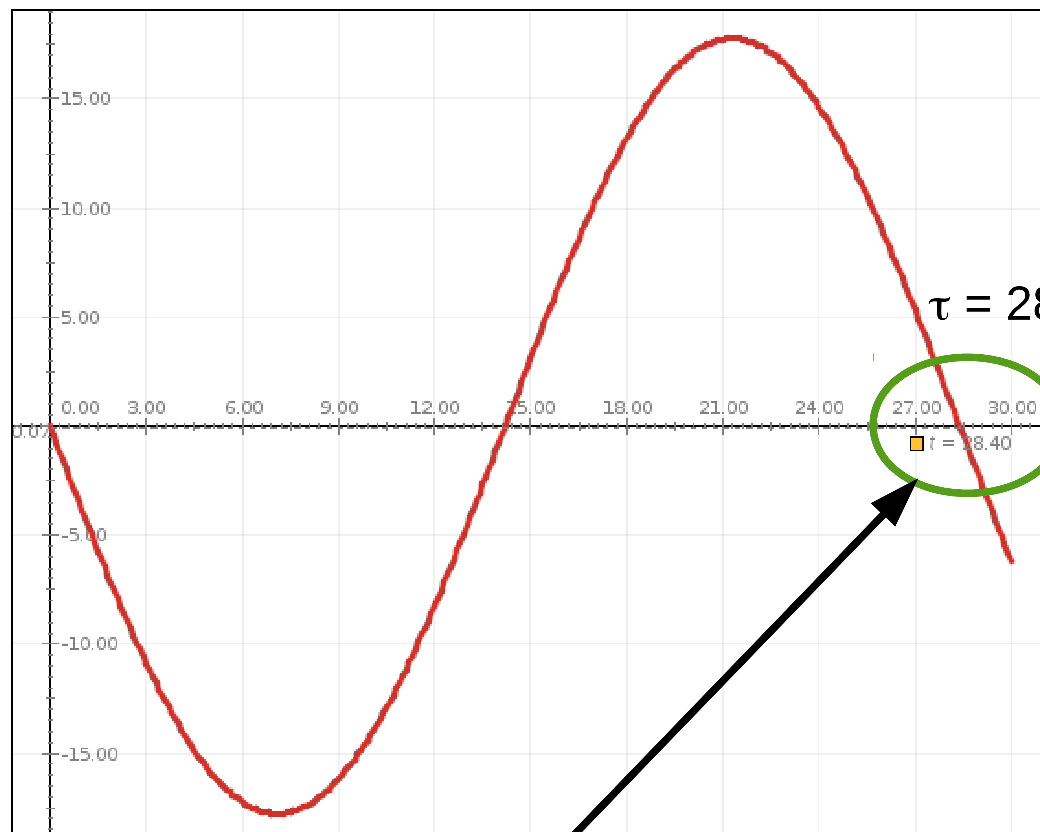
$$vx = vt \times \cos(q)$$

$$vy = -vt \times \sin(q)$$

$$q_0 = a$$

$L$ = 200m   $g$ = 10m/s$^2$   $a$ = 0.4rad

$$\tau = 2\pi\,\omega_0^{-1} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 28.10 \text{ s}$$

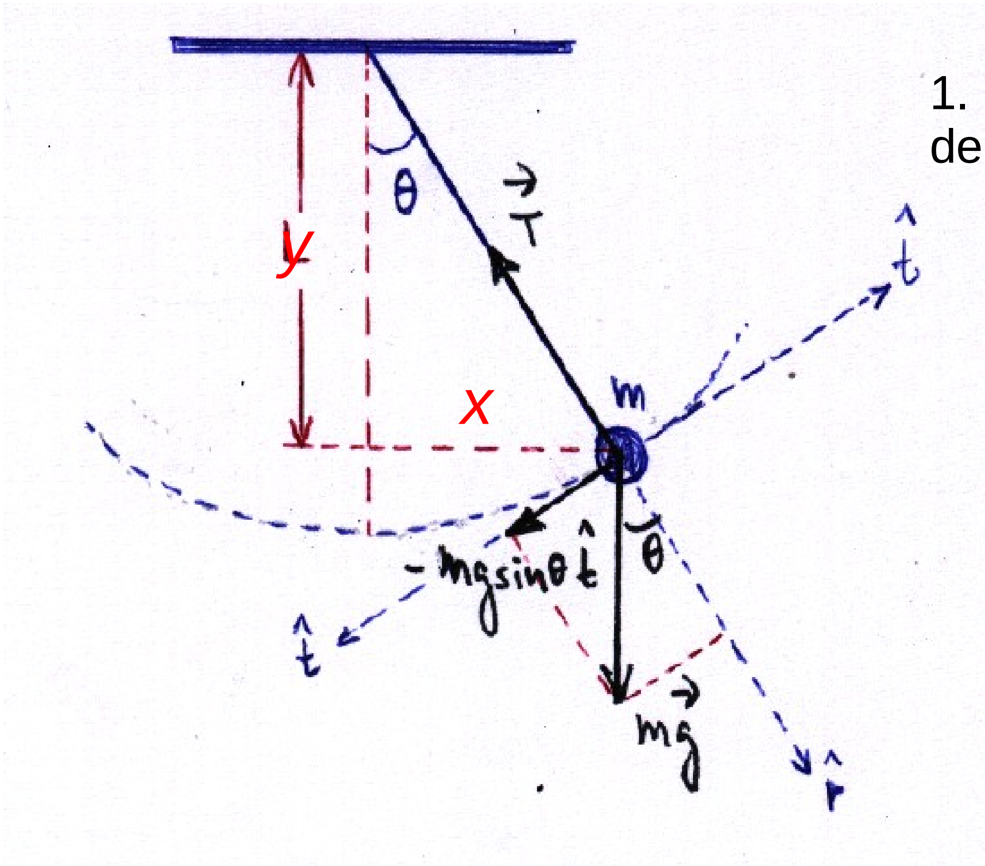



τ = 28.4s

Período medido pelo Modellus

# Forma diferencial de modelagem

## Exemplo: Pêndulo preso no teto




Como modelar graficamente o problema?

1. Defina as coordenadas *x* e *y* da massa *m* dentro do modelo Matemático.

$$\frac{dq}{dt} = w$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{-g}{L} \times \sin(q)$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= L \times \sin(q) \\ y &= L \times \cos(q) \end{aligned}}$$

$$vt = w \times L$$

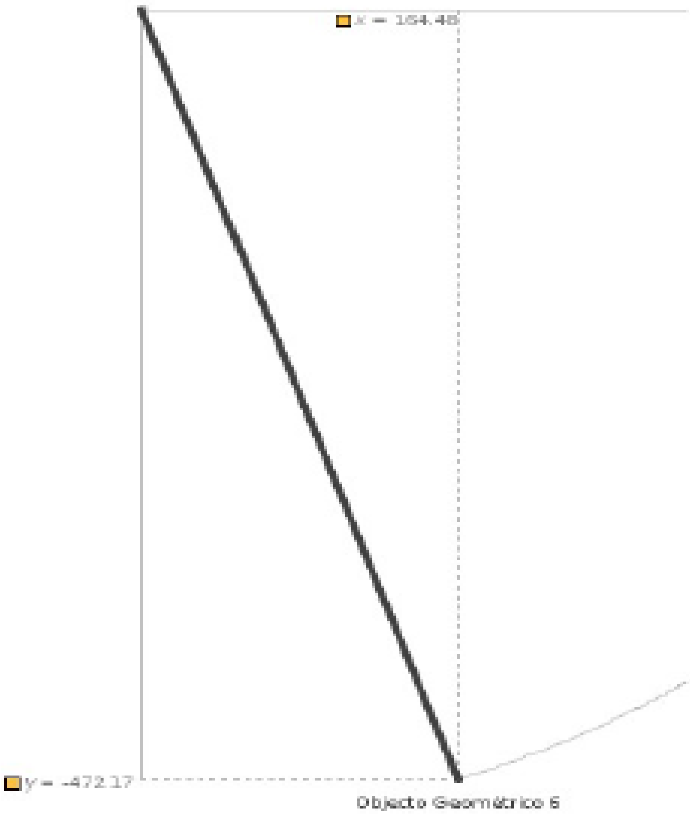
$$vx = vt \times \cos(q)$$

$$vy = -vt \times \sin(q)$$

$$q_0 = a$$

# Forma diferencial de modelagem

## Exemplo: Pêndulo preso no teto




Como modelar graficamente o problema?

2. Na aba Objectos, insira um Objecto Geométrico dentro da tela de visualização, que representará o comprimento *L* do pêndulo.

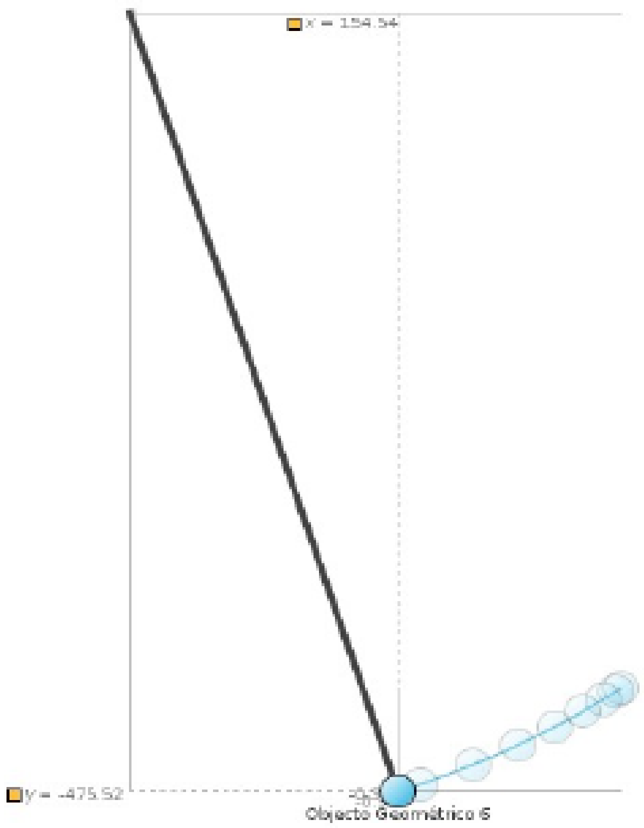
3. Associe as Coordenadas Horizontal e Vertical do Objecto Geométrico com as variáveis *x* e *y*, respectivamente, definidas no Modelo Matemático.

4. Para uma melhor visualização, mude o valor de *L* dentro da aba Parâmetros. Cuidado com o sinal de *L*.

5. Se a execução for iniciada, o Objeto Geométrico inserido será movimentado.

# Forma diferencial de modelagem

## Exemplo: Pêndulo preso no teto




Como modelar graficamente o problema?

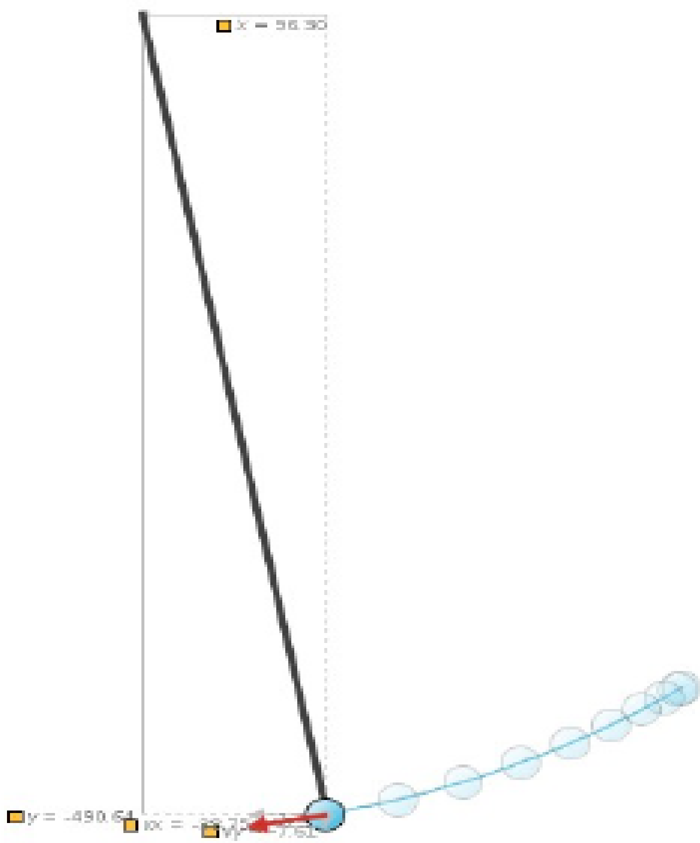
2. Na aba Objectos, insira uma Partícula dentro da tela de visualização, que representará a massa *m* do pêndulo.

3. Ao invés de associar a Partícula à qualquer uma das variáveis do Modelo Matemático, na aba Animação, opção Ligar o Objecto a: escolha o Objeto Geométrico que representa o comprimento *L* do pêndulo.

4. Para que a Partícula fica na extremidade do Objecto Geométrico, mude as Coordenadas Horizontal e Vertical da Partícula para 0.0 e 0.0, respectivamente.

# Forma diferencial de modelagem

## Exemplo: Pêndulo preso no teto



Como modelar graficamente o problema?

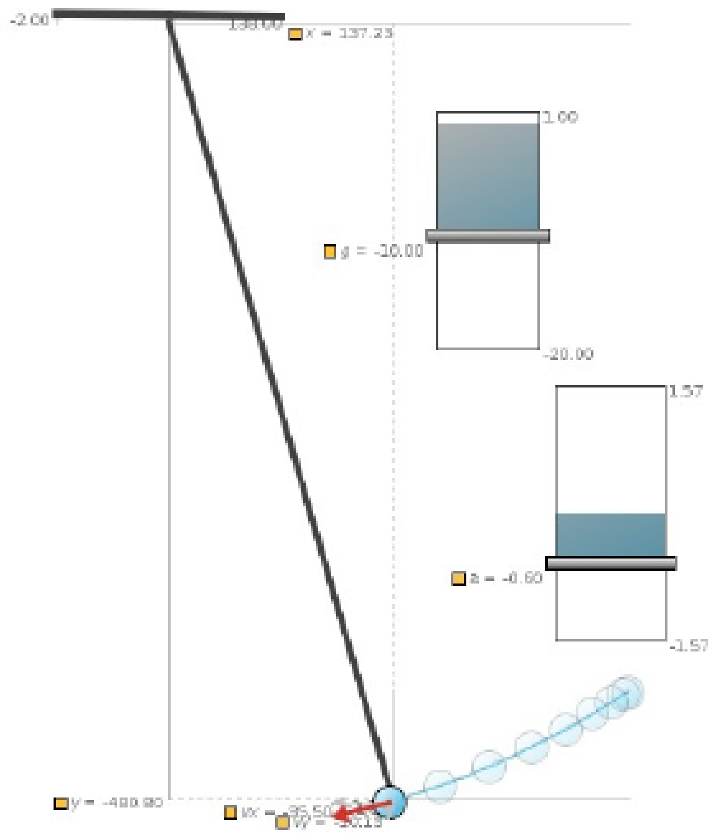
2. Na aba Objectos, insira um Vector dentro da tela de visualização, que representará a velocidade tangencial da massa *m*.

3. O Vector deve ser ligado à massa *m*. Para isto, na aba Animação, opção Ligar o Objecto a: escolha o Partícula que representa a massa *m*.

4. Para que o Vector represente a velocidade tangencial, associe as Coordenadas Horizontal e Vertical para as componentes *x* e *y* da velocidade definidas no Modelo Matemático.

# Forma diferencial de modelagem

## Exemplo: Pêndulo preso no teto




Como modelar graficamente o problema?

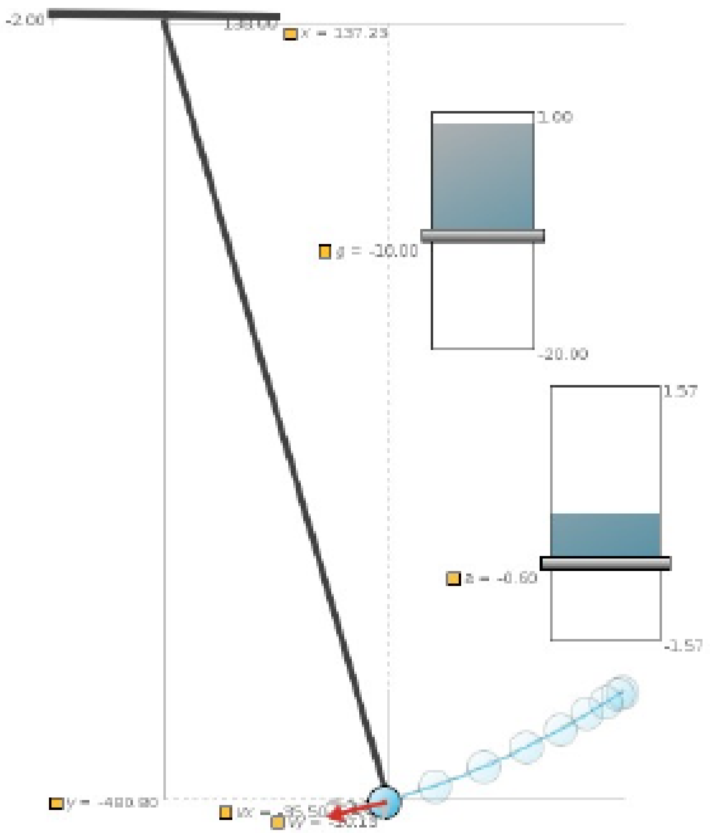
2. O teto pode ser feito inserindo um novo Objecto Geométrico e movimentando ele para a posição desejada.

3. Insira um Indicador de Nível para controlar o valor da aceleração da gravidade *g*.

4. Insira um Indicador de Nível para controlar o valor do Parâmetro a que define o Valor Inicial do ângulo $\theta$, $\theta_0$. Cuidado na definição de ângulos, que no Modellus devem estar em radianos, caso o Modelo Matemático use funções trigonométricas. Os ângulos são definidos na aba Início, opção Ângulos.

# Forma diferencial de modelagem

## Exemplo: Pêndulo preso no teto



Complemente o modelo do **pêndulo no teto**, com os seguintes elementos:

(a) Insira um Vector que representa a **força de tensão *T*** no cabo que sustenta a massa *m* do pêndulo. Este Vector deverá ser representado ligado à massa *m* e ao longo do cabo.

(b) Insira um Vector que representa a **força peso *P*** da massa *m* do pêndulo. Este Vector deverá ser representado ligado à massa *m*.

(c) Insira elementos gráficos que permitam ao usuário saber os valores das forças peso e tensão em qualquer ponto da trajetória.

(d) Insira elementos gráficos que permitam ao usuário saber os valores da **energia cinética**, **energia potencial** e **energia mecânica** da massa m ao longo da evolução temporal.