UNIVERSIDADE FEDERAL DO PELOTAS

Instituto de Física e Matemática —- Programa de Pós-Graduação em Física

Roteiro para prova 2 - 2016

1. Considere um gás ideal de N férmions não interagentes de spin 1/2 no limite ultra-relativístico, cuja relação energia-momento é dada por $\epsilon(\vec{p}) = c|\vec{p}|$. Estes férmions estão confinados numa caixa cúbica de volume $V = L^3$, tal que a densidade do gás é $n = N/V$, de forma que no limite termodinâmico $V \to \infty$ a densidade n é fixa. Pede-se:

(a) Encontre a densidade de estados por unidade de energia e de volume, $g(\epsilon)$, para este gás.

(b) Encontre a energia de Fermi do gás.

(c) Calcule a pressão do gás para $T = 0$.

2. Considere o limite degenerado de um gás de Fermi, formado por partículas não-interagentes e não-relativísticas, em **duas dimensões**. Pede-se:

(a) Encontre a densidade de estados $g(\epsilon)$.

(b) Encontre a energia de Fermi e a correspondente densidade de energia a $T = 0$.

(c) Levando em conta que a densidade de partículas n é dada por

$$n = \int_0^\infty d\epsilon \, \frac{\epsilon}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1} \, ,$$

encontre o potencial químico em função da temperatura, $\mu(T)$, para densidade n fixa. Usando a expressão para $\mu(T)$, obtenha uma aproximação válida para $T \ll T_F$.

(Pathria 5.1) (a) Calcule a matriz densidade ρ_{mn} do spin de um elétron na representação que torna $\hat{\sigma}_x$ diagonal.

(b) A seguir, mostre que o valor $\langle \sigma_z \rangle$, resultante nesta representação, é exatamente igual àquele obtido na seção 5.3 do Pathria.

Sugestão: A representação que deves usar neste problema é obtida a partir daquela usada na seção 5.3, usando uma transformação do tipo $\tilde{U}\hat{\sigma}\tilde{U}^\dagger$, onde

$$\tilde{U} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

é o operador unitário.

(Pathria 5.3) Obtenha a matriz densidade ρ (a) para uma partícula livre e (b) para um oscilador harmônico linear, na representação de momento.

(Pathria 6.1) Mostre que a entropia de um gás ideal de bósons em equilíbrio térmico é dada pela expressão

$$S = k_B \sum_{\varepsilon} [\langle n_\varepsilon + 1\rangle \ln\langle n_\varepsilon + 1\rangle - \langle n_\varepsilon\rangle \ln\langle n_\varepsilon\rangle] \ ,$$

enquanto que para um gás ideal de férmions

$$S = k_B \sum_{\varepsilon} [-\langle 1 - n_\varepsilon\rangle \ln\langle 1 - n_\varepsilon\rangle - \langle n_\varepsilon\rangle \ln\langle n_\varepsilon\rangle] \ .$$

(Pathria 6.3) Usando a notação da seção 6.2 do Pathria (terceira edição), se o número de ocupação n_ε de um nível de energia ε está restrito aos valores $0, 1, \ldots, l$, mostre que o número de ocupação médio deste nível se escreve como

$$\langle n_\varepsilon \rangle = \frac{1}{z^{-1}e^{\beta\varepsilon} - 1} - \frac{l+1}{(z^{-1}e^{\beta\varepsilon})^{l+1} - 1} \ .$$

Verifique que quando $l = 1$ o resultado acima produzirá $\langle n_\varepsilon\rangle_{\mathrm{FD}}$, enquanto se $l \to \infty$ teremos $\langle n_\varepsilon\rangle_{\mathrm{BE}}$.

(Pathria 7.4) (a) Mostre que para um gás ideal de bósons

$$\frac{1}{z}\left(\frac{\partial z}{\partial T}\right)_P = -\frac{5}{2T}\,\frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} \ .$$

(b) Em seguida, mostre que

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{(\partial z/\partial T)_P}{(\partial z/\partial T)_v} = \frac{5}{3}\,\frac{g_{5/2}(z) g_{1/2}(z)}{[g_{3/2}(z)]^2} \ .$$

(Pathria 7.5) (a) Mostre que a compressibilidade isotérmica κ_T e a compressibilidade adiabática κ_S de um gás ideal de bósons são dadas por

$$\kappa_T = \frac{1}{nk_BT}\,\frac{g_{1/2}(z)}{g_{3/2}(z)} \ , \qquad \kappa_S = \frac{3}{5nk_BT}\,\frac{g_{3/2}(z)}{g_{5/2}(z)} \ ,$$

onde $n = N/T$ é a densidade de partículas do gás.

(b) Obtenha o limite clássico e o limite $z \to 1$ para estas duas expressões.

(Pathria 7.6) Mostre que para um gás ideal de bósons a derivada do calor específico C_V é dada por

$$\frac{1}{Nk_B}\left(\frac{\partial C_V}{\partial T}\right)_V = \begin{cases} \frac{1}{T}\left[\frac{45}{8}\,\frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} - \frac{9}{4}\,\frac{g_{3/2}(z)}{g_{1/2}(z)} - \frac{27}{8}\,\frac{\{g_{3/2}(z)\}^2 g_{-1/2}(z)}{\{g_{1/2}(z)\}^3}\right], & \text{para } T > T_c \ , \\ \frac{45}{8}\,\frac{v}{T\lambda^3}\,\zeta\left(\frac{5}{2}\right), & \text{para } T < T_c \ , \end{cases}$$

onde $v = V/N$. Em seguida, calcule $\frac{1}{Nk_B}\left(\frac{\partial C_V}{\partial T}\right)_V$ para $T = T_c^+$. Finalmente, mostre que a descontinuidade na derivada de C_V na temperatura de transição é dada por

$$\left(\frac{\partial C_V}{\partial T}\right)_{T=T_c^-} - \left(\frac{\partial C_V}{\partial T}\right)_{T=T_c^+} = \frac{27}{16\pi}\,\frac{Nk_B}{T_c}\left\{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)\right\}^2 \approx 3.665\,\frac{Nk_B}{T_c}$$

(Pathria 7.7) Avalie as quantidades $(\partial^2 P/\partial T^2)_v$, $(\partial^2 \mu/\partial T^2)_v$ e $(\partial^2 \mu/\partial T^2)_P$ para um gás ideal de bósons. Em seguida, verifique as estas quantidades satisfazem as relações termodinâmicas

$$C_V = VT\left(\frac{\partial^2 P}{\partial T^2}\right)_v - NT\left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial T^2}\right)_v$$

e

$$C_P = -NT\left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial T^2}\right)_P \; .$$

(Pathria 8.4) Para um gás ideal de férmions, use a relação termodinâmica

$$C_P - C_V = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = TV\kappa_T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V^2 \; ,$$

onde κ_T é a compressibilidade isotérmica, para mostrar que

$$\frac{C_P - C_V}{C_V} = \frac{4}{9}\,\frac{C_V}{Nk_B}\,\frac{f_{1/2}(z)}{f_{3/2}(z)} \approx \frac{\pi^2}{3}\left(\frac{k_B T}{\varepsilon_F}\right)^2 \qquad (k_B T \ll \varepsilon_F)\; .$$