

UNIDADE III - Elementos de probabilidades

3.1. Introdução à teoria das probabilidades

3.1.1. Introdução

3.1.2. Conceitos fundamentais

3.1.3. Conceitos de probabilidade

3.1.4. Teoremas para o cálculo de probabilidades

3.1.5. Probabilidade condicional e independência

3.2. Variáveis aleatórias

3.2.1. Introdução e conceito

3.2.2. Variáveis aleatórias discretas

3.2.3. Variáveis aleatórias contínuas

3.3. Distribuições de probabilidade

3.3.1. Distribuições de probabilidade de variáveis discretas

3.3.2. Distribuições de probabilidade de variáveis contínuas

1. Resumo das distribuições discretas

2. Aproximações entre as distribuições

Distribuições discretas

1. Distribuição de Bernoulli
2. Distribuição Binomial
3. Distribuição Hipergeométrica
4. Distribuição de Poisson
5. Distribuição Multinomial
6. Distribuição Geométrica
7. Distribuição Binomial Negativa
8. Distribuição Hipergeométrica Negativa
9. Distribuição Uniforme

X é o número sucessos



1. Resumo das distribuições discretas

1. Distribuição de Bernoulli

Descreve probabilisticamente experimentos aleatórios que possuem apenas dois resultados possíveis.

$$X = \text{número de sucessos} \quad S_X = \{0, 1\}$$

Função de probabilidade

$$P(X = x) = \pi^x (1 - \pi)^{1-x}$$

Parâmetro: π = probabilidade de sucesso

Medidas descritivas

$$E(X) = \mu = \pi$$

$$V(X) = \sigma^2 = \pi (1 - \pi)$$

$$a_3 = \frac{(1 - \pi) - \pi}{\sqrt{\pi(1 - \pi)}}$$

Exemplo:

Um atirador dispara um tiro contra um alvo.

$$S = \{\text{acertar, errar}\}$$

Consideramos um dos resultados como sucesso.

sucesso = **acertar**

fracasso = errar

X = número de sucessos

$$S_X = \{0, 1\}$$

π = probabilidade de sucesso

$1-\pi$ = probabilidade de fracasso

Exemplo:

Um atirador dispara um tiro contra um alvo. Sabe-se que a probabilidade do atirador acertar o alvo é 0,25.

$X = \text{número de sucessos (acertos)}$ $S_X = \{0, 1\}$

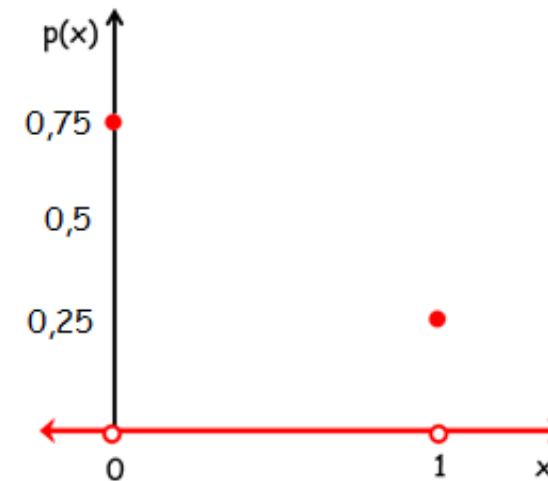
$\pi = 0,25$

Medidas descritivas

$$E(X) = \mu = \pi = 0,25$$

$$V(X) = \sigma^2 = \pi (1 - \pi) = 0,25 \cdot 0,75 = 0,1875$$

$$a_3 = \frac{(1 - \pi) - \pi}{\sqrt{\pi(1 - \pi)}} = \frac{0,75 - 0,25}{\sqrt{0,25 \cdot 0,75}} = 1,155$$



$X \sim \text{Ber} (\pi=0,25)$

2. Distribuição binomial

Descrição probabilística de uma sequência de experimentos de Bernoulli **independentes**.

Importante no contexto de amostragem **com reposição**.

$$X = \text{número de sucessos} \quad S_X = \{0, 1, \dots, n\}$$

Função de probabilidade

$$P(X = x) = P_n^{x, n-x} \pi^x (1 - \pi)^{n-x}$$

Parâmetros: n = número de repetições do experimento

π = probabilidade de sucesso

Medidas descritivas

$$E(X) = \mu = n\pi$$

$$V(X) = \sigma^2 = n\pi(1-\pi)$$

$$a_3 = \frac{(1 - \pi) - \pi}{\sqrt{n\pi(1 - \pi)}}$$

$$a_4 = 3 + \frac{1 - 6\pi(1 - \pi)}{n\pi(1 - \pi)}$$

Exemplo:

Quatro atiradores disparam contra um alvo. Todos foram igualmente treinados e têm a mesma probabilidade de acertar o alvo, que é 0,25.

$$S = \{AAAA, AAAE, AAEA, AEAA, EAAA, AAEE, \dots, EEEE\} \quad \#S = 2^4 = 16$$

X = número de sucessos

$$S_X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

n = número de repetições do experimento de Bernoulli

$$n = 4$$

π = probabilidade de sucesso

$$\pi = 0,25$$

$$P(X=4) = 0,25^4$$

$$P(X=3) = 4 \times 0,25^3 \times 0,75^1$$

$$P(X=2) = 6 \times 0,25^2 \times 0,75^2$$

$$P(X = x) = \underbrace{P_n^{x, n-x}}_{\text{Número de casos}} \underbrace{\pi^x (1 - \pi)^{n-x}}_{\text{Probabilidade de um caso}}$$

Número
de casos

Probabilidade
de um caso

Exemplo:

Quatro atiradores disparam contra um alvo. Todos foram igualmente treinados e têm a mesma probabilidade de acertar o alvo, que é 0,25.

$$S = \{AAAA, AAAE, AAEA, AEAA, EAAA, AAEE, \dots, EEEE\} \quad \#S = 2^4 = 16$$

X = número de sucessos

$$S_X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

n = número de repetições do experimento de Bernoulli

$$n = 4$$

π = probabilidade de sucesso

$$\pi = 0,25$$

$$P(X=4) = 0,25^4$$

$$P(X=3) = 4 \times 0,25^3 \times 0,75^1$$

$$P(X=2) = 6 \times 0,25^2 \times 0,75^2$$

$$P(X = x) = P_n^{x, n-x} \pi^x (1 - \pi)^{n-x}$$

$$P_n^{x, n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

Exemplo:

Quatro atiradores disparam contra um alvo. Todos foram igualmente treinados e têm a mesma probabilidade de acertar o alvo, que é 0,25.

$$X = \text{número de sucessos (acertos)} \quad S_X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$n = 4$$

$$\pi = 0,25$$

Função de probabilidade

$$P(X = x) = P_4^{x, 4-x} 0,25^x (1-0,25)^{4-x}, \text{ para } S_X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$P(X = 0) = P_4^{0, 4} 0,25^0 (1-0,25)^4$$

$$P(X = 1) = P_4^{1, 3} 0,25^1 (1-0,25)^3$$

...

$$P(X = 4) = P_4^{4, 0} 0,25^4 (1-0,25)^0$$

Exemplo:

Quatro atiradores disparam contra um alvo. Todos foram igualmente treinados e têm a mesma probabilidade de acertar o alvo, que é 0,25.

$$X = \text{número de sucessos (acertos)} \quad S_X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$
$$n = 4 \quad \pi = 0,25$$

Medidas descritivas

$$E(X) = \mu = n\pi = 4 \cdot 0,25 = 1$$

$$X \sim \text{Bin}(n=4, \pi=0,25)$$

$$V(X) = \sigma^2 = n\pi(1-\pi) = 4 \cdot 0,25 \cdot 0,75 = 0,75$$

$$a_3 = \frac{(1-\pi) - \pi}{\sqrt{n\pi(1-\pi)}} = \frac{0,75 - 0,25}{\sqrt{4 \cdot 0,25 \cdot 0,75}} = 0,433$$

Distribuição binomial

$$P(X = x) = P_n^{x, n-x} \pi^x (1 - \pi)^{n-x} \quad , \text{ para } S_x = \{0, 1, \dots, n\}$$

$$n = 1$$

$$P(X = x) = P_1^{x, 1-x} \pi^x (1 - \pi)^{1-x}$$

$$P(X = x) = \pi^x (1 - \pi)^{1-x}$$

Distribuição de Bernoulli

$$P(X = x) = \pi^x (1 - \pi)^{1-x}$$

3. Distribuição hipergeométrica

Descrição probabilística de uma sequência de experimentos de Bernoulli **dependentes**.

Importante no contexto de amostragem **sem reposição**.

X = número de sucessos $S_X = \{\max(0, n - N_2), \dots, \min(n, N_1)\}$

Função de probabilidade

$S_X = \{0, 1, 2, \dots, n\}$

$$P(X = x) = \frac{C_{N_1}^x C_{N_2}^{n-x}}{C_N^n}$$

Parâmetros: n = número de repetições do experimento

N = tamanho da população

N_1 = tamanho da subpopulação de interesse

Medidas descritivas

$$E(X) = \mu = n \frac{N_1}{N}$$

$$V(X) = \sigma^2 = n \frac{N_1}{N} \frac{N_2}{N} \left(\frac{N-n}{N-1} \right)$$

Exemplo:

Uma bandeja contém 10 xícaras de cafezinho, sete com açúcar e três sem açúcar. Três pessoas se aproximam da bandeja e se servem.



$$S = \{c_1c_2c_3, c_1c_2c_4, \dots, c_1c_2s_1, \dots, s_1s_2s_3\} \quad \#S = C_{10}^3 = 120$$

Consideramos um dos resultados como sucesso

sucesso = com açúcar

fracasso = sem açúcar

$$n = 3$$

$$N = 10$$

$$N_1 = 7$$

$$N_2 = 3$$

X = número de sucessos (com açúcar)

$$S_x = \{0, 1, 2, 3\}$$

n = número de repetições do experimento

N = tamanho da população ($N = N_1 + N_2$)

N_1 = tamanho da subpopulação de interesse (sucesso)

Exemplo:

Uma bandeja contém 10 xícaras de cafezinho, sete com açúcar e três sem açúcar. Três pessoas se aproximam da bandeja e se servem.

$$X = \text{número de sucessos (açúcar)} \quad S_X = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$n = 3, N = 10, N_1 = 7$$

Função de probabilidade

$$P(X = x) = \frac{C_7^x C_3^{3-x}}{C_{10}^3}, \text{ para } S_X = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$P(X = 0) = \frac{C_7^0 C_3^3}{C_{10}^3}$$

$$P(X = 2) = \frac{C_7^2 C_3^1}{C_{10}^3}$$

$$P(X = 1) = \frac{C_7^1 C_3^2}{C_{10}^3}$$

$$P(X = 3) = \frac{C_7^3 C_3^0}{C_{10}^3}$$

Exemplo:

Uma bandeja contém 10 xícaras de cafezinho, sete com açúcar e três com adoçante. Três pessoas se aproximam da bandeja e se servem.

$$X = \text{número de sucessos (açúcar)} \quad S_X = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$n = 3, N = 10, N_1 = 7$$

$$N = N_1 + N_2$$

$$X \sim \text{Hip} (n=3, N=10, N_1=7)$$

Medidas descritivas

$$E(X) = n \frac{N_1}{N} = 3 \frac{7}{10} = 2,1$$

$$V(X) = n \frac{N_1}{N} \frac{N_2}{N} \left(\frac{N-n}{N-1} \right) = 3 \frac{7}{10} \frac{3}{10} \left(\frac{10-3}{10-1} \right) = 0,49$$

Exemplo:

Uma bandeja contém 10 xícaras de cafezinho, sete com açúcar e três com adoçante. Três pessoas se aproximam da bandeja e se servem.

$$X = \text{número de sucessos (açúcar)} \quad S_X = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$n = 3, N = 10, N_1 = 7$$

$$N = N_1 + N_2$$

$$X \sim \text{Hip} (n=3, N=10, N_1=7)$$

Medidas descritivas

$$E(X) = n \frac{N_1}{N} = 3 \frac{7}{10} = 2,1$$

$$V(X) = n \frac{N_1}{N} \frac{N_2}{N} \left(\frac{N-n}{N-1} \right) = 3 \frac{7}{10} \frac{3}{10} \left(\frac{10-3}{10-1} \right) = 0,49$$

4. Distribuição de Poisson

Descrição probabilística da sequência de um **grande número** de fenômenos **independentes**, com probabilidade de sucesso **muito pequena**, que ocorrem por unidade de **tempo** ou de **superfície** ou de **volume**, com média de sucessos constante.

Importante na descrição de eventos de ocorrência rara.

X = número de sucessos $S_X = \{0, 1, 2, \dots\}$ ← espaço amostral infinito

Função de probabilidade

$$P(X = x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$$

Parâmetro: λ = número médio de sucessos

Medidas descritivas

$$E(X) = \mu = \lambda$$

$$V(X) = \sigma^2 = \lambda$$

$$a_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

$$a_4 = 3 + \frac{1}{\lambda}$$

Exemplo:

A taxa média de chegada de clientes em um posto de serviços é de 0,5 por minuto.

X = número de clientes que chegam no posto de serviço por minuto

$$S_X = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

λ = número médio de sucessos (clientes)

$$\lambda = E(X) = 0,5$$

Função de probabilidade

$$P(X = x) = e^{-0,5} \frac{0,5^x}{x!}, \text{ para } S_X = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Exemplo:

A taxa média de chegada de clientes em um posto de serviços é de 0,5 por minuto.

X = número de clientes que chegam no posto de serviço por minuto

$$S_X = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \quad \lambda = 0,5$$

Função de probabilidade

$$P(X = x) = e^{-0,5} \frac{0,5^x}{x!}, \text{ para } S_X = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$P(X = 0) = e^{-0,5} \frac{0,5^0}{0!} = 0,6065$$

$$P(X = 2) = e^{-0,5} \frac{0,5^2}{2!} = 0,07581$$

$$P(X = 1) = e^{-0,5} \frac{0,5^1}{1!} = 0,3033$$

$$P(X = 3) = e^{-0,5} \frac{0,5^3}{3!} = 0,01263$$

Exemplo:

A taxa média de chegada de clientes em um posto de serviços é de 0,5 por minuto.

$X =$ número de clientes que chegam no posto de serviço por minuto

$$S_X = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \quad \lambda = 0,5$$

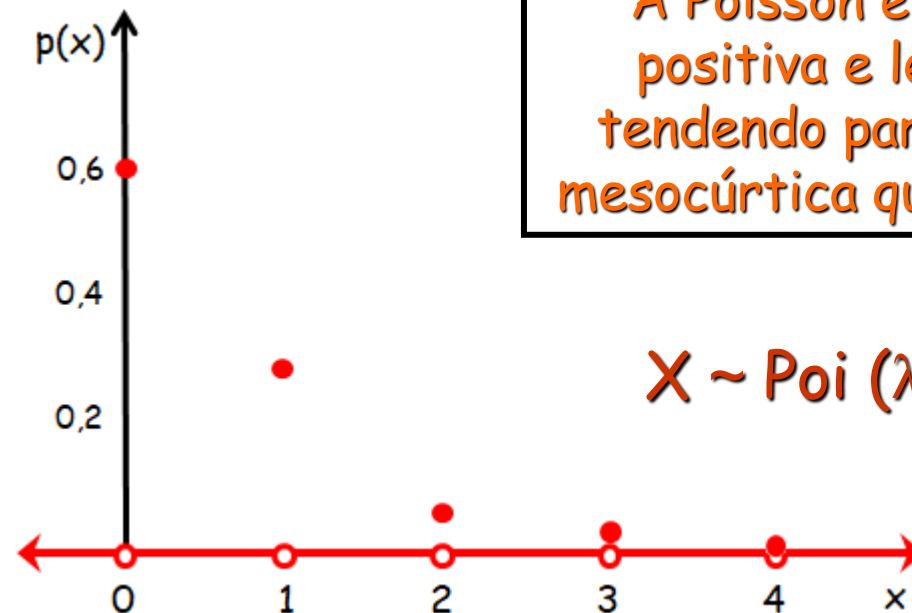
Medidas descritivas

$$E(X) = \mu = \lambda = 0,5$$

$$V(X) = \sigma^2 = \lambda = 0,5$$

$$a_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1,414$$

$$a_4 = 3 + \frac{1}{\lambda} = 3 + 2 = 5$$



A Poisson é assimétrica positiva e leptocúrtica, tendendo para simétrica e mesocúrtica quando μ cresce.

Distribuições discretas

1. Distribuição de Bernoulli

$$P(X = x) = \pi^x (1 - \pi)^{1-x} \quad X \sim \text{Ber} (\pi=0,25)$$

2. Distribuição Binomial

$$P(X = x) = \binom{n}{x} \pi^x (1 - \pi)^{n-x} \quad X \sim \text{Bin} (n=4, \pi=0,25)$$

3. Distribuição Hipergeométrica

$$P(X = x) = \frac{\binom{N_1}{x} \binom{N - N_1}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad X \sim \text{Hip} (n=3, N=10, N_1=7)$$

4. Distribuição de Poisson

$$P(X = x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \quad X \sim \text{Poi} (\lambda=0,5)$$



2. Aproximações entre as distribuições

Formas limites da distribuição binomial

- ⇒ Em determinadas circunstâncias, uma distribuição de probabilidade pode tender para outra.
- ⇒ Os casos mais importantes de aproximações entre distribuições são:
 1. **Hipergeométrica → Binomial**
 2. **Binomial → Poisson**
 3. **Binomial → Normal**

Formas limites da distribuição binomial

1. Hipergeométrica → Binomial

Quando N (tamanho da população) é muito grande (ou tende para $+\infty$), a distribuição **hipergeométrica** se aproxima da distribuição **binomial**.

Binomial

$$V(X) = n\pi(1 - \pi)$$

Hipergeométrica

$$V(X) = n \frac{N_1}{N} \frac{N_2}{N} \left(\frac{N-n}{N-1} \right)$$

fator de correção

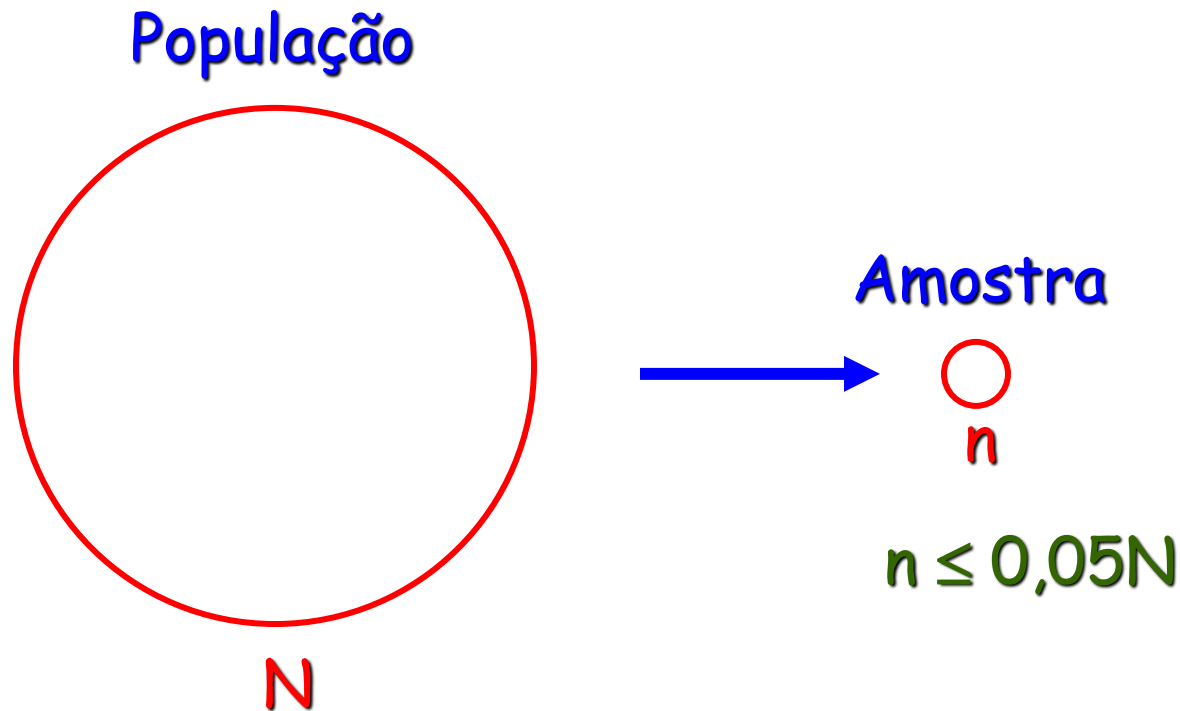
Quando N tende para infinito, o fator de correção se aproxima de 1.

$$\frac{N-n}{N-1} \cong \frac{N-n}{N} = \frac{N}{N} - \frac{n}{N} = 1 - \frac{n}{N} \cong 1$$

tende a zero (pointing to $\frac{n}{N}$)

tende a $+\infty$ (pointing to N)

Esta aproximação é considerada satisfatória quando o número de elementos retirados (n) não excede 5% da população (N), isto é, $n \leq 0,05N$.



Quando o tamanho da amostra representa menos de 5% do tamanho da população, a população é tão grande em relação a amostra que pode ser considerada infinita.

2. Binomial \rightarrow Poisson

Quando n (número de repetições do experimento) é muito grande (ou tende para $+\infty$) e π (probabilidade de sucesso) é muito pequena (ou tende para 0) a distribuição **binomial** se aproxima da distribuição de **Poisson**.

$$E(X) \rightarrow n\pi < 10 \text{ e } n \geq 100$$

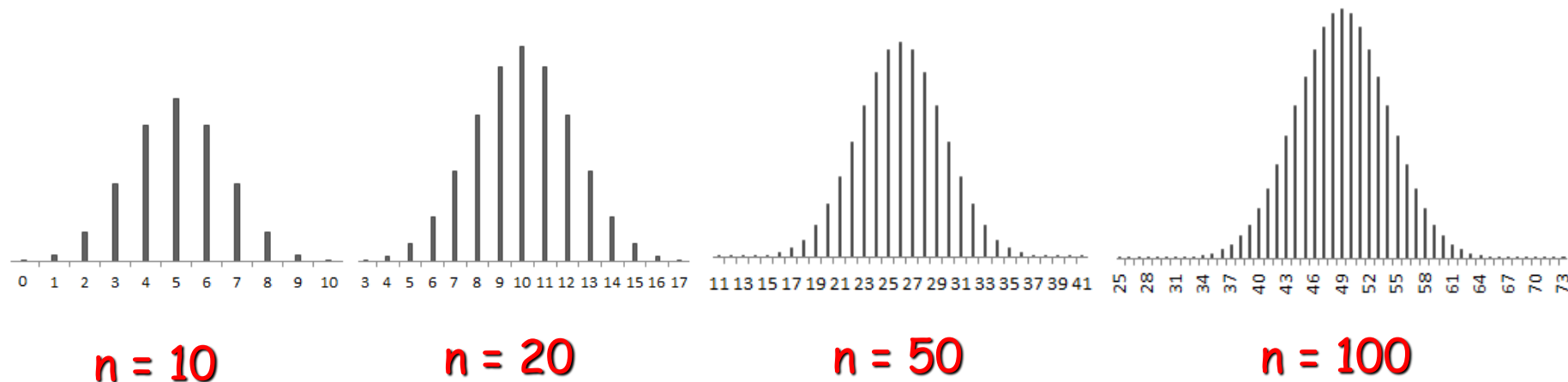
$$n\pi < 5 \text{ e } n \geq 50 \quad (\text{Devore, 2015})$$

3. Binomial \rightarrow Normal

Quando n (número de repetições do experimento) é grande (ou tende para $+\infty$) e π (probabilidade de sucesso) se aproxima de 0,5, a distribuição **binomial** se aproxima da distribuição **normal**.

Se $\pi=(1-\pi)=0,5$, a distribuição binomial será simétrica.

A distribuição binomial se aproxima da normal à medida que o n cresce.



Bibliografia

BUSSAB, W.O.; MORETTIN, P.A. **Estatística Básica**. São Paulo: Saraiva. 2006. 526p.

FERREIRA, D.F. **Estatística Básica**. Lavras: Editora UFLA, 2005, 664p.

FREUND, J.E., SIMON, G.A. **Estatística Aplicada. Economia, Administração e Contabilidade**. 9.ed., Porto Alegre: Bookman, 2000. 404p.

MEYER, P. L. **Probabilidade: aplicações à estatística**. Rio de Janeiro: LTC, 1976.

MLODINOW, L. **O andar do bêbado. Como o acaso determina nossas vidas**. Rio de Janeiro: Editora Zahar, 2009, 264p.

SILVEIRA JÚNIOR, P., MACHADO, A.A., ZONTA, E.P., SILVA, J.B. **da Curso de Estatística**. v.2, Pelotas: Universidade Federal de Pelotas, 1992. 234p.

Sistema Galileu de Educação Estatística. Disponível em:
<http://www.galileu.esalq.usp.br/topico.html>