3.3.1.3 Distribuição hipergeométrica

Definição: Modelo que descreve probabilisticamente os resultados de uma sequência de experimentos de Bernoulli **dependentes**. Refere-se a experimentos que se caracterizam por retiradas **sem reposição**, onde a probabilidade de sucesso **se altera** a cada retirada.

⇨ A **distribuição hipergeométrica não configura um processo de Bernoulli** porque a probabilidade de sucesso muda de um experimento para o outro

⇨ Essa distribuição é extremamente importante no contexto de **amostragem sem reposição**

Experimento: Uma bandeja contém 10 xícaras de cafezinho, sete com açúcar e três com adoçante. Três pessoas se aproximam da bandeja e se servem.

Se a variável aleatória X é definida como o número de xícaras de café com açúcar, construa a distribuição de probabilidade de X.

10 Xícaras → | 7 Açúcar | 3 Adoçante |

→ 3 xícaras (n=3)

$$S = \{A_1A_2A_3,\ A_1A_2A_4, \ldots,\ A_1A_2a_1,\ \ldots,\ a_1a_2a_3\}$$

A= açúcar
a= adoçante

$$\#S = C_{10}^{3} = 120$$

X = número de xícaras de café **com açúcar**

$S = \{A_1A_2A_3, A_1A_2A_4, \ldots, A_1A_2a_1, \ldots, a_1a_2a_3\}$

X = número de xícaras de café **com açúcar**

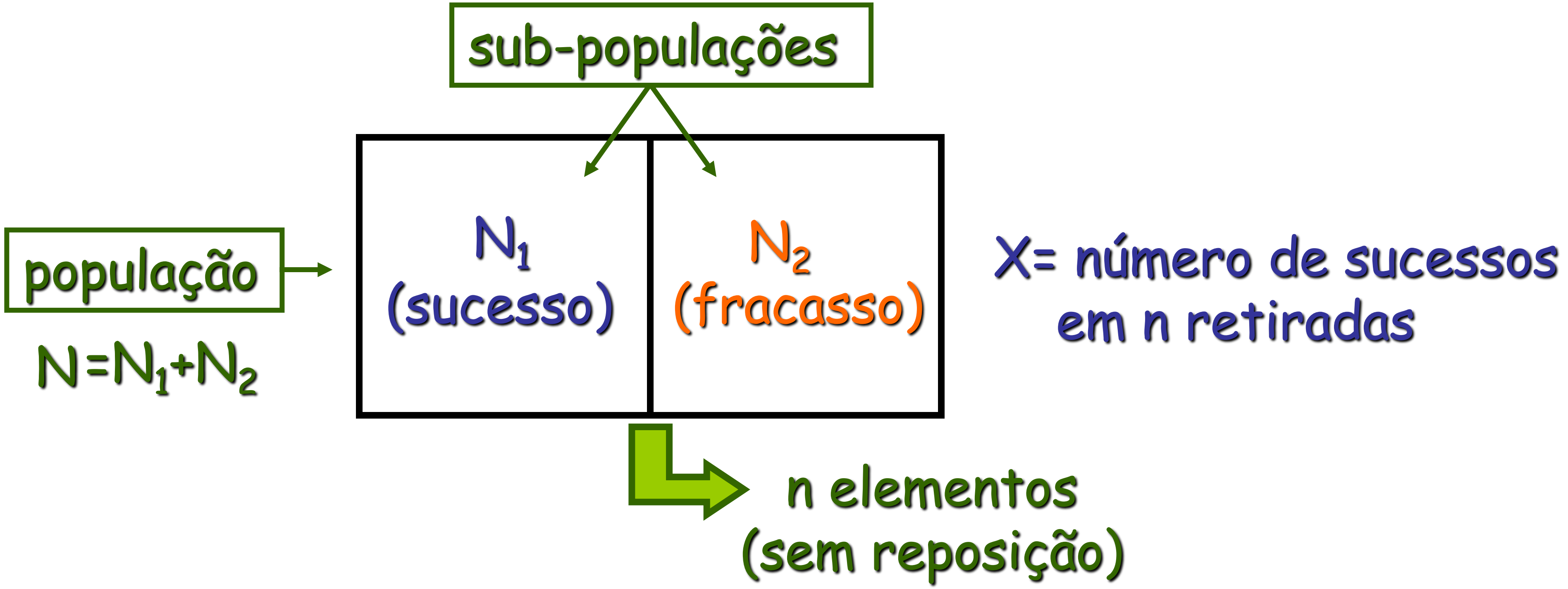
$S_X = \{0, 1, 2, 3\}$

$$P(X=0) = \frac{C_7^0\, C_3^3}{C_{10}^3} = \frac{1 \times 1}{120} = \frac{1}{120} = 0{,}008333$$

$$P(X=1) = \frac{C_7^1\, C_3^2}{C_{10}^3} = \frac{7 \times 3}{120} = \frac{21}{120} = 0{,}175$$

$$P(X=2) = \frac{C_7^2\, C_3^1}{C_{10}^3} = \frac{21 \times 3}{120} = \frac{63}{120} = 0{,}525$$

$$P(X=3) = \frac{C_7^3\, C_3^0}{C_{10}^3} = \frac{35 \times 1}{120} = \frac{35}{120} = 0{,}2917$$



- ⇨ Cada grupo de tamanho n formado é denominado **amostra**.
- ⇨ Todas as amostras têm a mesma chance de ocorrência.
- ⇨ Do ponto de vista probabilístico não faz diferença considerar retiradas individuais sem reposição ou retirada conjunta de grupos

Representação tabular

$X = x$	0	1	2	3	Σ
$P(X = x)$	0,00833	0,175	0,525	0,2917	1

Representação analítica

$$P(X = x) = \frac{C_7^x \, C_3^{3-x}}{C_{10}^3} \text{ , para } S_X = \{0, 1, 2, 3\}$$

Função de probabilidade

De modo geral, se X é uma variável que tem distribuição hipergeométrica, sua função de probabilidade será:

$$P(X = x) = \frac{C_{N_1}^x \, C_{N_2}^{n-x}}{C_N^n} \text{ , para } S_X = \{\max(0, n-N_2), \ldots, \min(n, N_1)\}$$

Parâmetros

$$P(X = x) = \frac{C_{N_1}^{x} \; C_{N_2}^{n-x}}{C_{N}^{n}}$$

parâmetros

A distribuição hipergeométrica tem três parâmetros:

n = número de repetições do experimento de Bernoulli

N = tamanho da população

N_1 = tamanho da subpopulação de interesse

$$X \sim Hip\,(n, N, N_1)$$

X tem distribuição hipergeométrica com parâmetros n, N e N_1

Medidas descritivas

- Média ou valor esperado

$$E(X) = \mu = \sum_{x \in S_X} x\,p(x)$$

Teorema: $E(X) = \mu = n\left(\frac{N_1}{N}\right)$

probabilidade de sucesso

- Variância

$$V(X) = \sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$$

Teorema: $V(X) = \sigma^2 = n\,\frac{N_1}{N}\,\frac{N_2}{N}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$

probabilidade de fracasso

Fator de correção para populações finitas

Binomial

$E(X) = n\pi$

$V(X) = n\pi(1-\pi)$

Profª. Clause Piana

População finita é aquela que pode ser esgotada por processo de amostragem.

⇨ Uma população será considerada finita quando tiver um **número finito** de elementos **e** a amostragem for efetuada **sem reposição**.

População infinita é aquela que não se esgota por processo de amostragem.

⇨ Uma população será considerada infinita quando tiver um **número infinito** de elementos **ou** quando amostragem for efetuada **com reposição**.

Medidas descritivas

- Média ou valor esperado

Teorema: $$E(X) = n\frac{N_1}{N}$$

A dependência não altera a média, mas altera a variância

- Variância

Teorema: $$V(X) = n\frac{N_1}{N}\frac{N_2}{N}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

Fator de correção é irrelevante para N grande

No exemplo:

$X = x$	0	1	2	3	Σ
$P(X = x)$	0,00833	0,175	0,525	0,2917	1

$$E(X) = \mu = \sum_{x \in S_X} x\,p(x)$$

$$E(X) = \mu = 0 \times 0{,}00833 + 1 \times 0{,}175 + 2 \times 0{,}525 + 3 \times 0{,}2917 = 2{,}1$$

$$V(X) = \sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = 4{,}9 - 2{,}1^2 = 0{,}49$$

$$E(X^2) = 0^2 \times 0{,}00833 + 1^2 \times 0{,}175 + 2^2 \times 0{,}525 + 3^2 \times 0{,}525 = 4{,}9$$

No exemplo: $X \sim Hip\ (n=3, N=10, N_1=7)$

$$E(X) = n\frac{N_1}{N} = 3\frac{7}{10} = 2{,}1$$ xícaras com açúcar

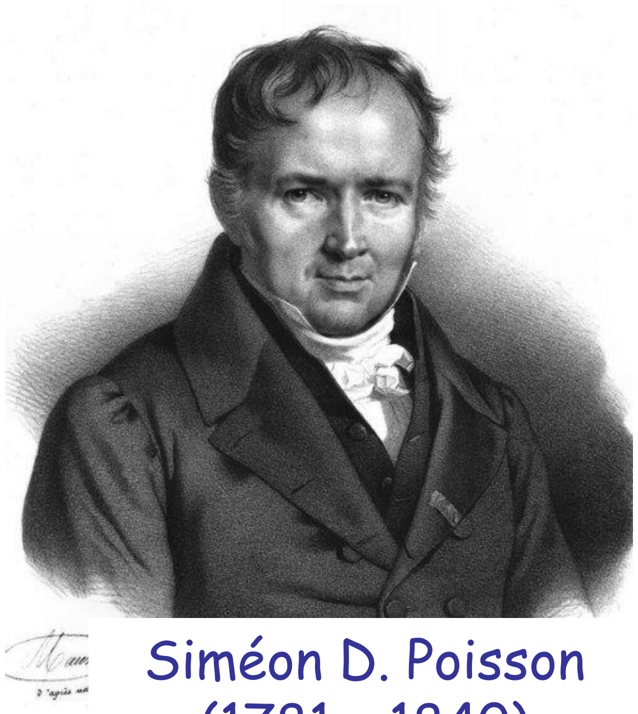
Significado: Se o experimento (escolher três xícaras) for repetido um grande número de vezes, o número médio de sucessos (xícaras de café com açúcar) obtidos será 2,1.

$$V(X) = n\frac{N_1}{N}\frac{N_2}{N}\left(\frac{N-n}{N-1}\right) = 3\frac{7}{10}\frac{3}{10}\left(\frac{10-3}{10-1}\right) = 0{,}49$$ xícaras com açúcar²

$$\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0{,}49} = 0{,}7$$ xícaras com açúcar

Significado: Se o experimento for repetido um grande número de vezes, a variação média do número de sucessos em relação ao valor esperado será 0,7.

3.3.1.4 Distribuição de Poisson



Siméon D. Poisson
(1781 – 1840)

A distribuição de Poisson foi assim designada em homenagem ao matemático e físico francês Siméon Denis Poisson.

Modelo de descrição de acontecimentos de ocorrência rara

Exemplo clássico da **distribuição de Poisson**: número de soldados do exército da Prússia mortos anualmente por coice de cavalo, entre 1875 e 1894.

3.3.1.4 Distribuição de Poisson

Definição: descreve probabilisticamente a sequência de um **grande número** de fenômenos **independentes** entre si, cada um com probabilidade de sucesso **muito pequena**.

⇨ Ocorre naturalmente quando se deseja contar o número de eventos que ocorrem por unidade de **tempo** ou de **superfície** ou de **volume**.

⇨ Pode ser considerada como uma binomial onde o número de experimentos (n) é grande, π é pequeno (sucesso raro) e $n\pi$ (média de sucessos) é constante.

Distribuição de Poisson ⇨ processo infinito de Bernoulli

Exemplos:

- número de peças defeituosas observadas em uma linha de produção num determinado período de tempo;
- número de acidentes de trabalho ocorridos numa grande empresa num determinado período de tempo;
- número de ciclones ocorridos em certa região num determinado período de tempo;
- número de formigueiros por unidade de área em uma região;
- número de bactérias por unidade de área em uma lâmina com extratos de uma planta;
- número de espermatozoides inviáveis de um touro por unidade de volume de sêmen.

⇨ Tem inúmeras aplicações na **simulação de sistemas** modelando o número de eventos ocorridos num intervalo de tempo, quando os eventos ocorrem a uma taxa constante.

Função de probabilidade

De modo geral, se X é uma variável que tem distribuição de Poisson, sua função de probabilidade será:

$$P(X = x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, \text{ para } S_X = \{0, 1, 2, ...\}$$

espaço amostral infinito

onde:

X: número de sucessos

e = 2,718 (base dos logaritmos neperianos)

λ: **número médio de sucessos** (sempre maior que zero)

Demonstra-se que $p(x) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^x}{x!}$ é uma função de probabilidade, provando que $\sum_{x \in S_X} p(x) = 1$. Como $S_X = \{0, 1, 2, ...\}$, temos:

$$\sum_{x=0}^{\infty} p(x) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda^0}{0!} + \frac{\lambda^1}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + ... \right)$$

$$= e^{-\lambda} \left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + ... \right)$$

$$= e^{-\lambda} e^{\lambda}$$

$$= e^{-\lambda+\lambda} = e^0 = 1$$

Série de Taylor

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$$

$$e^{\lambda} = 1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + ...$$

Parâmetros

$$P(X = x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$$ ← $\boxed{\text{parâmetro}}$

A distribuição de Poisson tem apenas um parâmetro:

λ = número médio de sucessos

$X \sim \mathrm{Poi}\,(\lambda)$

$\boxed{\text{X tem distribuição de Poisson com parâmetro } \lambda}$

Medidas descritivas

- Média ou valor esperado: $E(X) = \mu = \sum_{x \in S_X} x\,p(x)$

  Teorema: $E(X) = \mu = \lambda$

- Variância: $V(X) = \sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$

  Teorema: $V(X) = \sigma^2 = \lambda$

Na Poisson média e variância são iguais!!

Medidas descritivas

- **Média ou valor esperado:** $E(X) = \mu = \sum_{x \in S_X} x\,p(x)$

$$E(X) = \sum_{x \in S_X} x\,p(x) = \sum_{x=0}^{\infty} x\,e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$$

$$\boxed{\sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y}{y!} = e^{\lambda}}$$

$$= e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty} x\frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}\sum_{x=1}^{\infty} x\frac{\lambda}{x}\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$$

$$= e^{-\lambda}\sum_{x=1}^{\infty} \lambda\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} = e^{-\lambda}\,\lambda\sum_{x=1}^{\infty}\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$$, fazendo $y = x - 1$, temos

$$= e^{-\lambda}\,\lambda\boxed{\sum_{y=0}^{\infty}\frac{\lambda^y}{y!}} = e^{-\lambda}\,\lambda\,e^{\lambda} = e^{-\lambda+\lambda}\,\lambda = e^{0}\,\lambda = \lambda$$

Teorema: $E(X) = \mu = \lambda$

◆ Variância: $V(X) = \sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$

$$\boxed{\sum_{x=0}^{\infty} x \frac{\lambda^x}{x!} = \lambda e^{\lambda}}$$

$$\boxed{\sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y}{y!} = e^{\lambda}}$$

$$E(X^2) = \sum_{x \in S_X} x^2 p(x) = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} x^2 \frac{\lambda}{x} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$$

$$= e^{-\lambda} \lambda \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$$, fazendo $y = x - 1$, temos

$$= e^{-\lambda} \lambda \sum_{y=0}^{\infty} (y+1) \frac{\lambda^y}{y!} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{y=0}^{\infty} \left(y \frac{\lambda^y}{y!} + \frac{\lambda^y}{y!} \right) = e^{-\lambda} \lambda \left(\boxed{\sum_{y=0}^{\infty} y \frac{\lambda^y}{y!}} + \boxed{\sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y}{y!}} \right)$$

$$= e^{-\lambda} \lambda (\lambda e^{\lambda} + e^{\lambda}) = \lambda e^{\lambda} e^{-\lambda} \lambda + e^{\lambda} e^{-\lambda} \lambda = e^0 \lambda^2 + e^0 \lambda = \lambda^2 + \lambda$$

$$V(X) = E(X^2) - \mu^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

Teorema: $V(X) = \sigma^2 = \lambda$

- Coeficiente de assimetria

Teorema: $a_3 = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}$

A Poisson é assimétrica positiva, tendendo para a simetria quando μ cresce.

- Coeficiente de curtose

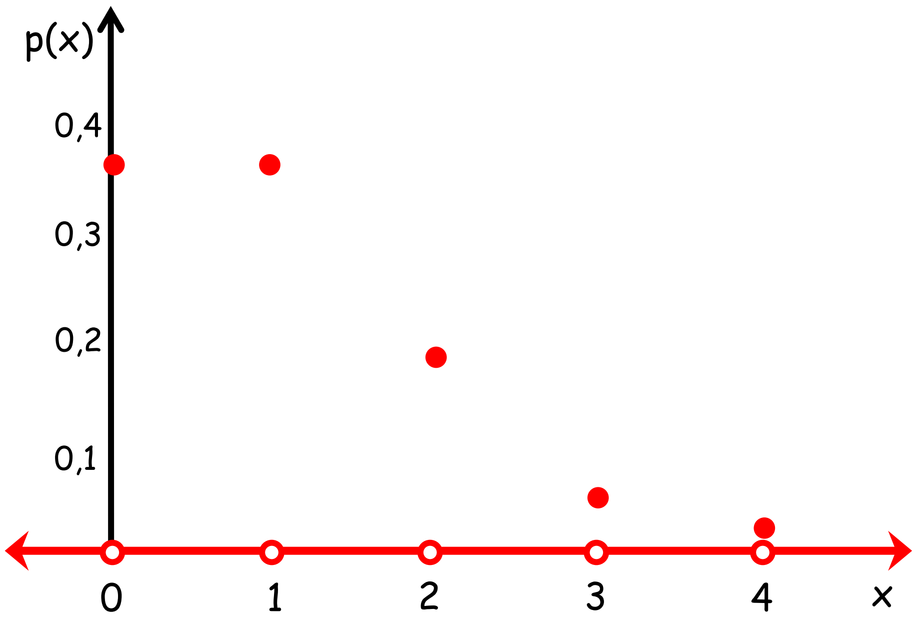
Teorema: $a_4 = 3 + \boxed{\dfrac{1}{\lambda}}$ ← Excesso de curtose ou curtose de Fisher

A Poisson é leptocúrtica, tendendo para mesocúrtica quando μ cresce.

$X \sim Poi\ (\lambda=1)$

$a_3 = 1$

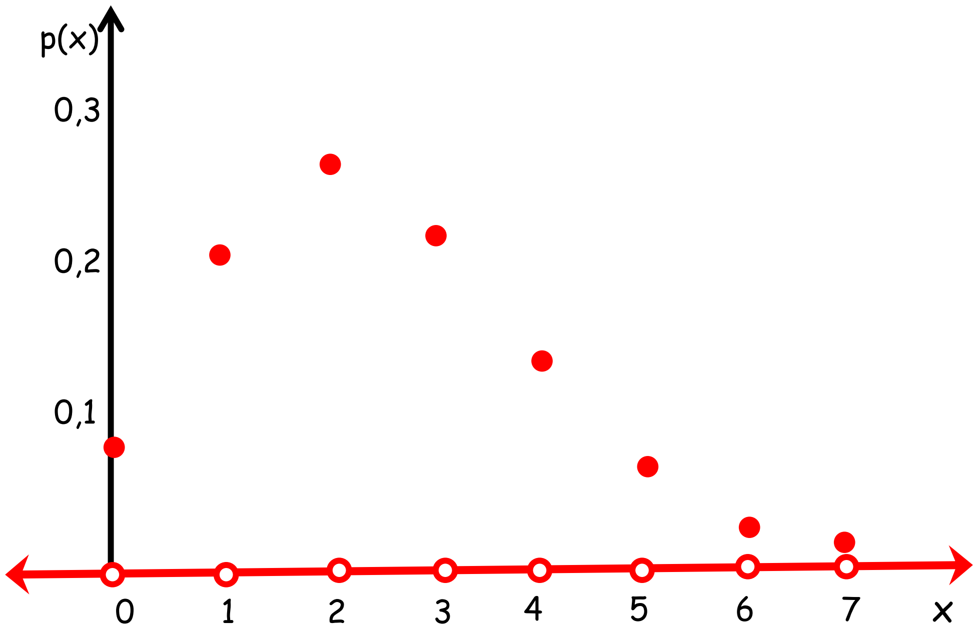
$a'_4 = 1$



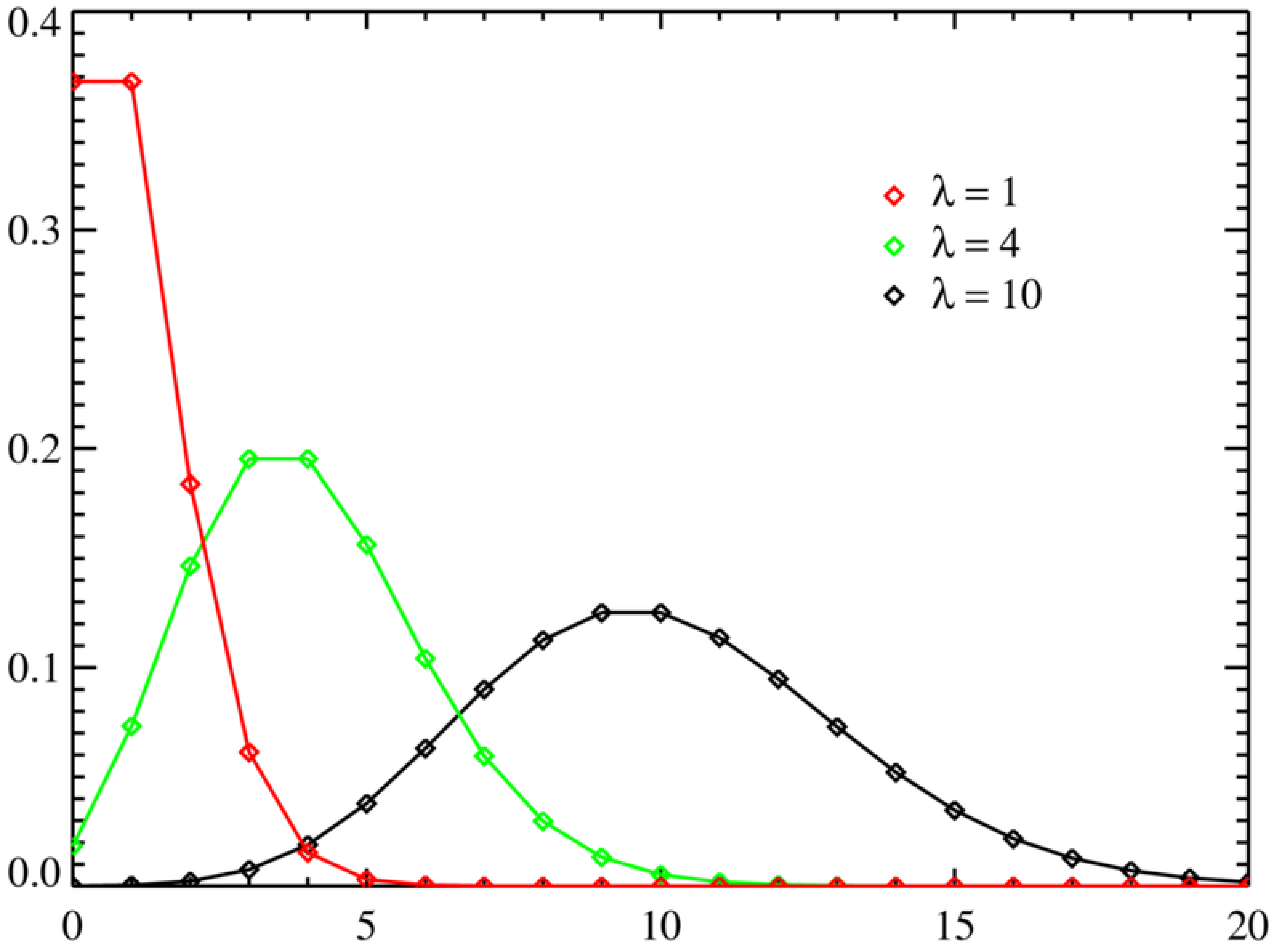
$X \sim Poi\ (\lambda=2,5)$

$a_3 = 0,63$

$a'_4 = 0,4$



A Poisson tende para a simetria quando $\mu=\lambda$ cresce.



3. Distribuição hipergeométrica

Descrição probabilística de uma sequência de experimentos de Bernoulli **dependentes**.
Importante no contexto de amostragem **sem reposição**.

X= número de sucessos $S_X=\{max(0, n-N_2), ..., min(n,N_1)\}$

Função de probabilidade

$S_X=\{0, 1, 2, ..., n\}$

$$P(X=x)=\frac{C_{N_1}^{x}\,C_{N_2}^{n-x}}{C_{N}^{n}}$$

Parâmetros: n = número de repetições do experimento
N = tamanho da população
N_1 = tamanho da subpopulação de interesse

Medidas descritivas

$$E(X)=\mu=n\frac{N_1}{N} \qquad V(X)=\sigma^2=n\frac{N_1}{N}\frac{N_2}{N}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

4. Distribuição de Poisson

Descrição probabilística da sequência de um **grande número** de fenômenos **independentes**, com probabilidade de sucesso **muito pequena**, que ocorrem por unidade de **tempo** ou de **superfície** ou de **volume**, com média de sucessos constante.
Importante na descrição de **eventos de ocorrência rara**.

X= número de sucessos $S_X=\{0, 1, 2, ...\}$ $\leftarrow$ espaço amostral infinito

Função de probabilidade

$$P(X = x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$$

Parâmetro: λ = número médio de sucessos

Medidas descritivas

$$a_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

$$E(X) = \mu = \lambda$$

$$V(X) = \sigma^2 = \lambda$$

$$a_4 = 3 + \frac{1}{\lambda}$$

Bibliografia

BUSSAB, W.O.; MORETTIN, P.A. **Estatística Básica**. São Paulo: Saraiva. 2006. 526p.

FERREIRA, D.F. **Estatística Básica**. Lavras: Editora UFLA, 2005, 664p.

FREUND, J.E., SIMON, G.A. **Estatística Aplicada. Economia, Administração e Contabilidade**. 9.ed., Porto Alegre: Bookman, 2000. 404p.

MEYER, P. L. **Probabilidade: aplicações à estatística**. Rio de Janeiro: LTC, 1976.

MLODINOW, L. **O andar do bêbado. Como o acaso determina nossas vidas**. Rio de Janeiro: Editora Zahar, 2009, 264p.

SILVEIRA JÚNIOR, P., MACHADO, A.A., ZONTA, E.P., SILVA, J.B. da **Curso de Estatística**. v.2, Pelotas: Universidade Federal de Pelotas, 1992. 234p.

Sistema Galileu de Educação Estatística. Disponível em: http://www.galileu.esalq.usp.br/topico.html