Gabarito da Lista 2 – Tópicos 2 e 3

1.

a) Redução da DQO: variável numérica contínua, escala de razão

Redução de ST: variável numérica contínua, escala de razão

b) Tabela auxiliar.

i	x	y	x^2	y^2	xy
1	3	5	9	25	15
2	7	11	49	121	77
3	11	21	121	441	231
4	15	16	225	256	240
5	18	16	324	256	288
6	27	28	729	784	756
7	29	27	841	729	783
8	30	25	900	625	750
9	30	35	900	1225	1050
10	31	30	961	900	930
11	31	40	961	1600	1240
12	32	32	1024	1024	1024
13	33	34	1089	1156	1122
14	33	32	1089	1024	1056
15	34	34	1156	1156	1156
16	36	37	1296	1369	1332
17	36	38	1296	1444	1368
18	36	34	1296	1156	1224
19	37	36	1369	1296	1332
20	38	38	1444	1444	1444
21	39	37	1521	1369	1443
22	39	36	1521	1296	1404
23	39	45	1521	2025	1755
24	40	39	1600	1521	1560
25	41	41	1681	1681	1681
26	42	40	1764	1600	1680
27	42	44	1764	1936	1848
28	43	37	1849	1369	1591
29	44	44	1936	1936	1936
30	45	46	2025	2116	2070
31	46	46	2116	2116	2116
32	47	49	2209	2401	2303
33	50	51	2500	2601	2550
Soma	1104	1124	41086	41998	41355
Média	33,45	34,06			

c) r = 0,9555

Interpretação: Correlação **forte** e **positiva** entre as variáveis redução da DQO e redução de ST, ou seja, existe uma forte tendência de valores altos de redução da DQO estarem associados a valores altos de redução de ST, e vice-versa.

d) $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + e_i$

onde:

y_i : redução da DQO é a variável resposta;

x_i : redução de ST é a variável preditora;

β_0 : é o intercepto, ou seja, o valor redução da DQO quando a redução de ST é zero;

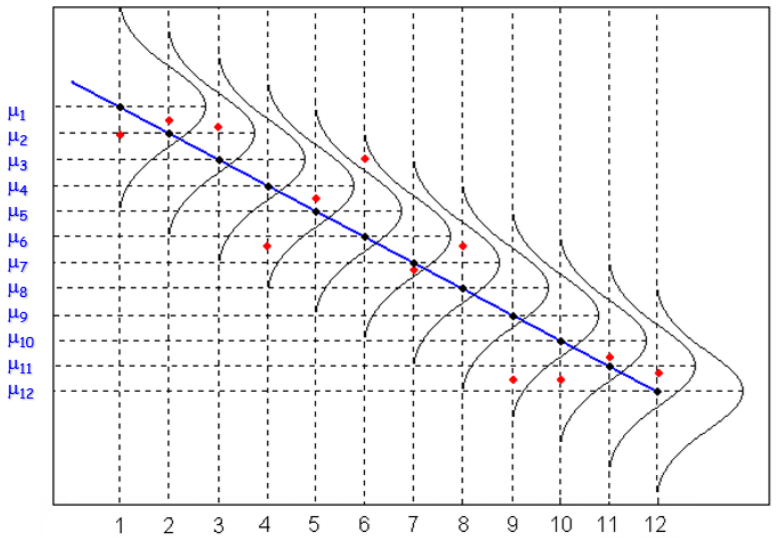
β_1 : é o coeficiente de regressão, ou seja, a taxa de variação da redução da DQO para cada unidade de redução de ST que aumenta;

e_i: é o erro (variação aleatória não controlável)

Se Y é uma variável aleatória, então, está sujeita a um erro de observação. Este erro (e_i) deverá ser adicionado ao modelo, desde que se admitam como verdadeiras as seguintes pressuposições:

1. Os erros são aleatórios, têm média zero e variância constante, ou seja, $E(e_i)=0$ e $V(e_i)=\sigma^2$.
2. Os erros têm distribuição normal e são independentes entre si.
3. O modelo é adequado para todas as observações, não podendo haver nenhum valor de X que produza um valor de Y discrepante dos demais.
4. A variável X é fixa (não aleatória).

e) Explique o que significa a figura abaixo.



No modelo de regressão linear simples assume-se que, para cada valor de X, Y é uma variável aleatória com distribuição normal e variância constante (σ^2). Assim, o valor esperado de Y (μ_i) muda para cada valor X, mas a variância permanece a mesma, por isso todas as curvas têm o mesmo formato.

f) O que é o método dos mínimos quadrados?

É o método de estimação de parâmetros que obtém estimativas de tal forma que a soma de quadrados dos erros seja o menor valor possível. Os estimadores dos coeficientes do modelo de regressão linear simples são obtidos por este método.

g) Estimação dos parâmetros:

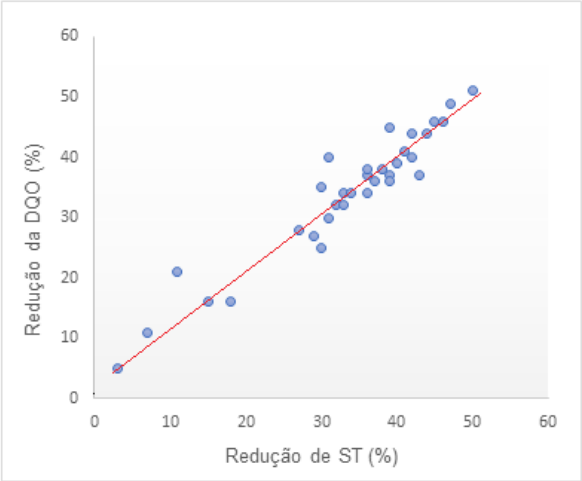
$\hat{\beta}_1 = 0{,}9036$

$\hat{\beta}_0 = 3{,}830$

h) Equação da reta ajustada: $\hat{\mu}_i = 3{,}83 + 0{,}9036\, x_i$

$\hat{\mu}_5 = 3{,}83 + 0{,}9036 \times 18 = 20{,}09$

$\hat{e}_5 = 16 - 20{,}09 = -4{,}09$



i) No modelo de regressão simples, o coeficiente de regressão é **proporcional** e tem o **mesmo sinal** do coeficiente de correlação.

$$\hat{\beta}_1 = r_{xy}\frac{\sqrt{SQX.\,SQY}}{SQX}$$

j) 1. Hipóteses estatísticas

$$\begin{cases} H_0 : \beta_1 = 0 \\ H_1 : \beta_1 \neq 0 \end{cases}$$

2. Taxa de erro: α = 0,05

3. Estatística do teste

$$t = \frac{\hat{\beta}_1}{\sqrt{\frac{\sum \hat{e}_i^2}{\frac{n-2}{SQX}}}} = 18{,}03$$

4. Decisão e conclusão

Como $t_{\alpha/2(31)} = 2{,}042 < t = 18{,}03$, rejeitamos H_0.

Concluímos ao nível de 5% de significância que o coeficiente de regressão populacional difere de zero. Portanto, existe relação linear significativa entre a redução de ST e a redução da DQO.

k) $\hat{\mu}_{y|x=30} = 3{,}83 + 0{,}9036 \times 30 = 30{,}94$

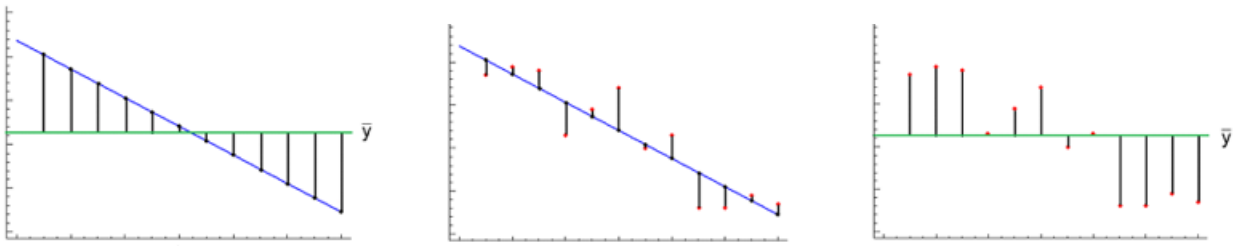
2.

(1) (2) (3)

$$(y_i - \bar{y}) = (\hat{\mu}_i - \bar{y}) + (y_i - \hat{\mu}_i)$$

Desvio total = Desvio explicado + Residuo pela reta

(2) (3) (1)



3. Cálculos intermediários:

SQY = 2715,76
SQX_1 = 415,23
SQX_2 = 2905,69
$SPYX_1$ = 775,96
$SPYX_2$ = 2292,95
SPX_1X_2 = 251,077

a) r_{yx1} = 0,7307
r_{yx2} = 0,8163

b)

$$y_j = \beta_0 + \beta_1 x_{1j} + \beta_2 x_{2j} + e_j,$$

onde:
y_j é a quantidade de calor por grama de cimento;
x_{1j} é a quantidade de aluminato tricálcico;
x_{2j} é a quantidade de silicato tricálcico;
β_0 é quantidade de calor do cimento, quando as quantidades de aluminato tricálcico e silicato tricálcico são iguais a zero (X_1=0 e X_2=0);
β_1 é a taxa de variação a quantidade de calor, para cada unidade que se acrescenta na quantidade de aluminato tricálcico, numa quantidade fixa qualquer de silicato tricálcico;
β_2 é a taxa de variação a quantidade de calor, para cada unidade que se acrescenta na quantidade de silicato tricálcico, numa quantidade fixa qualquer de aluminato tricálcico;
e_j é o erro (variação aleatória) associado à observação j.

c) Se Y é uma variável aleatória, então, está sujeita a um erro de observação. Este erro (e_i) deverá ser adicionado ao modelo, desde que se admitam como verdadeiras as seguintes pressuposições:

1. As variáveis Xi são fixas, isto é, observados sem erro.
2. Os erros são aleatórios, têm média zero e variância constante, ou seja, $E(e_i)=0$ e $V(e_i)=\sigma^2$.
3. Os erros têm distribuição normal e são independentes entre si.
4. O modelo é adequado para todas as observações, não podendo haver nenhum valor de X que produza um valor de Y discrepante dos demais.

d) Estimação dos parâmetros:

$$\hat{\beta}_0 = 52{,}58$$

$$\hat{\beta}_1 = 1{,}468$$

$$\hat{\beta}_2 = 0{,}6623$$

$$\hat{\mu} = 52{,}58 + 1{,}468\, x_1 + 0{,}6623\, x_2$$

e)

1. Hipótese estatística

$$\begin{cases} H_0 : \beta_i = 0, \text{ sendo } i = 1, 2 \\ H_1 : \beta_i \neq 0, \text{ para pelo menos um } i \ (i = 1 \text{ e/ou } 2) \end{cases}$$

2. Taxa de erro: $\alpha = 0{,}05$

3. Cálculo das somas de quadrados

$SQ_{Total} = SQY = 2715{,}76$

$SQ_{Reg} = \beta_1 \,.\, SPYX_1 + \beta_2 \,.\, SPYX_2 = 2657{,}86$

$SQ_{Resíduo} = SQTotal - SQReg = 2715{,}76 - 2657{,}86 = 57{,}904$

Tabela da análise da variação:

Fontes	GL	SQ	QM	F
Regressão	2	2657,86	1328,929	229,50
Resíduo	10	57,904	5,7904	-
Total	12	2715,763	-	-

Como $f_{\alpha(2;\,10)} = 4{,}10 < f = 229{,}50$, rejeitamos H_0.

Concluímos ao nível de 5% de significância que pelo menos um dos coeficientes de regressão parciais difere de zero. Portanto, existe relação linear significativa entre a quantidade de calor e pelo menos uma das variáveis quantidade de aluminato tricálcico e quantidade de silicato tricálcico.

f)

$r^2_c = 0{,}9744$

Interpretação: O modelo tem um ótimo aos dados observados, pois 97% da variação que pelo menos um dos coeficientes de regressão parciais difere de zero. Portanto, existe relação linear significativa entre a quantidade de calor e pelo menos uma das variáveis quantidade de aluminato tricálcico e quantidade de silicato tricálcico.

g)

1. Hipótese estatística

$$\begin{cases} H_0^1 : \beta_1 = 0 \\ H_1^1 : \beta_1 \neq 0 \end{cases}$$

2. Taxa de erro: $\alpha = 0{,}05$

3. Estatística do teste

t = 12,11

4. Decisão e conclusão

Como $t_{\alpha/2(10)} = 2,228 < t = 12,11$, rejeitamos H_0.

Concluímos ao nível de 5% de significância o coeficiente de regressão β_1 difere de zero. Portanto, existe efeito significativo da quantidade de aluminato tricálcico sobre a quantidade de calor, adicional ao efeito da quantidade de silicato de tricálcico.

1. Hipótese estatística

$$\begin{cases} H_0^2 : \beta_2 = 0 \\ H_1^2 : \beta_2 \neq 0 \end{cases}$$

2. Taxa de erro: $\alpha = 0,05$

3. Estatística do teste

t = 14,44

4. Decisão e conclusão

Como $t_{\alpha/2(10)} = 2,228 < t = 14,44$, rejeitamos H_0.

Concluímos ao nível de 5% de significância o coeficiente de regressão β_2 difere de zero. Portanto, existe efeito significativo da quantidade de silicato tricálcico sobre a quantidade de calor, adicional ao efeito da quantidade de aluminato tricálcico.

h) A relação linear entre Y e (X_1, X_2) foi significativa, as contribuições adicionais das variáveis X_1 e X_2 para a explicação da variação de Y foram significativas. Assim, segundo os testes efetuados, o "melhor" modelo para exprimir a relação linear entre Y e (X_1, X_2) é o modelo de regressão linear múltipla com duas variáveis.

i) Valor esperado de y (x_1=15 e x_2=30) = 94,47.

j) Descreva resumidamente os principais métodos de seleção de variáveis.

⇒ Inclusão ascendente (*forward selection*): inicia-se com um modelo que possui somente o intercepto e, de acordo com o critério fixado, as variáveis preditoras são incluídas no modelo, uma a uma. Uma vez incluída no modelo, a variável não sai mais.
⇒ Seleção descendente (*backward elimination*): começa com o modelo completo e, de acordo com o critério fixado, vai excluindo, uma a uma, as variáveis de menor contribuição não significativa, na presença das demais variáveis no modelo.
⇒ Seleção ascendente-descendente (*stepwise selection*) é uma aplicação conjunta dos critérios de inclusão e exclusão. O procedimento inicia do mesmo modo que a seleção ascendente, mas em cada passo verifica se, na presença das outras variáveis do modelo, alguma variável não agrega contribuição significativa à explicação da variação da resposta. Dentre as que não estão contribuindo significativamente, a de menor f parcial é eliminada. Por outro lado, uma variável que já foi excluída poderá retornar em um passo posterior.