

UNIDADE III - Elementos de probabilidades

3.1. Probabilidade no espaço básico

3.1.1. Introdução

3.1.2. Conceitos fundamentais

3.1.3. Conceitos de probabilidade

3.1.4. Teoremas para o cálculo de probabilidades

3.1.5. Probabilidade condicional e independência

3.2. Variáveis aleatórias

3.2.1. Introdução e conceito

3.2.2. Variáveis aleatórias discretas

3.2.3. Variáveis aleatórias contínuas

3.3. Distribuições de probabilidade

3.3.1. Distribuições de probabilidade de variáveis discretas

3.3.2. Distribuições de probabilidade de variáveis contínuas

Variável aleatória

Definição: É uma função (ou regra) que transforma um espaço amostral qualquer em um **espaço amostral numérico**, que será sempre um subconjunto do conjunto dos números reais.

Variáveis aleatórias {
Discretas
Contínuas

3.2.3 Variáveis aleatórias contínuas

Definição: São contínuas todas as variáveis cujo espaço amostral S_X é contínuo ou não enumerável.

⇒ Se X é uma variável aleatória contínua, X pode assumir qualquer valor num intervalo $[a; b]$ ou no intervalo $(-\infty; +\infty)$.

⇒ O espaço S_X será sempre definido como um intervalo do conjunto dos reais, sendo, portanto, um conjunto infinito.

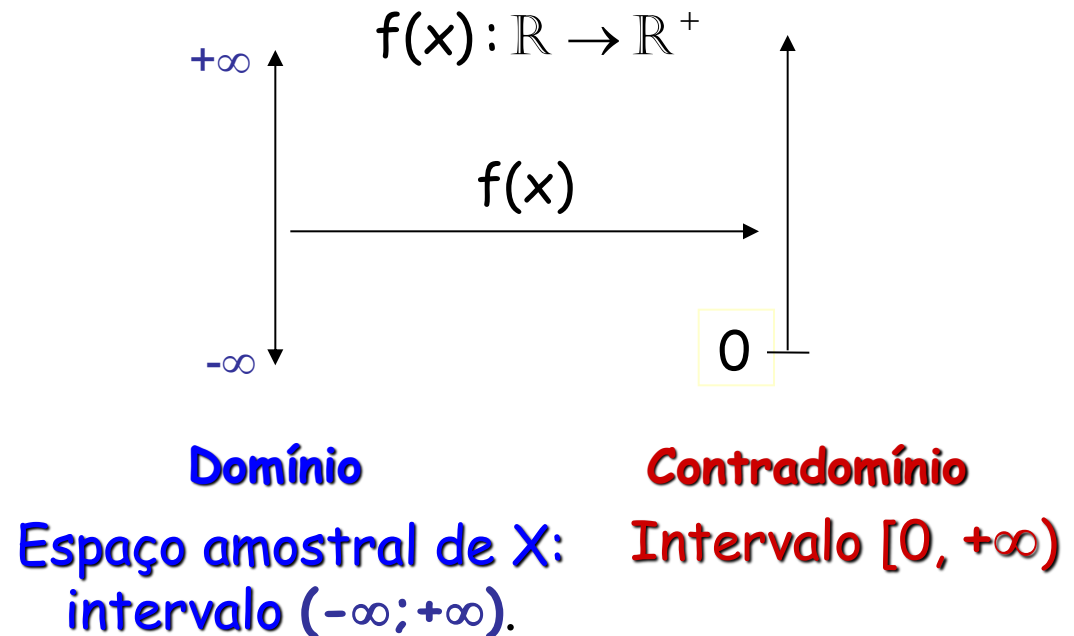
Exemplos:

- ◆ tempo que uma pessoa espera numa fila
- ◆ peso da produção de uma planta
- ◆ estatura de uma pessoa
- ◆ produção de leite de uma vaca
- ◆ quantidade de chuva que ocorre numa região

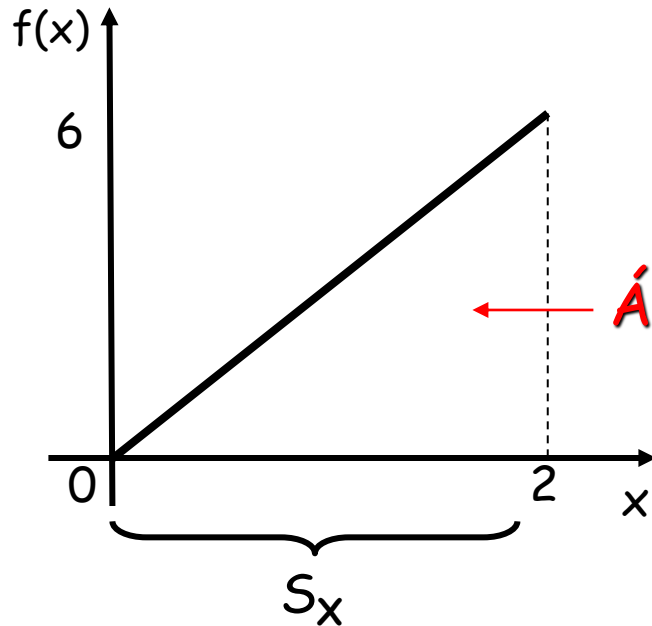
1. Função densidade de probabilidade

Definição: Seja X uma variável aleatória contínua e S_X o seu espaço amostral. Uma função f associada a variável X é denominada **função densidade de probabilidade (fdp)** se satisfizer duas condições:

1. $f(x) \geq 0, \forall x \in S_X$



$$f(x) = 3x$$



$$f(x=0) = 3 \times 0 = 0$$

$$f(x=2) = 3 \times 2 = 6$$

← Área do triângulo

$$\int_0^2 f(x) dx = \text{área sob a função no intervalo } [0; 2]$$

1. Função densidade de probabilidade

Definição: Seja X uma variável aleatória contínua e S_x o seu espaço amostral. Uma função f associada a variável X é denominada **função densidade de probabilidade (fdp)** se satisfizer duas condições:

1. $f(x) \geq 0, \forall x \in S_x$

2. $\int_{S_x} f(x)dx = 1 = P(X \in S_x)$ ←

Esta área corresponde à probabilidade de um valor de X pertencer ao espaço amostral S_x

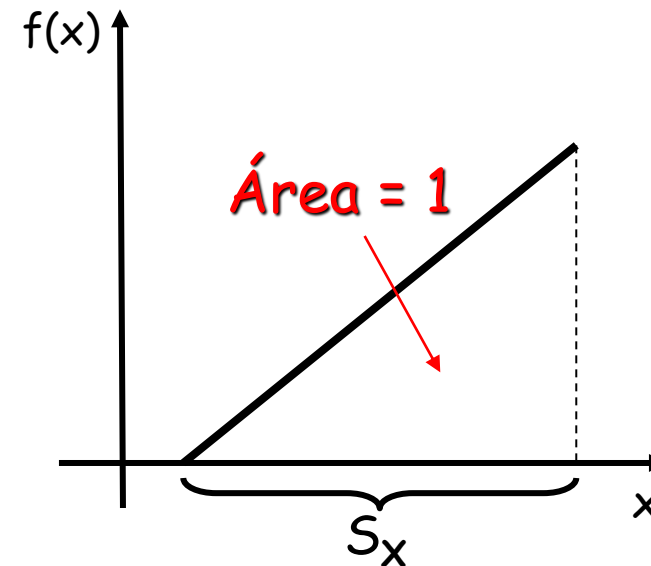
A integral da diferencial da função $f(x)$ fornece a área sob a função no intervalo S_x

1. Função densidade de probabilidade

Definição: Seja X uma variável aleatória contínua e S_x o seu espaço amostral. Uma função f associada a variável X é denominada **função densidade de probabilidade (fdp)** se satisfizer duas condições:

1. $f(x) \geq 0, \forall x \in S_x$

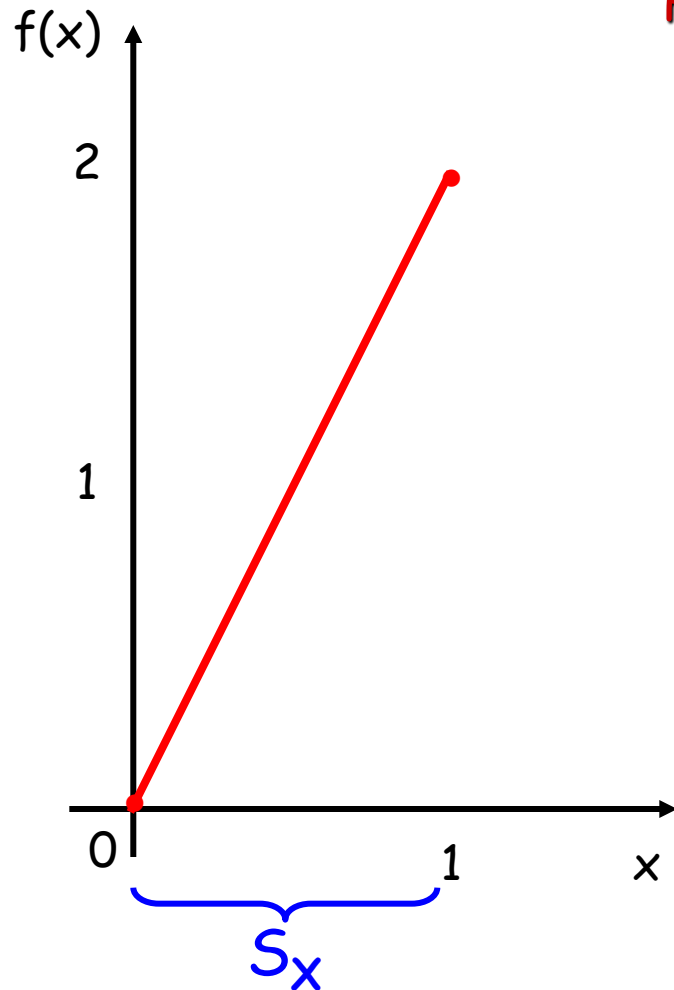
2. $\int_{S_x} f(x)dx = 1$



Fdp é toda a função que não assume valores negativos, ou seja, cujo gráfico esteja acima do eixo das abcissas, e cuja área compreendida entre a função e o eixo das abcissas seja igual a um.

Exemplo 1:

Seja a função $f(x) = 2x$, no intervalo $S_x = [0,1]$. Verifique se $f(x)$ é uma função densidade de probabilidade.



Primeira condição: $f(x) \geq 0, \forall x \in S_x$

$$f(x) = 2x$$

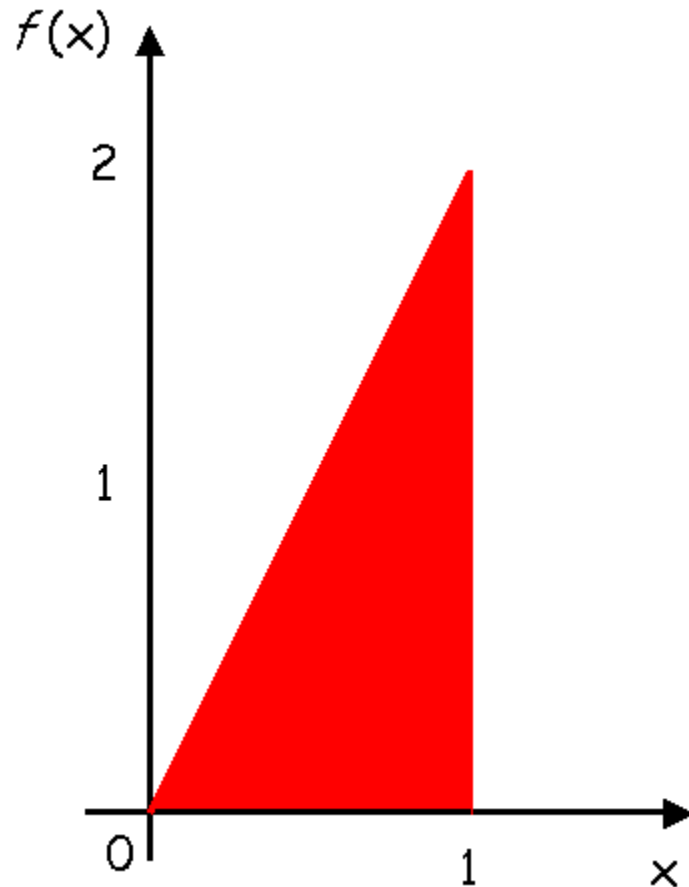
$$f(x=0) = 2 \times 0 = 0$$

$$f(x=1) = 2 \times 1 = 2$$

Todos os valores da função $f(x)$ são não negativos no intervalo de 0 a 1.

Segunda condição: $\int_{S_x} f(x) dx = 1$

Segunda condição: $\int_{S_x} f(x)dx = 1$

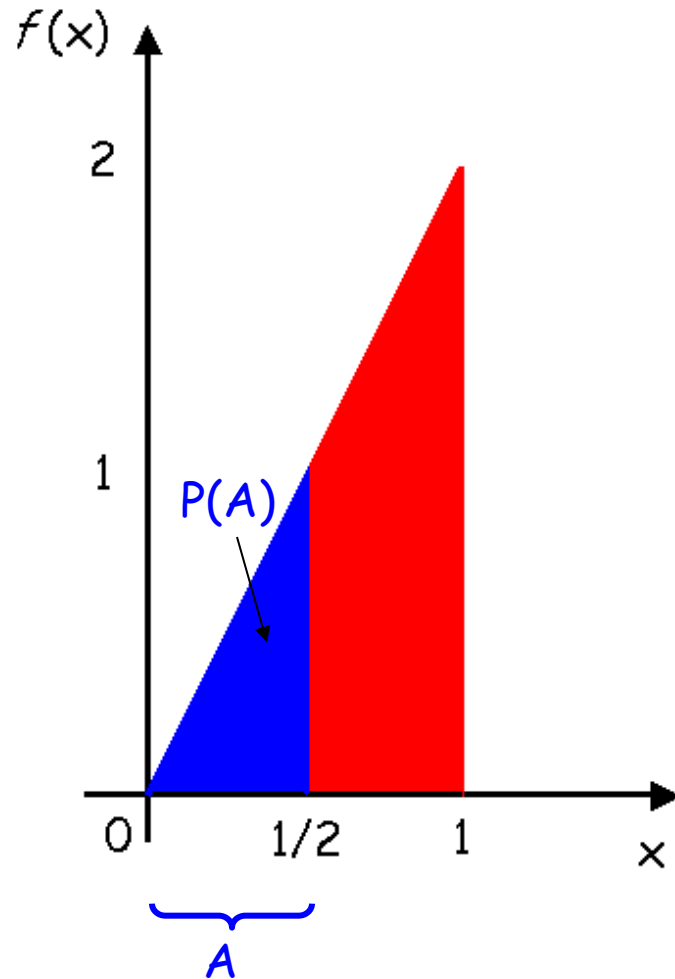


$$\text{Área: } \frac{b \times h}{2} = \frac{1 \times 2}{2} = 1$$

A área sob a função $f(x)$ no intervalo S_x , que equivale a $P(X \in S_x)$, é igual a 1.

A função $f(x) = 2x$, no intervalo $S_x = [0, 1]$ é uma função densidade de probabilidade!!

Seja $A=[0, 1/2]$, qual é a probabilidade de ocorrer o evento A ?



Probabilidade = área

$$\text{Área: } \frac{b \times h}{2} = \frac{1/2 \times 1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(0 \leq X \leq 1/2) = 1/4$$

Exemplo 2:

Seja a função $f(x) = 6x - 6x^2$, no intervalo $S_x = [0,1]$. Verifique se $f(x)$ é uma função densidade de probabilidade.

Primeira condição: $f(x) \geq 0, \forall x \in S_x$

Determina-se o valor de X que corresponde ao ponto crítico, derivando a função e igualando a primeira derivada a zero.

$$f'(x) = 6 - 12x$$

$$0 = 6 - 12x$$

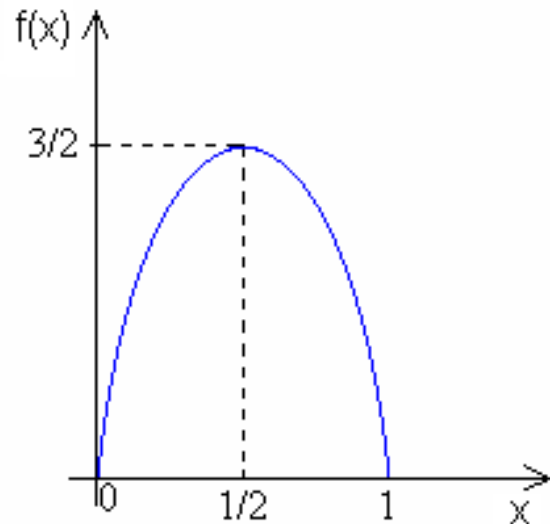
$$x = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \leftarrow \text{valor que corresponde ao ponto crítico}$$

Derivando a função pela segunda vez, determina-se se o ponto crítico é de máximo ou de mínimo.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6 - 12x \\ f''(x) &= -12 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{se } f''(x) < 0 \rightarrow \text{ponto de máximo} \\ \text{se } f''(x) > 0 \rightarrow \text{ponto de mínimo} \end{array} \right.$$

A função $f(x) = 6x - 6x^2$ tem ponto de máximo.

Traçar o gráfico:



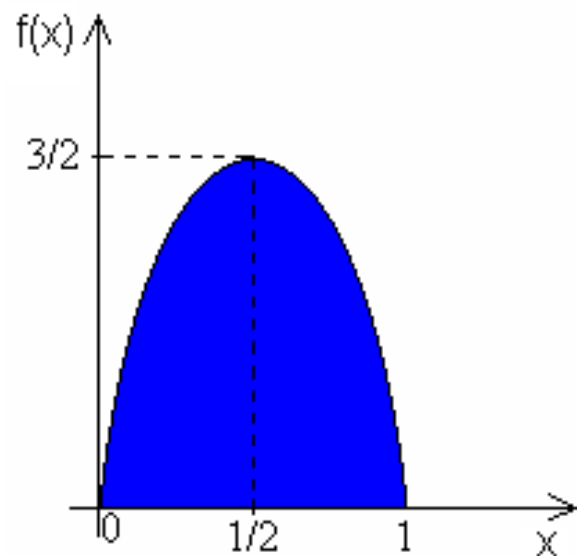
$$f(0) = 6 \times 0 - 6 \times 0^2 = 0$$

$$f(1/2) = 6 \times 1/2 - 6 \times (1/2)^2 = 3/2$$

$$f(1) = 6 \times 1 - 6 \times 1^2 = 0$$

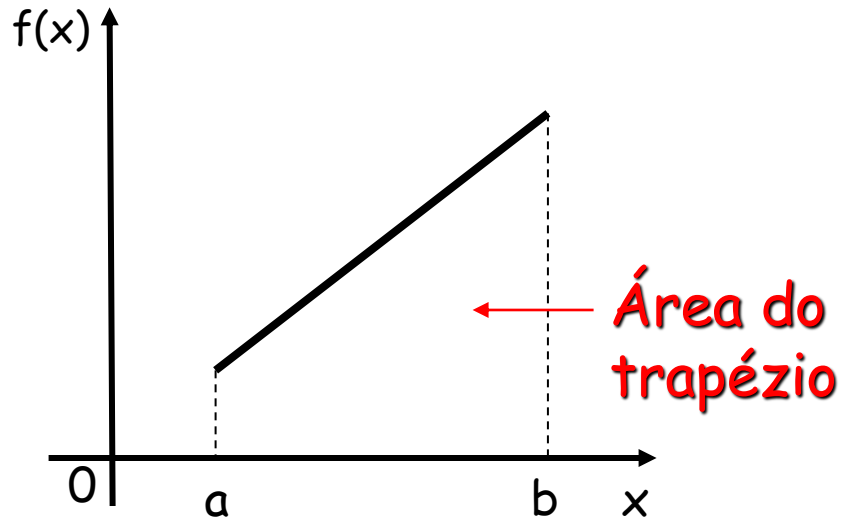
Todos os valores da função $f(x)$ são não negativos no intervalo de 0 a 1.

Segunda condição: $\int_{S_x} f(x)dx = 1$

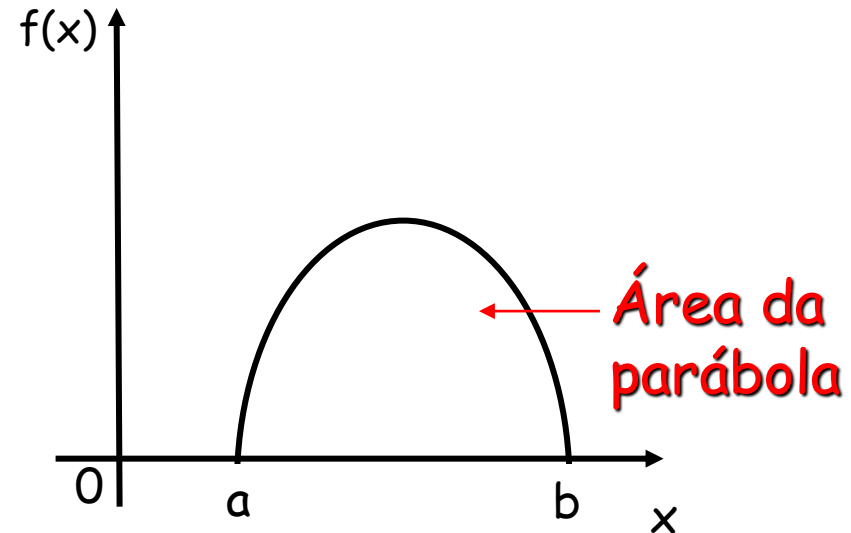


Para obter a área sob a parábola é necessário integrar!

$$f(x) = 3x, \text{ para } a \leq x \leq b$$



$$f(x) = 6x - 6x^2, \text{ para } a \leq x \leq b$$



$$\int_a^b f(x) dx = \text{Área sob a função no intervalo } [a; b]$$

Integral definida

Se f é uma função de x , então a sua integral definida é uma integral restrita a valores em um intervalo específico, por exemplo, $a \leq x \leq b$. O resultado é um número que depende apenas de a e b , e não de x .

Teorema Fundamental do Cálculo

Se $f(x)$ é uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e temos uma função $F(x)$, tal que $F'(x) = f(x)$, então $F(x)$ é chamada **primitiva** ou **anti-derivada** de $f(x)$. Nesse caso,

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)$$

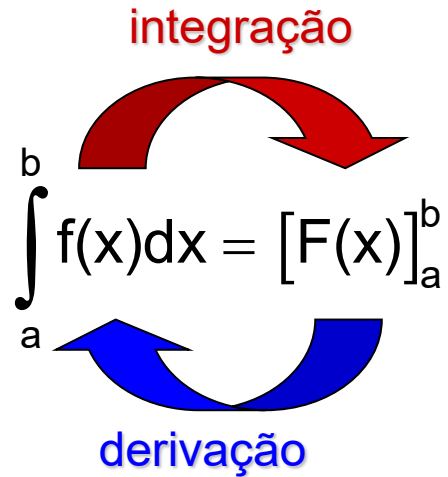
Entendendo a integral como processo inverso da derivada:

$$\int_a^b \underbrace{f(x)}_{\text{integranda}} dx = \underbrace{[F(x)]_a^b}_{\text{primitiva}} = F(b) - F(a)$$

A primitiva $F(x)$ é a função cuja derivada é a integranda $f(x)$.

$$F'(x) = f(x)$$

Entendendo a integral como processo inverso da derivada:



Como encontrar a primitiva?

Integranda

$$f(x) = x^n$$

Primitiva

$$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Algumas propriedades da integral

1. A área num ponto a é igual a zero, ou seja

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

2. Se b é um ponto entre a e c , então

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

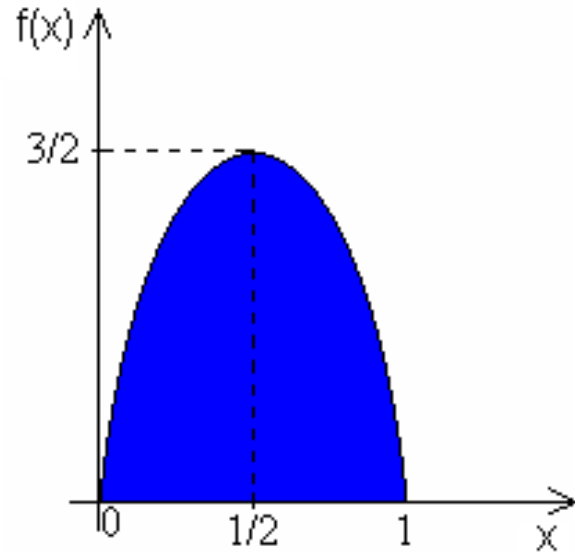
3. O fator constante k pode ser retirado do sinal de integração, ou seja

$$\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

4. A integral definida da soma (ou da diferença) de funções é a soma (ou a diferença) das integrais definidas, ou seja

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

Segunda condição: $\int_{S_x} f(x)dx = 1$



$$\begin{aligned}\text{Área: } & \int_0^1 (6x - 6x^2) dx \\ &= \int_0^1 6x dx - \int_0^1 6x^2 dx = 6 \int_0^1 x dx - 6 \int_0^1 x^2 dx \\ &= 6 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 - 6 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 6 \left(\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) - 6 \left(\frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right) \\ &= 3 - 2 = 1\end{aligned}$$

A área sob a função $f(x)$ no intervalo S_x , que equivale a $P(X \in S_x)$, é igual a 1.

A função $f(x) = 6x - 6x^2$, no intervalo $S_x = [0, 1]$, é uma função densidade de probabilidade!!

Importante!!!

No caso de variáveis contínuas, as representações $a \leq x \leq b$, $a \leq x < b$, $a < x \leq b$ e $a < x < b$ são todas equivalentes, pois a probabilidade num ponto, por definição, é nula.

Seja o evento $A = \{x; x=a\}$. Então,

$$P(A) = \int_A f(x) dx = \int_a^a f(x) dx = F(a) - F(a) = 0$$

2. Função de distribuição ou probabilidade acumulada

Definição: Seja X uma variável aleatória contínua e S_X o seu espaço amostral. A função de distribuição, denotada por $F(x)$ ou $P(X \leq x)$, é a **função que associa a cada ponto $x \in S_X$ a probabilidade $P(X \leq x)$** . Desta forma, tem-se

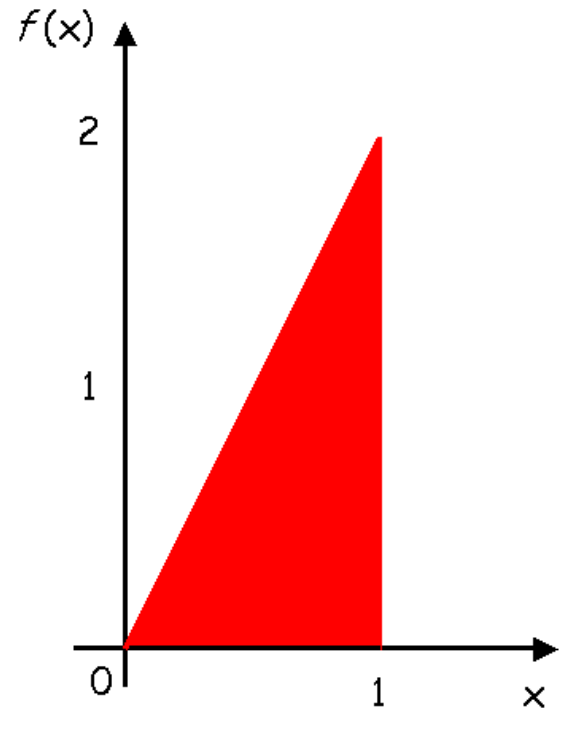
$$F(x) = P(X \leq x) = \int_a^x f(t)dt, \text{ para } S_X = [a, b]$$

Sendo $S_X = [a, b]$, então

$$F(a) = P(X \leq a) = 0$$

$$F(b) = P(X \leq b) = 1$$

Exemplo 1: $f(x) = 2x$, $S_X = [0,1]$

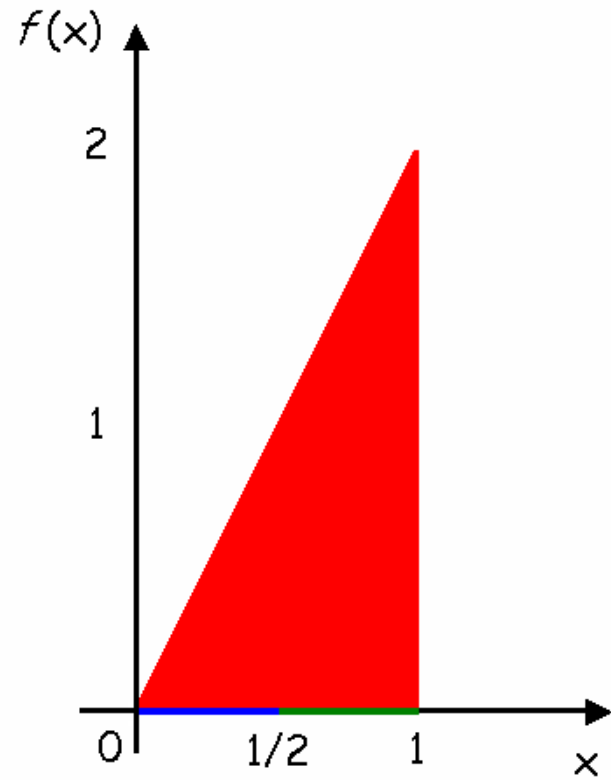


$$F(x) = x^2$$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x f(t) dt \\ &= \int_0^x 2t dt \\ &= 2 \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^x \\ &= x^2 \end{aligned}$$

A função de probabilidade acumulada é a primitiva de $f(x)$.

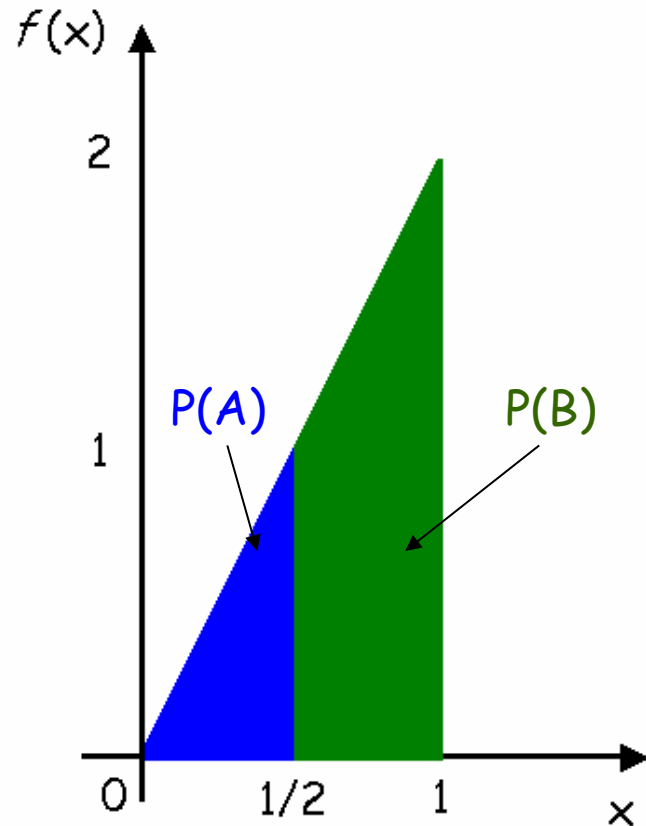
Exemplo 1: $f(x) = 2x$, $S_X = [0,1]$



$$A = [0, 1/2]$$

$$B = [1/2, 1]$$

Exemplo 1: $f(x) = 2x$, $S_X = [0,1]$



$$A = [0, 1/2]$$

$$B = [1/2, 1]$$

$$F(x) = x^2$$

$$F(1/2) = P(X \leq 1/2) = (1/2)^2 = 1/4$$

$$P(A) = F(1/2) = 1/4$$

$$\begin{aligned} P(B) &= 1 - F(1/2) \\ &= 1 - 1/4 = 3/4 \end{aligned}$$

Gráfico da função densidade de probabilidade

$$f(x) = 2x, S_x = [0,1]$$

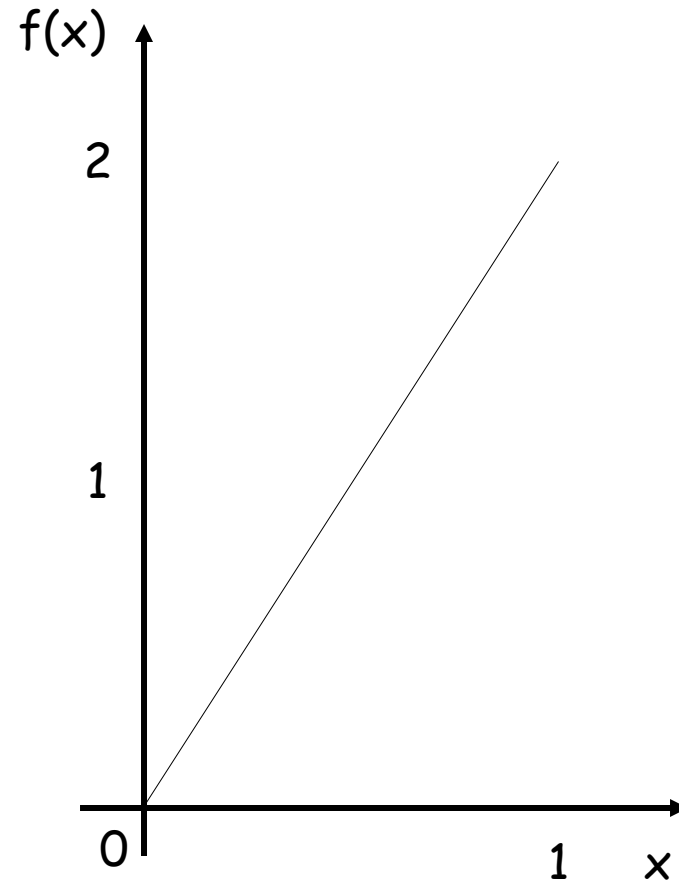
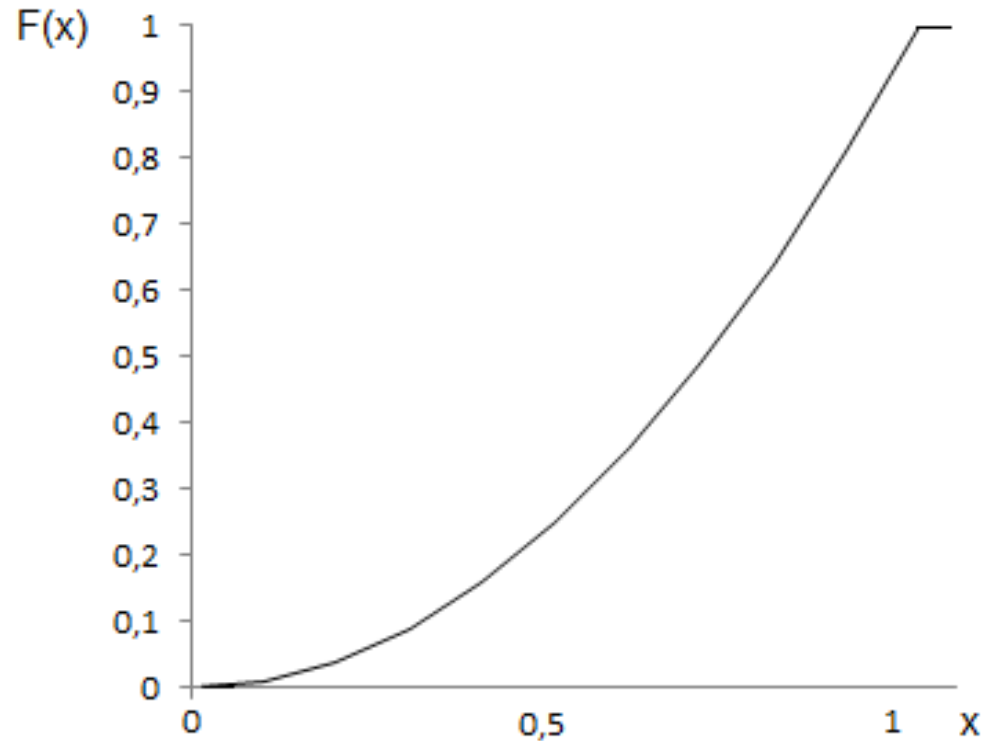


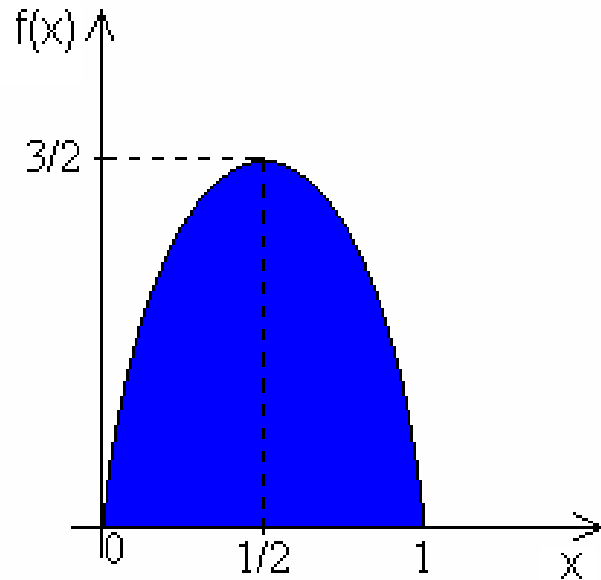
Gráfico da função de distribuição ou probabilidade acumulada

$$F(x) = x^2$$



A função $F(x)$ expressa a probabilidade da variável X assumir um valor menor ou igual a $x \rightarrow P(X \leq x)$

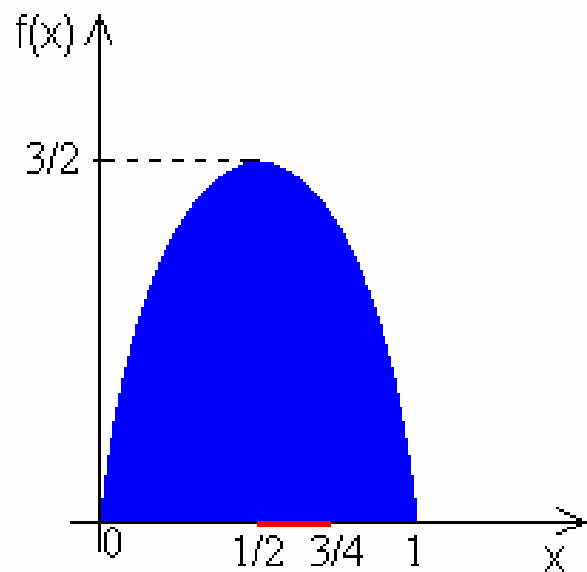
Exemplo 2: $f(x) = 6x - 6x^2$, $S_x = [0,1]$



$$F(x) = 3x^2 - 2x^3$$

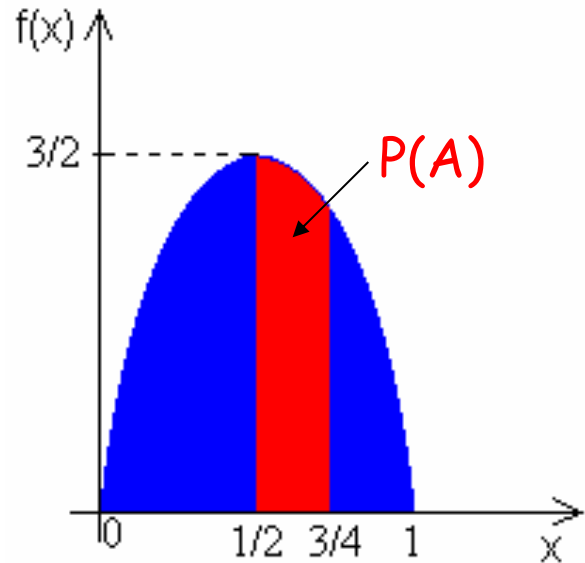
$$\begin{aligned} F(x) &= \int_a^x f(t) dt \\ &= \int_0^x (6t - 6t^2) dt \\ &= \int_0^x 6t dt - \int_0^x 6t^2 dt \\ &= 6 \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^x - 6 \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^x \\ &= 3x^2 - 2x^3 \end{aligned}$$

Exemplo 2: $f(x) = 6x - 6x^2$, $S_x = [0,1]$



$$A = [1/2, 3/4]$$

Exemplo 2: $f(x) = 6x - 6x^2$, $S_x = [0,1]$



$$A = [1/2, 3/4]$$

$$F(x) = 3x^2 - 2x^3$$

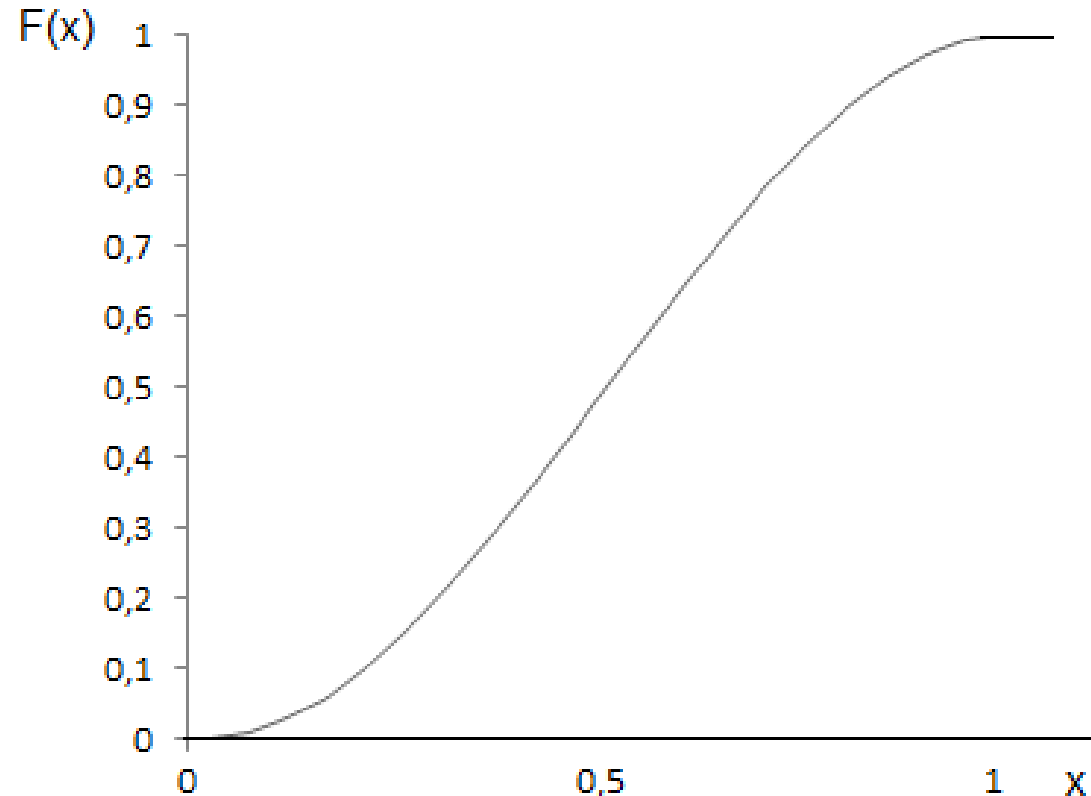
$$\begin{aligned} F(1/2) &= 3(1/2)^2 - 2(1/2)^3 \\ &= 3/4 - 1/4 = 1/2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(3/4) &= 3(3/4)^2 - 2(3/4)^3 \\ &= 27/16 - 27/32 \\ &= \frac{54 - 27}{32} = \frac{27}{32} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A) &= F(3/4) - F(1/2) \\ &= 27/32 - 1/2 \\ &= \frac{27 - 16}{32} = \frac{11}{32} = 0,344 \end{aligned}$$

Gráfico da função de probabilidade acumulada

$$F(x) = 3x^2 - 2x^3$$



A função $F(x)$ expressa a probabilidade da variável X assumir um valor menor ou igual a $x \rightarrow P(X \leq x)$

Medidas descritivas

□ Média ou valor esperado

Definição: Seja X uma variável aleatória contínua e S_X o seu espaço amostral. O valor esperado de X , denotado por $E(X)$ ou μ , será dado por

$$E(X) = \mu = \int_{S_X} x f(x) dx$$

□ Variância

Definição: Seja X uma variável aleatória contínua e S_X o seu espaço amostral. A variância de X , denotada por $V(X)$ ou σ^2 , será dada por

$$V(X) = \sigma^2 = E(X - \mu)^2 = \int_{S_X} (x - \mu)^2 f(x) dx \quad (\text{Fórmula de definição})$$

$$V(X) = \sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = \left[\int_{S_X} x^2 f(x) dx \right] - \mu^2 \quad (\text{Fórmula prática})$$

□ Momentos, assimetria e curtose

Momentos ordinários

- ◆ Primeiro momento:

$$\mu'_1 = E(X) = \int_{S_x} xf(x)dx$$

- ◆ Segundo momento:

$$\mu'_2 = E(X^2) = \int_{S_x} x^2f(x)dx$$

- ◆ Terceiro momento:

$$\mu'_3 = E(X^3) = \int_{S_x} x^3f(x)dx$$

- ◆ Quarto momento:

$$\mu'_4 = E(X^4) = \int_{S_x} x^4f(x)dx$$

□ Momentos, assimetria e curtose

Momentos centrados na média

- ◆ Segundo momento:

$$\mu_2 = E(X - \mu)^2 = \int_{S_x} (x - \mu)^2 f(x) dx \quad (\text{Fórmula de definição})$$

$$\mu_2 = E(X^2) - \mu^2 = \left(\int_{S_x} x^2 f(x) dx \right) - \mu^2 \quad (\text{Fórmula prática})$$

- ◆ Terceiro momento:

$$\mu_3 = E(X - \mu)^3 = \int_{S_x} (x - \mu)^3 f(x) dx \quad (\text{Fórmula de definição})$$

$$\begin{aligned} \mu_3 &= E(X^3) - 3\mu E(X^2) + 2\mu^3 \\ &= \left(\int_{S_x} x^3 f(x) dx \right) - 3\mu \left(\int_{S_x} x^2 f(x) dx \right) + 2\mu^3 \quad (\text{Fórmula prática}) \end{aligned}$$

- ◆ Quarto momento:

$$\mu_4 = E(X - \mu)^4 = \int_{S_x} (x - \mu)^4 f(x) dx \quad (\text{Fórmula de definição})$$

$$\mu_4 = E(X^4) - 4\mu E(X^3) + 6\mu^2 E(X^2) - 3\mu^4 \quad (\text{Fórmula prática})$$

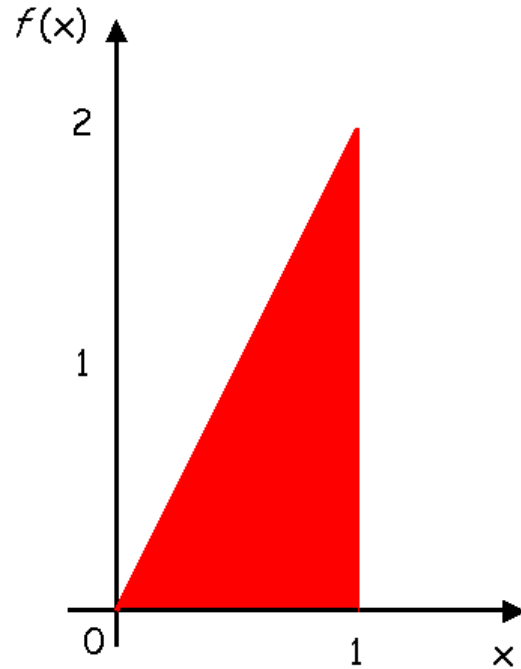
$$= \left[\int_{S_x} x^4 f(x) dx \right] - 4\mu \left[\int_{S_x} x^3 f(x) dx \right] + 6\mu^2 \left[\int_{S_x} x^2 f(x) dx \right] - 3\mu^4$$

Coeficiente de assimetria: $a_3 = \frac{\mu_3}{\mu_2 \sqrt{\mu_2}}$

Coeficiente de curtose: $a_4 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$

Medidas descritivas	Variável aleatória discreta	Variável aleatória contínua
Média	$\mu = E(X) = \sum_{x \in S_X} x p(x)$	$\mu = E(X) = \int_{S_X} x f(x) dx$
Variância	$\sigma^2 = E(X - \mu)^2 = \sum_{x \in S_X} (x - \mu)^2 p(x)$	$\sigma^2 = E(X - \mu)^2 = \int_{S_X} (x - \mu)^2 f(x) dx$
Desvio padrão	$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$	$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$
Momentos	$\mu'_r = E(X^r) = \sum_{x \in S_X} x^r p(x)$	$\mu'_r = E(X^r) = \int_{S_X} x^r f(x) dx$
	$\mu_r = E(X - \mu)^r = \sum_{x \in S_X} (x - \mu)^r p(x)$	$\mu_r = E(X - \mu)^r = \int_{S_X} (x - \mu)^r f(x) dx$
Assimetria	$a_3 = \frac{\mu_3}{\mu_2 \sqrt{\mu_2}}$	$a_3 = \frac{\mu_3}{\mu_2 \sqrt{\mu_2}}$
Curtose	$a_4 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$	$a_4 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$

Exemplo 1: $f(x) = 2x$, $S_x = [0,1]$



$$E(X) = \mu = \int_{S_x} x f(x) dx$$

$$= \int_0^1 x 2x dx$$

$$= \int_0^1 2x^2 dx = 2 \int_0^1 x^2 dx = 2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

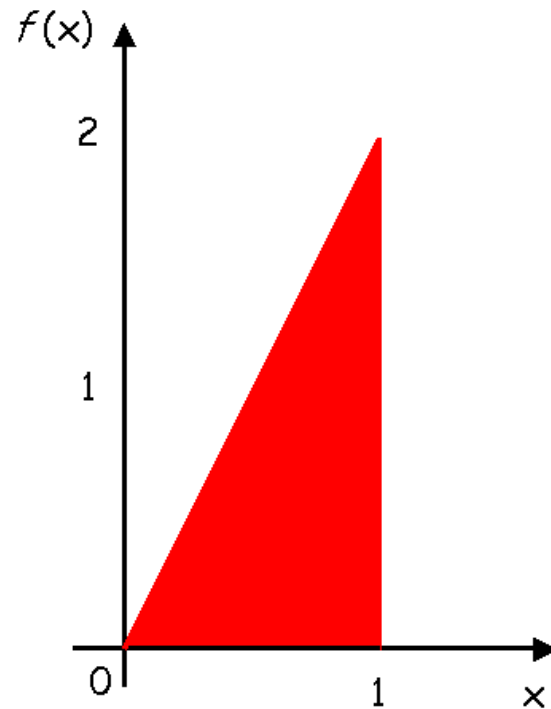
$$V(X) = \sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$$

$$= \left[\int_0^1 x^2 2x dx \right] - \mu^2$$

$$= \left[\int_0^1 2x^3 dx \right] - \left(\frac{2}{3} \right)^2$$

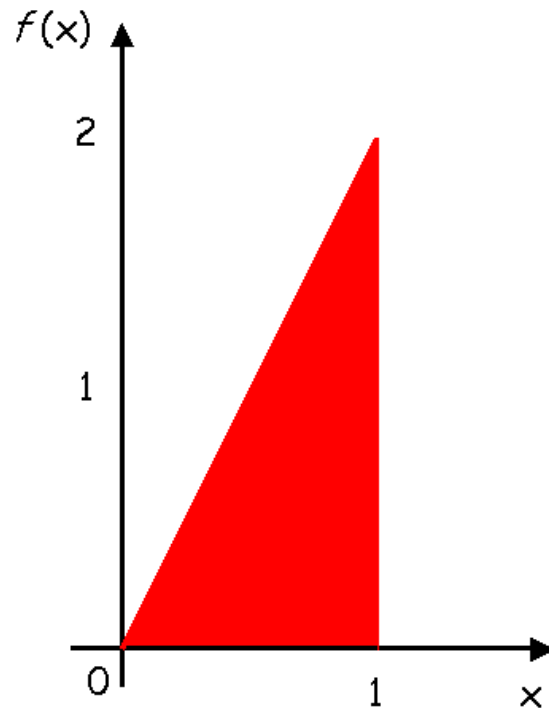
$$= \left\{ 2 \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 \right\} - \frac{4}{9} = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{9-8}{18} = \frac{1}{18}$$

Exemplo 1: $f(x) = 2x$, $S_x = [0,1]$



$$\begin{aligned}
 \mu_3 &= E(X^3) - 3\mu E(X^2) + 2\mu^3 \\
 &= \left[\int_0^1 x^3 2x dx \right] - 3\mu \left[\int_0^1 x^2 2x dx \right] + 2\mu^3 \\
 &= \left[\int_0^1 2x^4 dx \right] - 3\mu \left[\int_0^1 2x^3 dx \right] + 2\mu^3 \\
 &= 2 \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^1 - 3\mu 2 \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 + 2\mu^3 \\
 &= \frac{2}{5} - \frac{6}{3} \times \frac{1}{2} + 2 \left(\frac{2}{3} \right)^3 \\
 &= \frac{2}{5} - 1 + \frac{16}{27} = \frac{54 - 135 + 80}{135} = -0,0074
 \end{aligned}$$

Exemplo 1: $f(x) = 2x$, $S_x = [0,1]$



$$\begin{aligned}
 \mu_4 &= E(X^4) - 4\mu E(X^3) + 6\mu^2 E(X^2) - 3\mu^4 \\
 &= \left[\int_0^1 x^4 2x dx \right] - 4\mu \left[\int_0^1 x^3 2x dx \right] + 6\mu^2 \left[\int_0^1 x^2 2x dx \right] - 3\mu^4 \\
 &= \left[\int_0^1 2x^5 dx \right] - 4\mu \left[\int_0^1 2x^4 dx \right] + 6\mu^2 \left[\int_0^1 2x^3 dx \right] - 3\mu^4 \\
 &= 2 \left[\frac{x^6}{6} \right]_0^1 - 4\mu 2 \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^1 + 6\mu^2 2 \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 - 3\mu^4 \\
 &= \frac{1}{3} - 4 \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} + 6 \times \left(\frac{2}{3} \right)^2 \times \frac{1}{2} - 3 \times \left(\frac{2}{3} \right)^4 \\
 &= \frac{1}{3} - \frac{16}{15} + \frac{4}{3} - \frac{16}{27} = \frac{45 - 144 + 180 - 64}{135} = 7,941
 \end{aligned}$$

Exemplo 1: $f(x) = 2x$, $S_x = [0,1]$

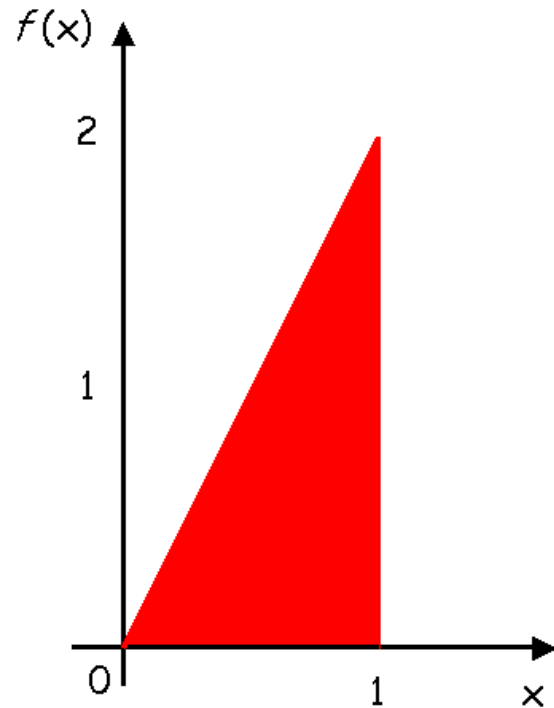
Momentos ordinários

$$\mu'_2 = E(X^2) = \int_{S_x} x^2 f(x) dx = \int_0^1 x^2 2x dx = \int_0^1 2x^3 dx = 2 \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\mu'_3 = E(X^3) = \int_{S_x} x^3 f(x) dx = \int_0^1 x^3 2x dx = \int_0^1 2x^4 dx = 2 \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{2}{5}$$

$$\mu'_4 = E(X^4) = \int_{S_x} x^4 f(x) dx = \int_0^1 x^4 2x dx = \int_0^1 2x^5 dx = 2 \left[\frac{x^6}{6} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Exemplo 1: $f(x) = 2x$, $S_x = [0,1]$



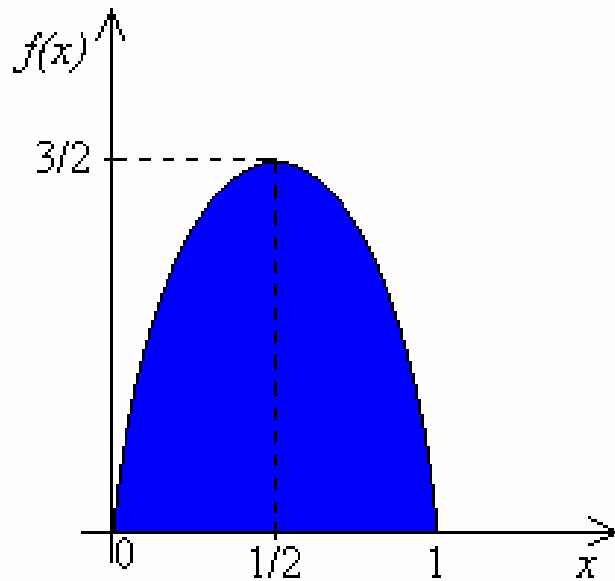
$$\begin{aligned}\mu_3 &= E(X^3) - 3\mu E(X^2) + 2\mu^3 \\ &= \frac{2}{5} - 3 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = -0,0074\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_4 &= E(X^4) - 4\mu E(X^3) + 6\mu^2 E(X^2) - 3\mu^4 \\ &= \frac{1}{3} - 4 \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} + 6 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{2} - 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^4 = 7,941\end{aligned}$$

$$a_3 = \frac{\mu_3}{\mu_2 \sqrt{\mu_2}} = \frac{-0,0074}{1/18 \sqrt{1/18}} = \frac{-0,0074}{0,0131} = -0,565 \rightarrow \text{Assimétrica negativa}$$

$$a_4 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{7,941}{(1/18)^2} = 40,8 \rightarrow \text{Leptocúrtica}$$

Exemplo 2: $f(x) = 6x - 6x^2$, $S_x = [0,1]$



$$E(X) = \mu = \int_0^1 x(6x - 6x^2) dx$$

$$= \int_0^1 (6x^2 - 6x^3) dx = 6 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 - 6 \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1$$

$$= 2 - \frac{3}{2} = \frac{4-3}{2} = \frac{1}{2}$$

$$V(X) = \sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$$

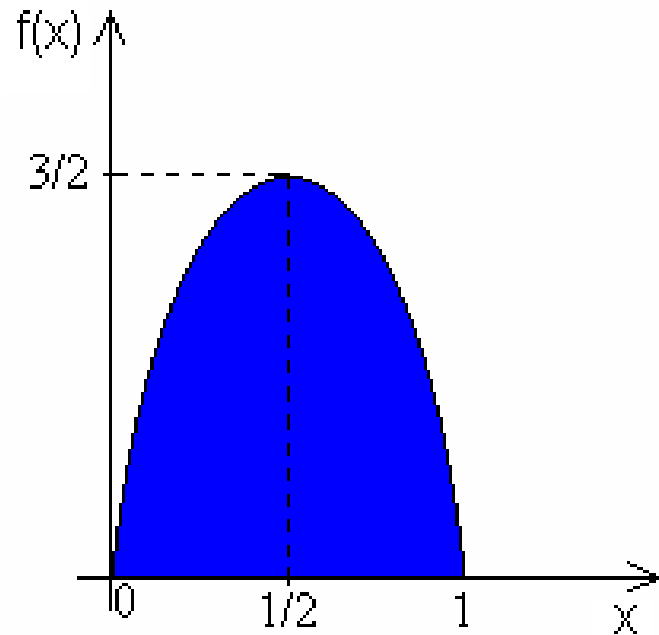
$$= \left[\int_0^1 x^2(6x - 6x^2) dx \right] - \mu^2$$

$$= \left[\int_0^1 (6x^3 - 6x^4) dx \right] - \left(\frac{1}{2} \right)^2$$

$$= \left\{ 6 \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 - 6 \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^1 \right\} - \frac{1}{4}$$

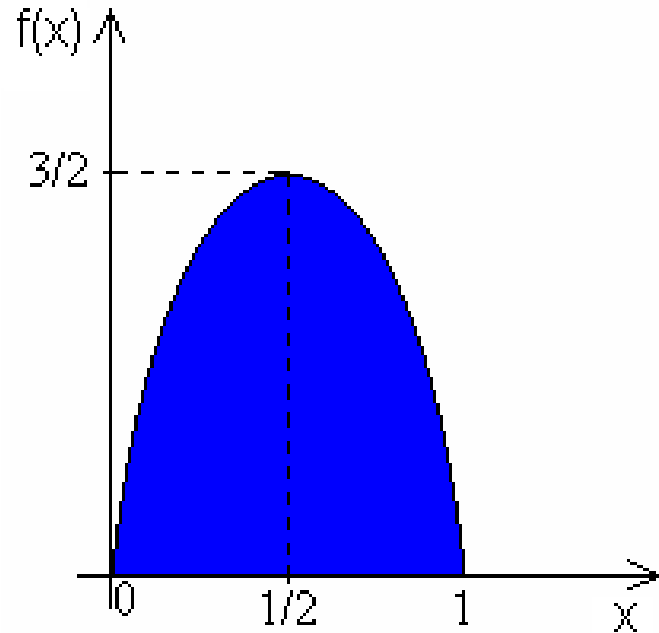
$$= \frac{3}{2} - \frac{6}{5} - \frac{1}{4} = \frac{30-24-5}{20} = \frac{1}{20}$$

Exemplo 2: $f(x) = 6x - 6x^2$, $S_x = [0,1]$



$$\begin{aligned}
 \mu_3 &= E(X^3) - 3\mu E(X^2) + 2\mu^3 \\
 &= \left[\int_0^1 x^3 (6x - 6x^2) dx \right] - 3\mu \left[\int_0^1 x^2 (6x - 6x^2) dx \right] + 2\mu^3 \\
 &= \left[\int_0^1 (6x^4 - 6x^5) dx \right] - 3\mu \left[\int_0^1 (6x^3 - 6x^4) dx \right] + 2\mu^3 \\
 &= \left[\int_0^1 6x^4 dx - \int_0^1 6x^5 dx \right] - 3\mu \left[\int_0^1 6x^3 dx - \int_0^1 6x^4 dx \right] + 2\mu^3 \\
 &= \left\{ 6 \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^1 - 6 \left[\frac{x^6}{6} \right]_0^1 \right\} - 3\mu \left\{ 6 \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 - 6 \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^1 \right\} + 2\mu^3 \\
 &= \left(\frac{6}{5} - 1 \right) - 3 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{2} - \frac{6}{5} \right) + 2 \times \left(\frac{1}{2} \right)^3 \\
 &= \frac{1}{5} - \frac{3}{2} \times \frac{3}{10} + 2 \left(\frac{1}{2} \right)^3 = \frac{1}{5} - \frac{9}{20} + \frac{1}{4} = \frac{4 - 9 + 5}{20} = 0
 \end{aligned}$$

Exemplo 2: $f(x) = 6x - 6x^2$, $S_x = [0,1]$



$$\begin{aligned}
 \mu_3 &= E(X^3) - 3\mu E(X^2) + 2\mu^3 \\
 &= \left[\int_0^1 x^3 (6x - 6x^2) dx \right] - 3\mu \left[\int_0^1 x^2 (6x - 6x^2) dx \right] + 2\mu^3 \\
 &= \left[\int_0^1 (6x^4 - 6x^5) dx \right] - 3\mu \left[\int_0^1 (6x^3 - 6x^4) dx \right] + 2\mu^3 \\
 &= \left[\int_0^1 6x^4 dx - \int_0^1 6x^5 dx \right] - 3\mu \left[\int_0^1 6x^3 dx - \int_0^1 6x^4 dx \right] + 2\mu^3 \\
 &= \left\{ 6 \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^1 - 6 \left[\frac{x^6}{6} \right]_0^1 \right\} - 3\mu \left\{ 6 \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 - 6 \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^1 \right\} + 2\mu^3 \\
 &= \left(\frac{6}{5} - 1 \right) - 3 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{2} - \frac{6}{5} \right) + 2 \times \left(\frac{1}{2} \right)^3 \\
 &= \frac{1}{5} - \frac{3}{2} \times \frac{3}{10} + 2 \left(\frac{1}{2} \right)^3 = \frac{1}{5} - \frac{9}{20} + \frac{1}{4} = \frac{4 - 9 + 5}{20} = 0
 \end{aligned}$$

Exemplo 2: $f(x) = 6x - 6x^2$, $S_x = [0,1]$

$$\begin{aligned}
 \mu_4 &= E(X^4) - 4\mu E(X^3) + 6\mu^2 E(X^2) - 3\mu^4 \\
 &= \left[\int_0^1 x^4 (6x - 6x^2) dx \right] - 4\mu \left[\int_0^1 x^3 (6x - 6x^2) dx \right] + 6\mu^2 \left[\int_0^1 x^2 (6x - 6x^2) dx \right] - 3\mu^4 \\
 &= \left[\int_0^1 (6x^5 - 6x^6) dx \right] - 4\mu \left[\int_0^1 (6x^4 - 6x^5) dx \right] + 6\mu^2 \left[\int_0^1 (6x^3 - 6x^4) dx \right] - 3\mu^4 \\
 &= \left\{ 6 \left[\frac{x^6}{6} \right]_0^1 - 6 \left[\frac{x^7}{7} \right]_0^1 \right\} - 4\mu \left\{ 6 \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^1 - 6 \left[\frac{x^6}{6} \right]_0^1 \right\} + 6\mu^2 \left\{ 6 \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 - 6 \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^1 \right\} - 3\mu^4 \\
 &= \left(1 - \frac{6}{7} \right) - 4 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{6}{5} - 1 \right) + 6 \times \left(\frac{1}{2} \right)^2 \times \left(\frac{3}{2} - \frac{6}{5} \right) - 3 \times \left(\frac{1}{2} \right)^4 \\
 &= \frac{1}{7} - \frac{4}{2} \times \frac{1}{5} + \frac{3}{2} \times \frac{3}{10} - \frac{3}{16} \\
 &= \frac{1}{7} - \frac{4}{10} + \frac{9}{20} - \frac{3}{16} = \frac{80 - 224 + 252 - 105}{560} = \frac{3}{560} = 0,005357
 \end{aligned}$$

Exemplo 2: $f(x) = 6x - 6x^2$, $S_x = [0,1]$

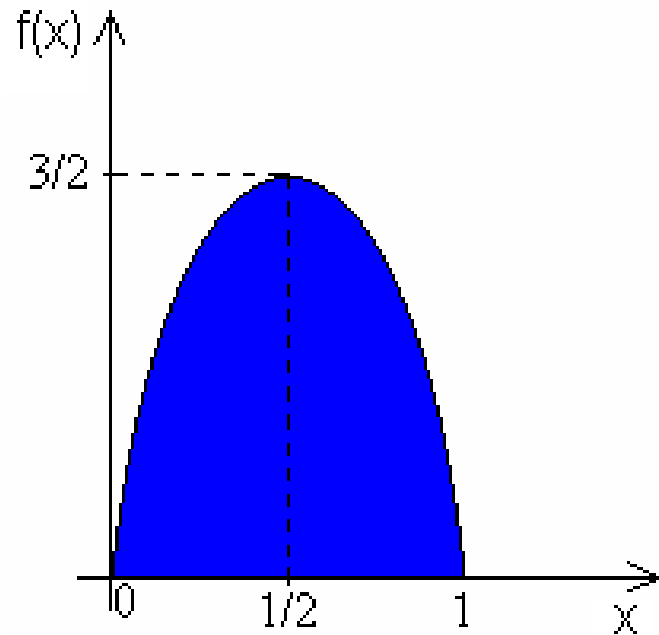
Momentos ordinários

$$\begin{aligned}\mu'_2 = E(X^2) &= \int_{S_x} x^2 f(x) dx = \int_0^1 x^2 (6x - 6x^2) dx = \int_0^1 (6x^3 - 6x^4) dx \\ &= 6 \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 - 6 \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{3}{2} - \frac{6}{5} = \frac{3}{10}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu'_3 = E(X^3) &= \int_{S_x} x^3 f(x) dx = \int_0^1 x^3 (6x - 6x^2) dx = \int_0^1 (6x^4 - 6x^5) dx \\ &= 6 \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^1 - 6 \left[\frac{x^6}{6} \right]_0^1 = \frac{6}{5} - 1 = \frac{2}{10}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu'_4 = E(X^4) &= \int_{S_x} x^4 f(x) dx = \int_0^1 x^4 (6x - 6x^2) dx = \int_0^1 (6x^5 - 6x^6) dx \\ &= 6 \left[\frac{x^6}{6} \right]_0^1 - 6 \left[\frac{x^7}{7} \right]_0^1 = 1 - \frac{6}{7} = \frac{1}{7}\end{aligned}$$

Exemplo 2: $f(x) = 6x - 6x^2$, $S_x = [0,1]$



$$\begin{aligned}\mu_3 &= E(X^3) - 3\mu E(X^2) + 2\mu^3 \\ &= \frac{2}{10} - 3 \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{10} + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0\end{aligned}$$

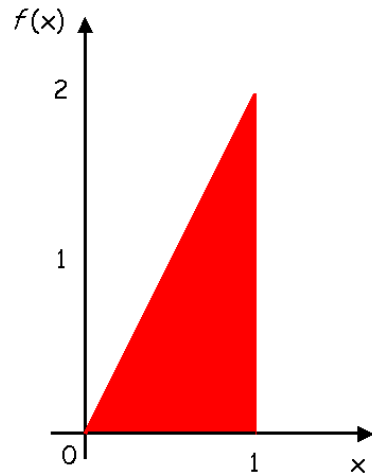
$$\begin{aligned}\mu_4 &= E(X^4) - 4\mu E(X^3) + 6\mu^2 E(X^2) - 3\mu^4 \\ &= \frac{1}{7} - 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{10} + 6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{3}{10} - 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 \\ &= 0,005357\end{aligned}$$

$$a_3 = \frac{\mu_3}{\mu_2 \sqrt{\mu_2}} = \frac{0}{1/20 \sqrt{1/20}} = 0 \rightarrow \text{Simétrica}$$

$$a_4 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{0,005357}{(1/20)^2} = 2,14 \rightarrow \text{Platicúrtica}$$

Descrição das variáveis aleatórias

$$f(x) = 2x, S_x = [0,1]$$



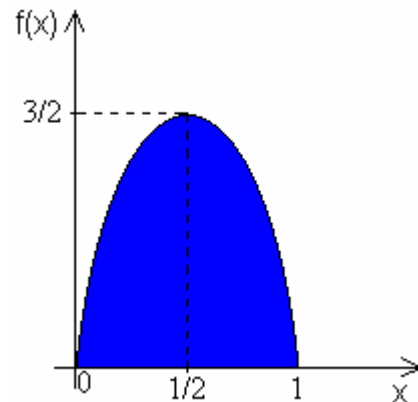
$$F(x) = x^2$$

$$\mu = \frac{2}{3} \quad \sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{1}{18}} = \frac{1}{\sqrt{18}}$$

$$a_3 = -0,565 \rightarrow \text{Assimétrica negativa}$$

$$a_4 = 40,8 \rightarrow \text{Leptocúrtica}$$

$$f(x) = 6x - 6x^2, S_x = [0,1]$$



$$F(x) = 3x^2 - 2x^3$$

$$\mu = \frac{1}{2} \quad \sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{1}{20}} = \frac{1}{\sqrt{20}}$$

$$a_3 = 0 \rightarrow \text{Simétrica}$$

$$a_4 = 2,14 \rightarrow \text{Platicúrtica}$$

Variável aleatória discreta

Espaço amostral enumerável (finito ou infinito)

X = número de bolas pretas

$$S_x = \{0, 1, 2\}$$

$p(x)$ → função de probabilidade

Condições:

1. $p(x) \geq 0, \forall x \in S_x$
2. $\sum_{x \in S_x} p(x) = 1$

O valor da função $p(x)$ expressa a probabilidade de ocorrência de cada valor de X

$$p(x) = \frac{C_3^x C_2^{2-x}}{C_5^2}, \text{ para } S_x = \{0, 1, 2\}$$

Variável aleatória contínua

Espaço amostral contínuo ou não enumerável (intervalo infinito)

X = volume de chuva em uma região (mm)

$$S_x = [0; 2000]$$

$f(x)$ → função densidade de probabilidade

Condições:

1. $f(x) \geq 0, \forall x \in S_x$
2. $\int_{S_x} f(x) dx = 1$

A área sob $f(x)$ num intervalo $[a, b]$ expressa a probabilidade de ocorrer um valor da variável X entre os limites a e b .

$$f(x) = \frac{3x}{2} - \frac{3x^2}{4}, \text{ para } S_x = [0; 2000]$$

Modelo matemático

Variável aleatória discreta

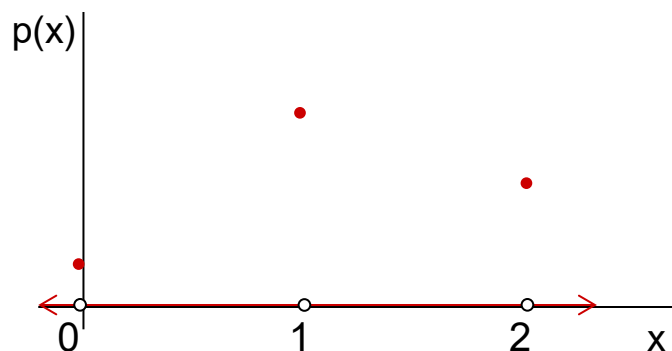
Espaço amostral enumerável (finito ou infinito)

X = número de bolas pretas

$$S_x = \{0, 1, 2\}$$

- Condições:**
1. $p(x) \geq 0, \forall x \in S_x$
 2. $\sum_{x \in S_x} p(x) = 1$

O valor da função $p(x)$ expressa a probabilidade de ocorrência de cada valor de X



Variável aleatória contínua

Espaço amostral contínuo ou não enumerável (intervalo infinito)

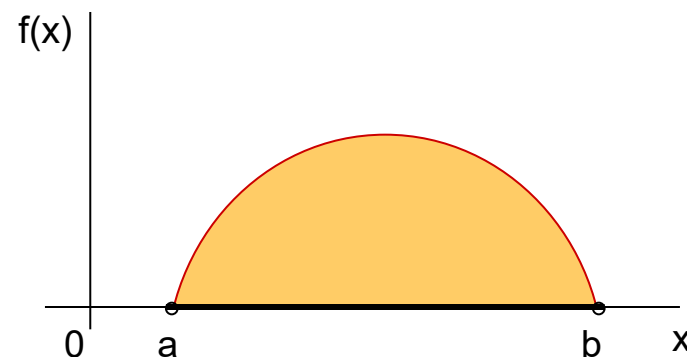
X = volume de chuva em uma região (mm)

$$S_x = [0; 2000]$$

$f(x) \rightarrow$ função densidade de probabilidade

- Condições:**
1. $f(x) \geq 0, \forall x \in S_x$
 2. $\int_{S_x} f(x) dx = 1$

A área sob $f(x)$ num intervalo $[a, b]$ expressa a probabilidade de ocorrer um valor da variável X entre os limites a e b .



Variável aleatória discreta

Espaço amostral enumerável (finito ou infinito)

X = número de bolas pretas

$$S_x = \{0, 1, 2\}$$

Condições:

1. $p(x) \geq 0, \forall x \in S_x$
2. $\sum_{x \in S_x} p(x) = 1$

O valor da função $p(x)$ expressa a probabilidade de ocorrência de cada valor de X

Variável aleatória contínua

Espaço amostral contínuo ou não enumerável (intervalo infinito)

X = volume de chuva em uma região (mm)

$$S_x = [0; 2000]$$

$f(x)$ → função densidade de probabilidade

Condições:

1. $f(x) \geq 0, \forall x \in S_x$
2. $\int_{S_x} f(x) dx = 1$

A área sob $f(x)$ num intervalo $[a, b]$ expressa a probabilidade de ocorrer um valor da variável X entre os limites a e b .

A função $F(x)$ expressa a probabilidade da variável X assumir um valor menor ou igual a $x \rightarrow P(X \leq x)$

Medidas descritivas	Variável aleatória discreta	Variável aleatória contínua
Média	$\mu = E(X) = \sum_{x \in S_X} x p(x)$	$\mu = E(X) = \int_{S_X} x f(x) dx$
Variância	$\sigma^2 = E(X - \mu)^2 = \sum_{x \in S_X} (x - \mu)^2 p(x)$	$\sigma^2 = E(X - \mu)^2 = \int_{S_X} (x - \mu)^2 f(x) dx$
Desvio padrão	$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$	$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$
Momentos	$\mu_r = E(X - \mu)^r = \sum_{x \in S_X} (x - \mu)^r p(x)$	$\mu_r = E(X - \mu)^r = \int_{S_X} (x - \mu)^r f(x) dx$
Assimetria	$a_3 = \frac{\mu_3}{\mu_2 \sqrt{\mu_2}}$	$a_3 = \frac{\mu_3}{\mu_2 \sqrt{\mu_2}}$
Curtose	$a_4 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$	$a_4 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$

Bibliografia

BUSSAB, W.O.; MORETTIN, P.A. Estatística Básica. São Paulo: Saraiva. 2006. 526p.

FERREIRA, D.F. Estatística Básica. Lavras: Editora UFLA, 2005, 664p.

FREUND, J.E., SIMON, G.A. Estatística Aplicada. Economia, Administração e Contabilidade. 9.ed., Porto Alegre: Bookman, 2000. 404p.

MEYER, P. L. Probabilidade: aplicações à estatística. Rio de Janeiro: LTC, 1976.

MLODINOW, L. O andar do bêbado. Como o acaso determina nossas vidas. Rio de Janeiro: Editora Zahar, 2009, 264p.

SILVEIRA JÚNIOR, P., MACHADO, A.A., ZONTA, E.P., SILVA, J.B. da Curso de Estatística. v.2, Pelotas: Universidade Federal de Pelotas, 1992. 234p.

**Sistema Galileu de Educação Estatística. Disponível em:
<http://www.galileu.esalq.usp.br/topico.html>**