

Testes para a variância populacional (σ^2)

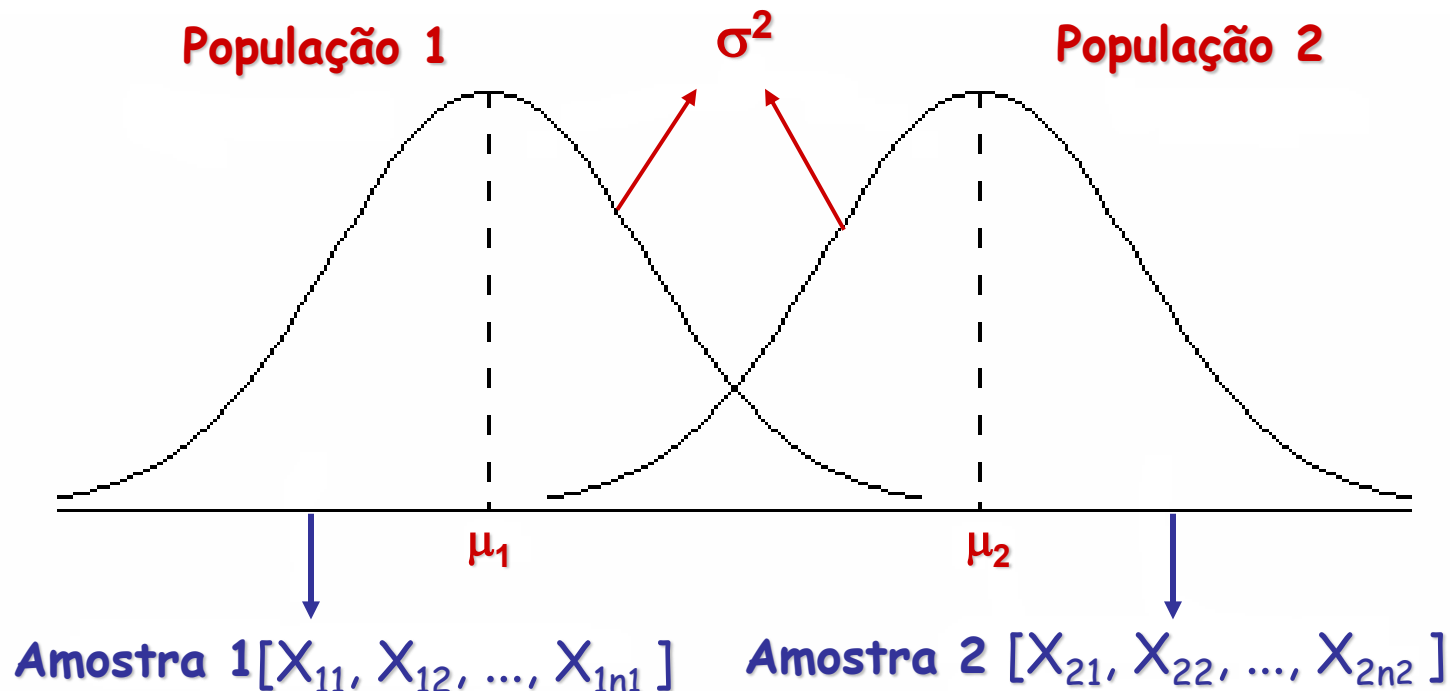
- ⇒ Comparação de variâncias de duas populações (σ_1^2 e σ_2^2)
→ teste de homogeneidade de variâncias
- ⇒ Comparação da variância de uma população (σ^2)
com um valor padrão (σ_0^2)

Teste de homogeneidade de variâncias

Uma das aplicações deste teste é verificar se a pressuposição de que as variâncias populacionais são iguais, requerida no teste t, é verdadeira.

Pressuposições para o uso do teste t:

- A variável em estudo tem distribuição normal
- ➔ ■ **As variâncias das populações são iguais**
- As amostras retiradas das populações são independentes



Algoritmo para construção de um teste de hipótese

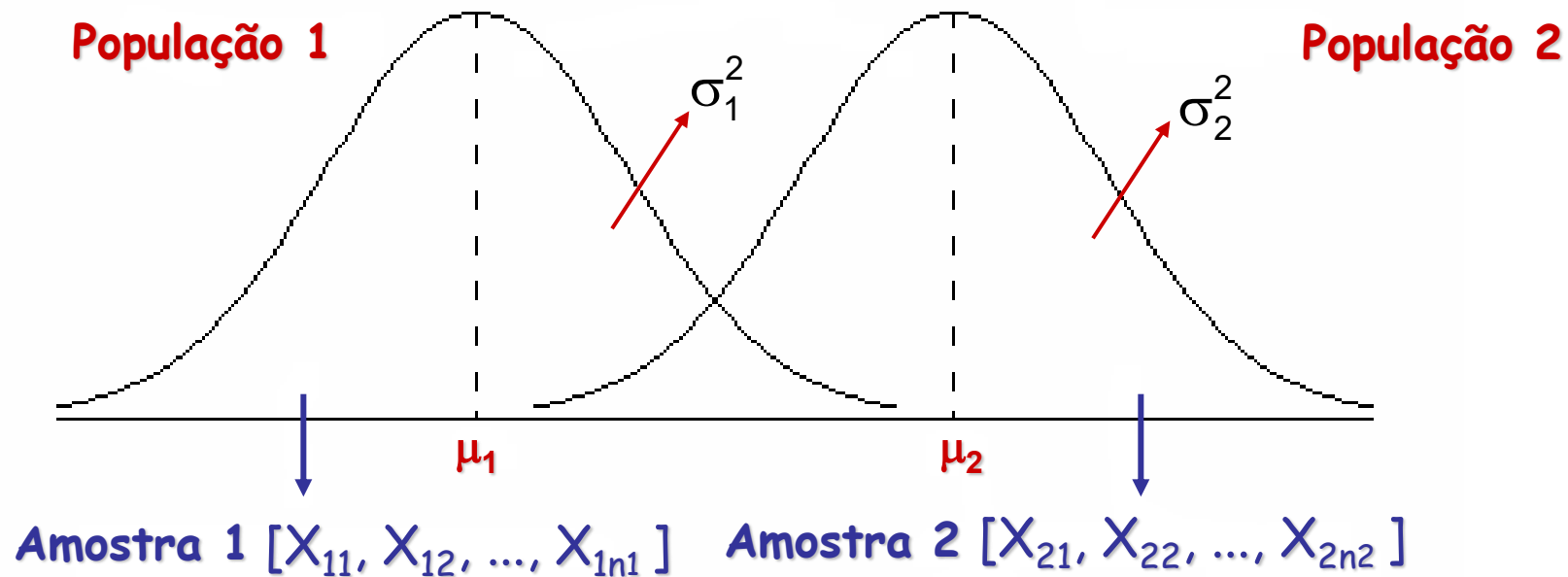
1. Definir as hipóteses estatísticas.
2. Fixar a taxa de erro aceitável.
3. Escolher a estatística para testar a hipótese e verificar as pressuposições para o seu uso.
4. Usar as observações da amostra para calcular o valor da estatística do teste.
5. Decidir sobre a hipótese testada e concluir.

Comparação de variâncias de duas populações

◆ Teste de homogeneidade de variâncias (teste F)

Pressuposições:

- A variável em estudo tem distribuição normal
- As amostras retiradas das populações são independentes



Hipóteses estatísticas

Em um teste que compara as variâncias de duas populações, as hipóteses estatísticas são:

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

$$H_A : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

Bilateral

$$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$$

Unilateral direita

$$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$$

Unilateral esquerda

Escolher uma das três

Quando o teste é aplicado para verificar a pressuposição de homogeneidade de variância requerida no teste t, utiliza-se a **hipótese alternativa bilateral**.

♦ Teste de homogeneidade de variância (teste F)

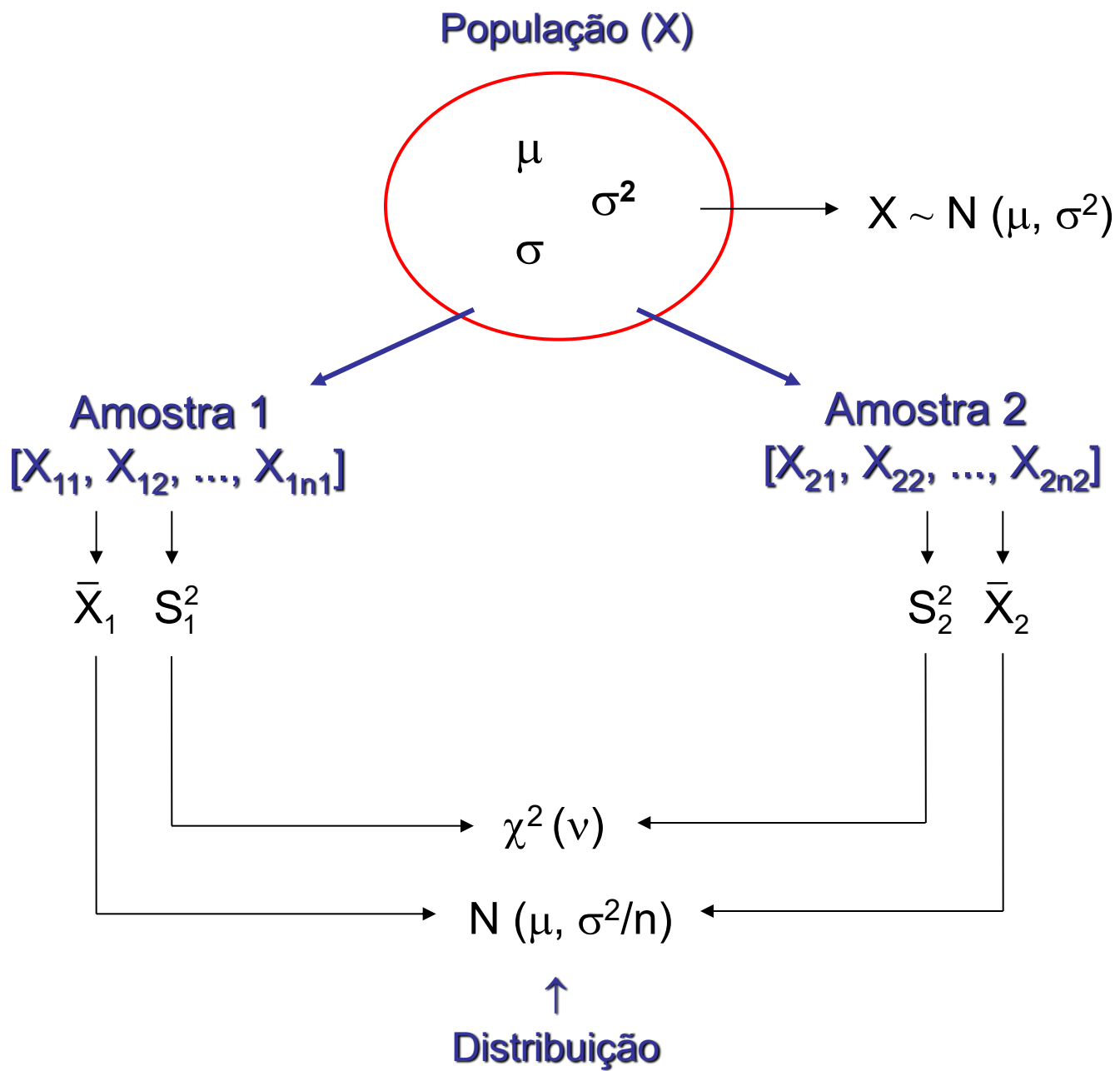
Hipótese sob verificação: $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

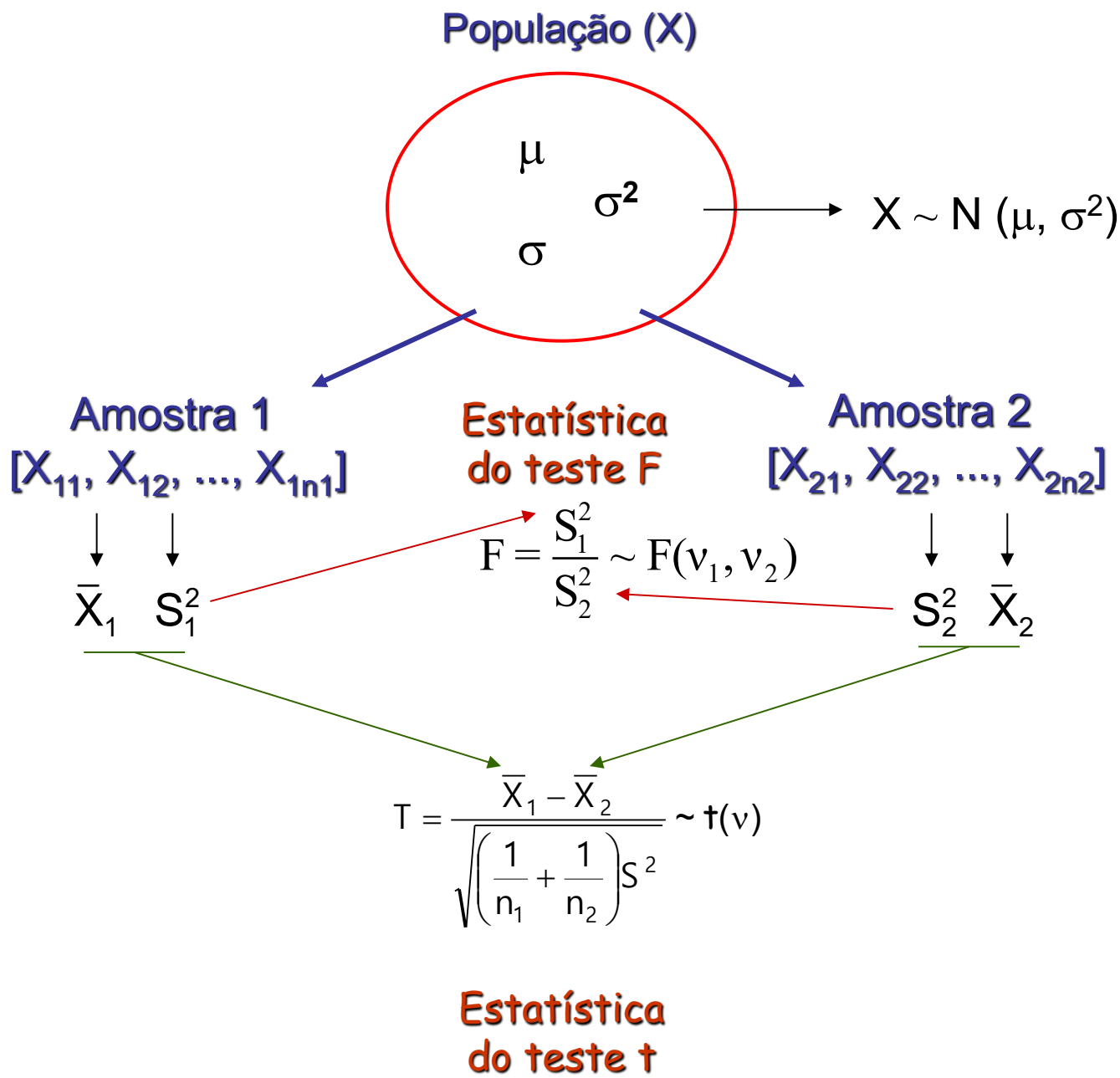
Estatística do teste: $F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$

Valor que deve ser
calculado na amostra

Sob H_0 verdadeira, a estatística F tem **distribuição F** com parâmetros v_1 e v_2 , ou seja,

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(v_1, v_2)$$





Distribuição F de Snedecor

A variável F pode ser definida como a razão entre duas variáveis independentes com distribuição χ^2

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(v_1, v_2)$$

distribuição χ^2

Sendo definida como a razão entre duas variáveis positivas, os valores da variável F nunca serão negativos.

A função densidade de probabilidade da distribuição F é dada por

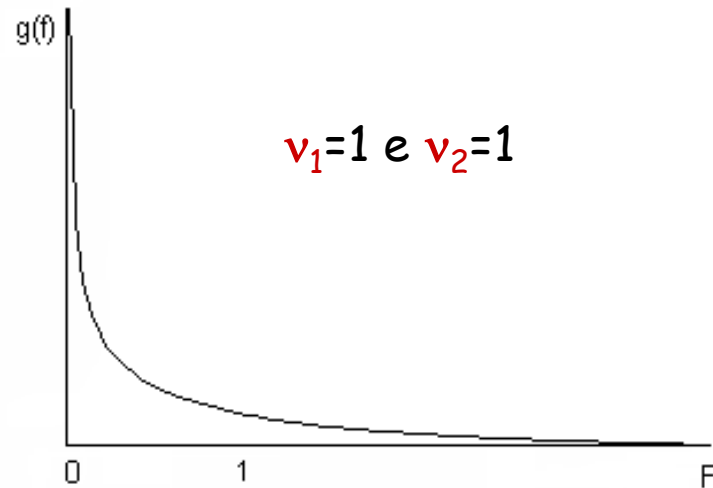
$$g(f) = \frac{1}{B\left(\frac{v_1}{2}, \frac{v_2}{2}\right)} \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\frac{v_1}{2}} \frac{f^{\frac{v_1}{2}-1}}{\left(1 + \frac{v_1}{v_2} f\right)^{\frac{v_1+v_2}{2}}}, \text{ sendo } 0 \leq f < +\infty$$

parâmetros

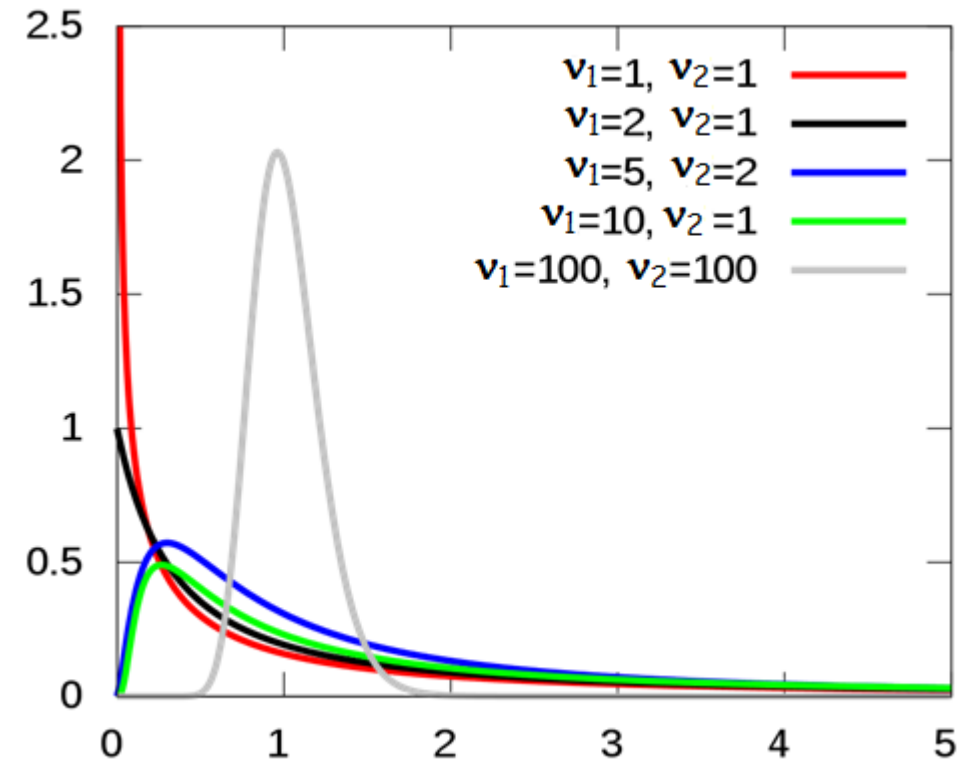
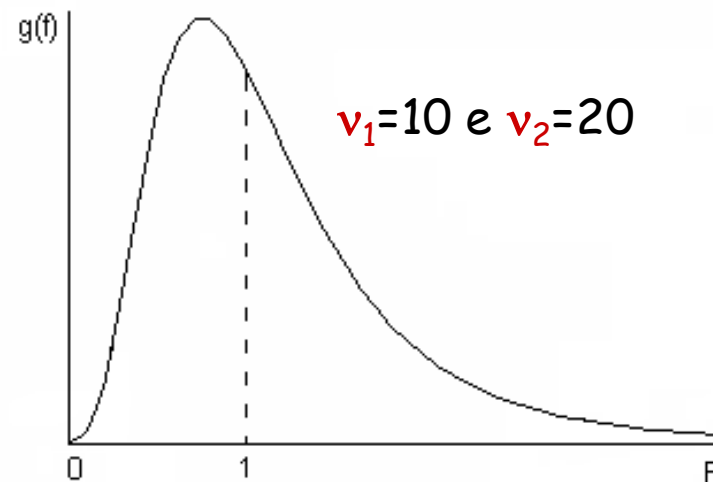
Distribuição F de Snedecor

A forma do gráfico muda quando v_1 e v_2 se alteram.

Formato atípico:
quando valores
de v_1 e v_2 são
muito baixos.



Formato típico



A distribuição F tem média $\mu=1$.

Como tomar a decisão a respeito de H_0 ?

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

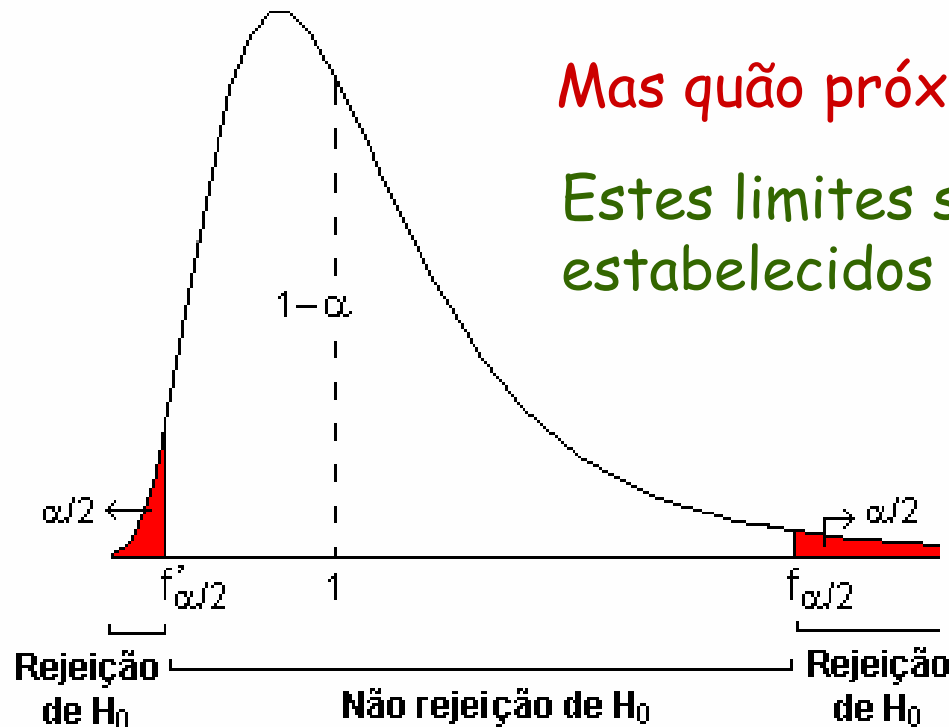
$$H_A : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

Se H_0 é verdadeira, devemos esperar que o valor da estatística F seja próximo de 1.

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

Mas quão próximo de 1 este valor deve estar?

Estes limites são dados pelos valores críticos, estabelecidos com base no α .



⇒ Se $f'_{\alpha/2} < f \text{ calculado} < f_{\alpha/2}$, não temos motivos para rejeitar $H_0 \Rightarrow f \text{ é típico}$

⇒ Se $f \text{ calculado} < f'_{\alpha/2}$ ou $f \text{ calculado} > f_{\alpha/2}$, rejeitamos $H_0 \Rightarrow f \text{ é atípico}$

Teste bilateral condicionado

⇒ Para efetuar o teste F, convencionamos que a estatística F é obtida fixando a maior variância no numerador.

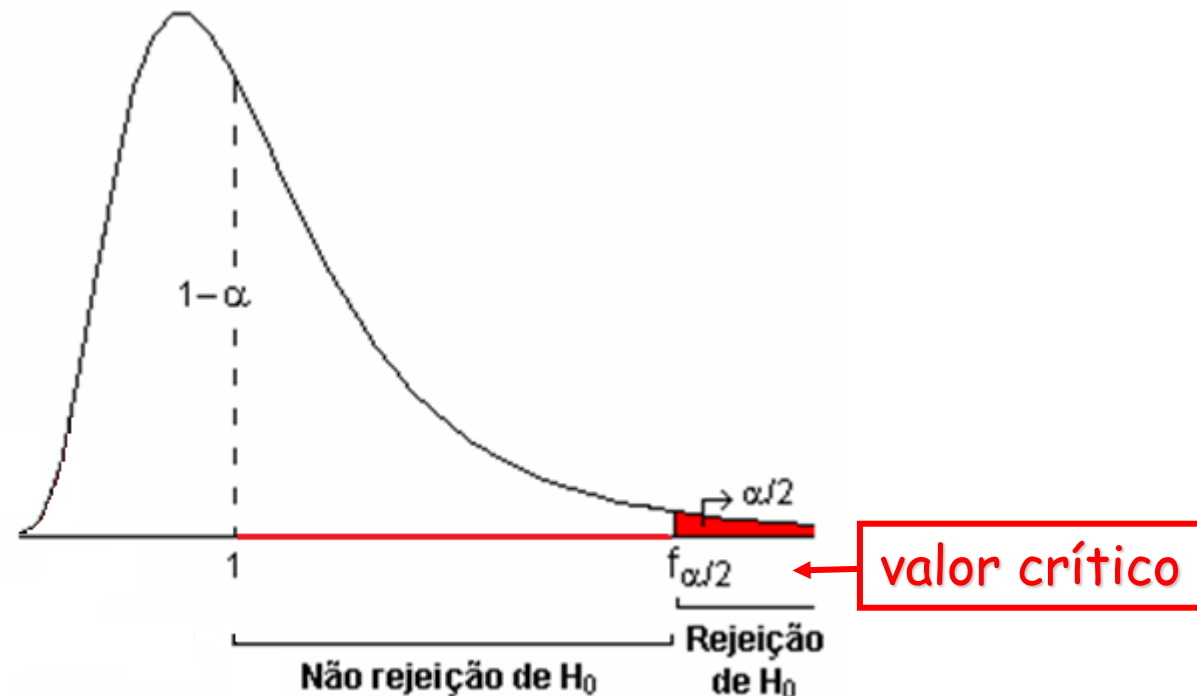
$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

$$H_A : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

maior
nunca será menor que 1
menor

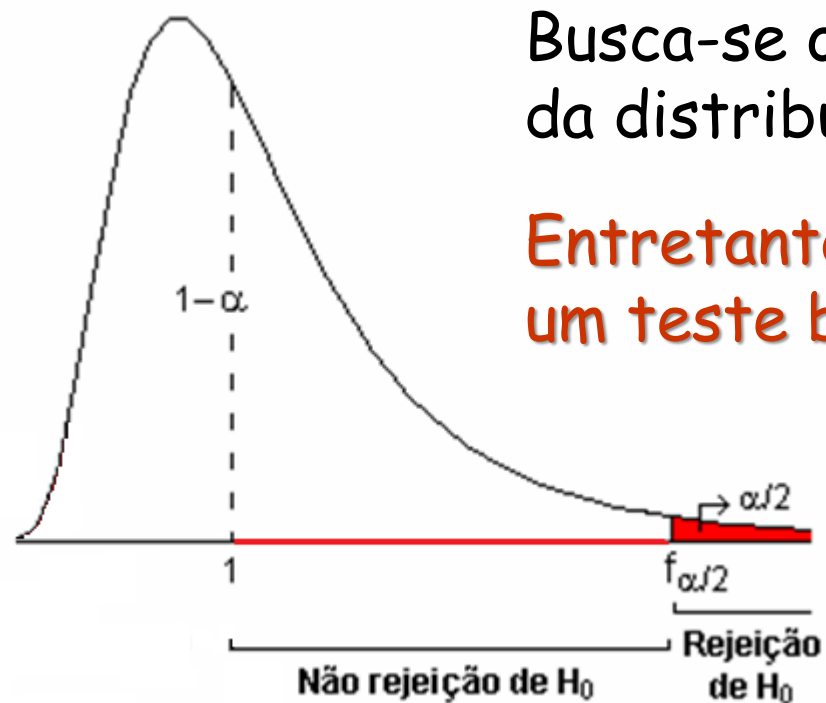
Em um teste bilateral condicionado precisamos somente do valor crítico superior (à direita) para decidir sobre H_0



Critério de decisão

A regra de decisão a respeito de H_0 pode ser estabelecida com base no valor crítico $f_{\alpha/2}(v_1; v_2)$.

O teste condicionado possibilita a utilização da tabela com limites unilaterais, mais frequentemente disponível nos livros.



Busca-se o valor crítico na tabela de limites unilaterais da distribuição F , a partir dos valores de α , v_1 e v_2 .

Entretanto, para usar a tabela com limites unilaterais em um teste bilateral devemos dividir a área α por 2.

v ₂	α	v ₁																			Inf.
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	15	20	24	30	40	60	120	
1	0,05	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	236,8	238,9	240,5	241,9	243,0	243,9	245,9	248,0	249,1	250,1	251,1	252,2	253,3	254,3
	0,025	647,8	799,5	864,2	899,6	921,8	937,1	948,2	956,7	963,3	968,6	976,7	984,9	984,9	993,1	997,2	1001,	1006,	1010,	1014,	1018,
	0,01	4052,	5000,	5403,	5625,	5764,	5859,	5928,	5982,	6022,	6056,	6082,	6106,	6157,	6209,	6235,	6261,	6287,	6313,	6339,	6366,
	0,001	4053*	5000*	5404*	5625*	5764*	5859*	5929*	5981*	6023*	6056*	6084*	6107*	6158*	6209*	6235*	6261*	6287*	6313*	6340*	6366*
2	0,05	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,40	19,41	19,43	19,45	19,45	19,46	19,47	19,48	19,49	19,50
	0,025	38,51	39,00	39,17	39,25	39,30	39,33	39,36	39,37	39,39	39,40	39,41	39,41	39,43	39,45	39,46	39,46	39,47	39,47	39,48	39,49
	0,01	98,50	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,36	99,37	99,39	99,40	99,41	99,42	99,43	99,45	99,46	99,47	99,47	99,48	99,49	99,50
	0,001	998,5	999,0	999,2	999,2	999,3	999,3	999,4	999,4	999,4	999,4	999,4	999,4	999,4	999,4	999,5	999,5	999,5	999,5	999,5	999,5
3	0,05	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,76	8,74	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55	8,53
	0,025	17,44	16,04	15,44	15,10	14,88	14,73	14,62	14,54	14,47	14,42	14,34	14,25	39,43	14,17	14,12	14,08	14,04	13,99	13,95	13,90
	0,01	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,35	27,23	27,13	27,05	26,87	26,69	26,60	26,50	26,41	26,32	26,22	26,13
	0,001	167,0	148,5	141,1	137,1	134,6	132,8	131,6	130,6	129,9	129,2	128,8	128,3	127,4	126,4	125,9	125,4	125,0	124,5	124,0	123,5
4	0,05	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,93	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66	5,63
	0,025	12,22	10,65	9,98	9,60	9,36	9,20	9,07	8,98	8,90	8,84	8,75	8,66	8,66	8,56	8,51	8,46	8,41	8,36	8,31	8,26
	0,01	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,55	14,45	14,37	14,20	14,02	13,93	13,84	13,75	13,65	13,56	13,46
	0,001	74,14	61,25	56,18	53,44	51,71	50,53	49,66	49,00	48,47	48,05	47,70	47,41	46,76	46,10	45,77	45,43	45,09	44,75	44,40	44,05
5	0,05	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,70	4,68	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4,40	4,36
	0,025	10,01	8,43	7,76	7,39	7,15	6,98	6,85	6,76	6,68	6,62	6,52	6,43	6,46	6,33	6,28	6,23	6,18	6,12	6,07	6,02
	0,01	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29	10,16	10,05	9,96	9,89	9,72	9,55	9,47	9,38	9,29	9,20	9,11	9,02
	0,001	47,18	37,12	33,20	31,09	29,75	28,84	28,16	27,64	27,24	26,92	26,64	26,42	25,91	25,39	25,14	24,87	24,60	24,33	24,06	23,79
6	0,05	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,70	3,67
	0,025	8,81	7,26	6,60	6,23	5,99	5,82	5,70	5,60	5,52	5,46	5,37	5,27	5,27	5,17	5,12	5,07	5,01	4,96	4,90	4,85
	0,01	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72	7,56	7,40	7,31	7,23	7,14	7,06	6,97	6,88
	0,001	35,51	27,00	23,70	21,92	20,81	20,03	19,46	19,03	18,69	18,41	18,18	17,99	17,56	17,12	16,89	16,67	16,44	16,21	15,99	15,75
7	0,05	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,60	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27	3,23
	0,025	8,07	6,54	5,89	5,52	5,29	5,12	4,99	4,90	4,82	4,76	4,67	4,57	3,51	4,47	4,42	4,36	4,31	4,25	4,20	4,14
	0,01	12,25	9,55	8,45	7,85	4,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62	6,54	6,47	6,31	6,16	6,07	5,99	5,91	5,82	5,74	5,65
	0,001	29,25	21,69	18,77	17,19	16,21	15,52	15,02	14,63	14,33	14,08	13,88	13,71	13,32	12,93	12,73	12,53	12,33	12,12	11,91	11,70
8	0,05	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,31	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97	2,93
	0,025	7,57	6,06	5,42	5,05	4,82	4,65	4,53	4,43	4,36	4,30	4,20	4,10	4,10	4,00	3,95	3,89	3,84	3,78	3,73	3,67
	0,01	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81	5,74	5,67	5,52	5,36	5,28	5,20	5,12	5,03	4,95	4,86
	0,001	25,42	18,49	15,83	14,39	13,49	12,86	12,40	12,04	11,77	11,54	11,35	11,19	10,84	10,48	10,30	10,11	9,92	9,73	9,53	9,33
9	0,05	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,10	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75	2,71
	0,025	7,21	5,71	5,08	4,72	4,48	4,32	4,20	4,10	4,03	3,96	3,87	3,77	3,77	3,67	3,61	3,56	3,51	3,45	3,39	3,33
	0,01	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11	4,96	4,81	4,73	4,65	4,57	4,48	4,40	4,31
	0,001	22,86	16,39	13,90	12,56	11,71	11,13	10,70	10,37	10,11	9,89	9,72	9,57	9,24	8,90	8,72	8,55	8,37	8,19	8,00	7,81
10	0,05	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,94	2,91	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58	2,54
	0,025	6,94	5,46	4,83	4,47	4,24	4,07	3,95	3,85	3,78	3,72	3,62	3,52	3,52	3,42	3,37	3,31	3,26	3,20	3,14	3,08
	0,01	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85	4,78	4,71	4,56	4,41	4,33	4,25	4,17	4,08	4,00	3,91
	0,001	21,04	14,91	12,55	11,28	10,48	9,92	9,52	9,20	8,96	8,75	8,59	8,45	8,13	7,80	7,64	7,47	7,30	7,12	6,94	6,76
11	0,05	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,82	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45	2,40
	0,025	6,72	5,26	4,63	4,28	4,04	3,88	3,76	3,66	3,59	3,53	3,43	3,33	3,33	3,23	3,17	3,12	3,06	3,00	2,94	2,88
	0,01	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40	4,25	4,10	4,02	3,94	3,86	3,78	3,69	3,60
	0,001	19,69	13,81	11,56	10,35	9,58	9,05	8,66	8,35	8,12	7,92	7,76	7,63	7,32	7,01	6,85	6,68	6,52	6,35	6,17	6,00
12	0,05	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,72	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34	2,30
	0,025	6,55	5,10	4,47	4,12	3,89	3,73	3,61	3,51	3,44	3,37	3,28	3,18	3,18	3,07	3,02	2,96	2,91	2,85	2,79	2,72
	0,01	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16	4,01	3,86	3,78	3,70	3,62	3,54	3,45	3,36
	0,001	18,64	12,97	10,80	9,63	8,89	8,38	8,00	7,71	7,48	7,29	7,14	7,00	6,71	6,40	6,25	6,09	5,93	5,76	5,59	5,42

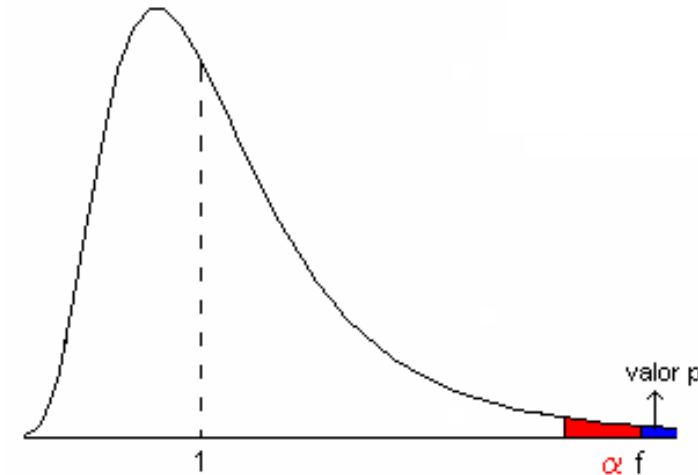
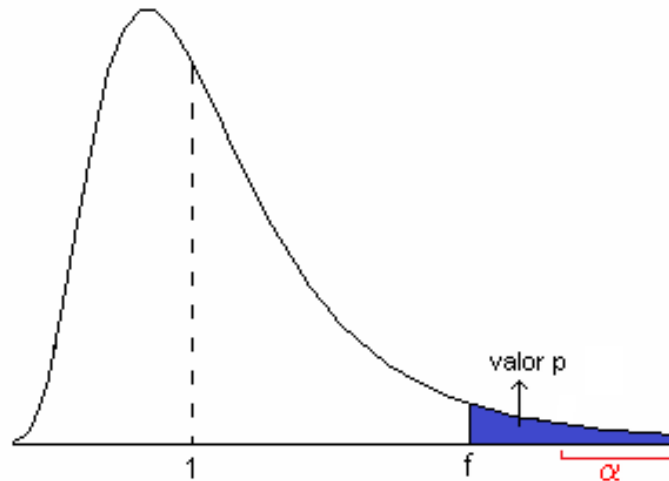
Esta tabela fornece os limites unilaterais superiores da distribuição. Isto significa que os valores f apresentados delimitam a área α à direita.

Quando o teste for bilateral, temos que dividir α por 2.

Só assim, vamos obter o valor crítico correto, ou seja, aquele que delimita a área $\alpha/2$ à direita.

Outro critério de decisão

Valor p: probabilidade de que seja obtido um valor de F maior que o valor observado na amostra, dado que H_0 é verdadeira



Como tomar a decisão a respeito de H_0 ?

⇒ Se o **valor p** for maior ou igual a α : **não rejeitamos** a hipótese nula, pois **f é típico** ou está em uma região de alta probabilidade

⇒ Se o **valor p** for menor que α : **rejeitamos** a hipótese nula, pois **f é atípico** ou está em uma região de baixa probabilidade

Exemplo:

Durante o processo de fritura, um alimento absorve gordura. Um estudo foi conduzido com a finalidade de verificar se a quantidade absorvida depende do tipo de gordura. Para tanto foram utilizados dois tipos de gordura: vegetal e animal. Os dados obtidos foram:

Gordura animal	28	41	47	32	35	27
Gordura vegetal	25	43	28	21	13	

Antes de proceder o teste t, verifique se a pressuposição de homogeneidade de variâncias foi atendida. Utilize $\alpha = 0,05$.

Resolução:

Variável em estudo: X = quantidade de gordura absorvida

1. Pressuposições: 1. A variável em estudo tem distribuição normal.
2. As amostras retiradas das populações são independentes.

2. Hipóteses estatísticas:
$$\begin{cases} H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_A : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{cases}$$

3. Taxa de erro tipo I: $\alpha = 0,05$

4. Estatística do teste:
$$f = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{122,0}{60,4} = 2,02$$

5. Decisão e conclusão:

$$\left. \begin{array}{l} v_1 = 4 \text{ e } v_2 = 5 \\ \alpha/2 = 0,025 \end{array} \right\} f_{\alpha/2} = 7,39$$

$$f = 2,02 < f_{\alpha/2} = 7,39 \rightarrow \text{Não rejeitamos } H_0$$

Concluimos, ao nível de 5% de significância, que as variâncias populacionais não diferem entre si.

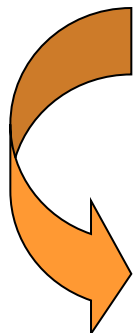
Testes de homogeneidade para k variâncias

- ◆ Teste de Bartlett
- ◆ Teste de Hartley
- ◆ Teste de Cochran

Outra importante aplicação do teste F

Testes de hipóteses unilaterais

Análise da variância → compara duas variâncias para encontrar diferenças entre k médias


$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$
$$H_A : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$$

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$$

$$H_A : \text{pelo menos duas média diferem}$$