Gabarito da lista 4

3.2.3. Variáveis aleatórias contínuas

1. A função pode ser reescrita desta forma: f(x) = $\frac{3x}{2} - \frac{3x^2}{4}$, S_x= [0; 2]

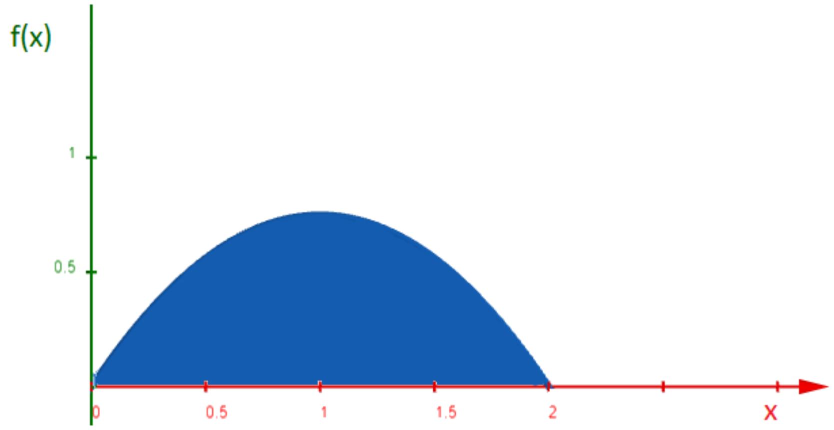
a) Primeira condição: f(x) ≥ 0, ∀ x ∊ SX

para x = 0, temos f(0) = $\frac{3.0}{2} - \frac{3.0^2}{4}$ = 0

para x = 1, temos f(1) = $\frac{3.1}{2} - \frac{3.1^2}{4}$= 0,75

para x = 2, temos f(2) = $\frac{3.2}{2} - \frac{3.2^2}{4}$ = 0

A partir desses 3 pontos podemos traçar o gráfico e verificar que todos os valores da função f(x) são não negativos no intervalo de 0 a 2, portanto, a primeira condição foi atendida.



Segunda condição: $\int_{Sx} \mathrm{f(x)dx} = 1$

$$\int_0^2 (\frac{3}{2}x - \frac{3}{4}x^2)dx$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^2 x\, dx - \frac{3}{4}\int_0^2 x^2\, dx$$

$$= \frac{3}{2}\,\frac{2^2}{2} - \frac{3}{4}\,\frac{2^3}{3} = 1$$

Como as duas condições foram satisfeitas, a função f(x) é função de densidade de probabilidade.

b) F(x) = $\int_0^x (\frac{3}{2}t - \frac{3}{4}t^2)dt$

$$= \frac{3}{2}\int_0^x t\ dt - \frac{3}{4}\int_0^x t^2\, dt$$

$$= \frac{3}{2}(\int_0^x t\ dt - \frac{3}{4}\int_0^x t^2\, dt)$$

$$= \frac{3}{2}\,\frac{x^2}{2} - \frac{3}{4}\,\frac{x^3}{3}$$

F(x) = $\frac{3x^2 - x^3}{4}$

c) P(A) = P(1 < x < 2) = F(2) – F(1) = 1 – 0,5 = 0,5

F(2) = $\frac{3.2^2 - 2^3}{4}$ = 1

F(1) = $\frac{3.1^2 - 1^3}{4}$ = 0,5

d) P(x > 1,7) = 1 – P(x < 1,7)

= 1 - 0,93925 = 0,06075

F(1,7) = $\frac{3\,.1{,}7^2 - 1{,}7^3}{4}$ = 0,93925

Como obtivemos uma porcentagem baixa (0,06075) de haver necessidade de drenar água não é razoável prever um sistema de drenagem.

e) P(x < 1,3) = 0,7183

F(1,3) = $\frac{3\,.1{,}3^2 - 1{,}3^3}{4}$ = 0,7183

Como obtivemos uma porcentagem alta de haver necessidade de represar água é razoável prever a construção de barragens.

f) E(X) = $\int_{S_X} x\, f(x)dx$

E(X) = $\int_0^2 x\,(\frac{3}{2}x - \frac{3}{4}x^2)dx$

E(X) = $\int_0^2 (\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^3)dx$

E(X) = $\frac{3}{2}\int_0^2 x^2 dx - \frac{3}{4}\int_0^2 x^3\, dx$

E(X) = 1

V(X) = E(X²) – μ²

E(X²) = $\int_0^2 x^2\,(\frac{3}{2}x - \frac{3}{4}x^2)dx$

E(X²) = $\int_0^2 (\frac{3}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^4)dx$

E(X²) = $\frac{3}{2}\int_0^2 x^3 dx - \frac{3}{4}\int_0^2 x^4\, dx$

E(X²) = 1,2

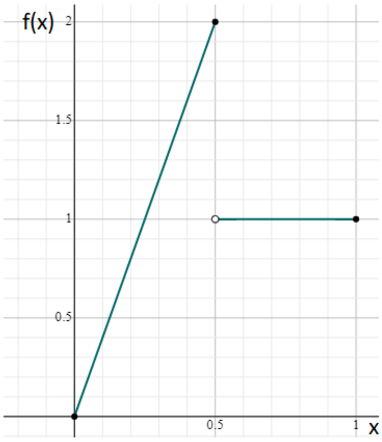
V(X) = E(X²) – μ² = 1,2 – 1² = 0,2

2.

a) f(x) = F'(x)

f(x) = 4x para 0≤ x ≤ 1/2

1 para 1/2 < x ≤ 1



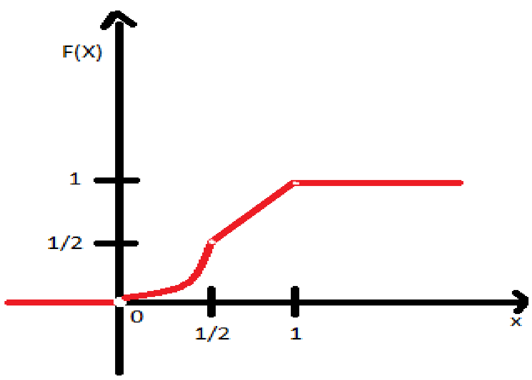
b) P(X < 2/3) = F(2/3) = 2/3

c) E(X) = $\int_0^{1/2} x4x\,dx + \int_{1/2}^{1} x1\,dx$

E(X) = $\int_0^{1/2} x4x\,dx + \int_{1/2}^{1} x1\,dx$

E(X) = $\frac{1}{6} + \frac{3}{8} = \frac{13}{24}$

d)



3.3.1. Distribuições de variáveis discretas

3. S = {não chove, chove}

S_X = {0 ,1}

a) P(X = x) = $0{,}7^x.\ 0{,}3^{1-x}$

b) E(x) = π = 0,7

V(x) = π (1-π) = 0,7 x 0,3 = 0,21

4. a) $\pi = 0{,}9$ e $n = 4$

b) $P(X = 0) = P_4^{0,4-0}.0{,}9^0.0{,}1^{4-0} = 1 \,.\, 1 \,.\, 0{,}1^4 = 0{,}0001$

$P(X = 1) = P_4^{1,4-1}.0{,}9^1.0{,}1^{4-1} = 4.\ 0{,}9 \,.\, 0{,}001 = 0{,}0036$

$P(X = 2) = P_4^{2,4-2}.0{,}9^2.0{,}1^{4-2} = 6 \,.\, 0{,}81 \,.\, 0{,}01 = 0{,}0486$

$P(X = 3) = P_4^{3,4-3}.0{,}9^3.0{,}1^{4-3} = 4 \,.\, 0{,}729.\ 0{,}1 = 0{,}2916$

$P(X = 4) = P_4^{4,4-4}.0{,}9^4.0{,}1^{4-4} = 1 \,.\, 0{,}6561 \,.1 = 0{,}6561$

X=x	0	1	2	3	4	∑
p(x)	0,0001	0,0036	0,0486	0,2916	0,6561	1

c) $E(x) = n\pi = 4 \times 0{,}9 = 3{,}6$

$V(x) = n\pi(1-\pi) = 4 \times 0{,}9 \times 0{,}1 = 0{,}36$

5. Numa competição de tiro ao alvo, a probabilidade de um atirador acertar é 1/4. Supondo que ele atira cinco vezes e que os disparos são independentes, determine:

a) a função de probabilidade (representação analítica e tabular) e seu gráfico;

$P(X = x) = P_5^{x,5-x} \,.\, 0{,}25^x \,.\, 0{,}75^{5-x}$, $\quad S_x = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

$P(X = 0) = P_5^{0,5-0}.\ 0{,}25^0.\ 0{,}75^{5-0} = 1 \times 1 \times 0{,}2373 = 0{,}2373$ ou $\frac{243}{1024}$

$P(X = 1) = P_5^{1,5-1}.\ 0{,}25^1.\ 0{,}75^{5-1} = 5 \times 0{,}25 \times 0{,}3164 = 0{,}3955$ ou $\frac{405}{1024}$

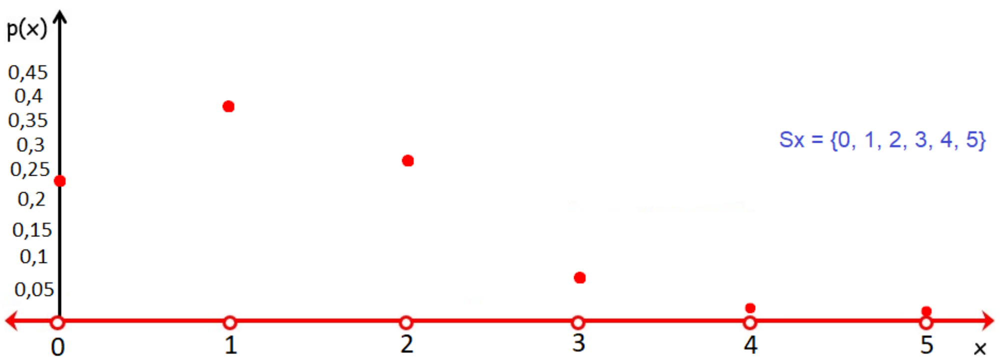
$P(X = 2) = P_5^{2,5-2}.\ 0{,}25^2.\ 0{,}75^{5-2} = 10 \times 0{,}0625 \times 0{,}421875 = 0{,}2637$ ou $\frac{270}{1024}$

$P(X = 3) = P_5^{3,5-3}.\ 0{,}25^3.\ 0{,}75^{5-3} = 10 \times 0{,}01563 \times 0{,}5625 = 0{,}08789$ ou $\frac{90}{1024}$

$P(X = 4) = P_5^{4,5-4}.\ 0{,}25^4.\ 0{,}75^{5-4} = 5 \times 0{,}003906 \times 0{,}75 = 0{,}01465$ ou $\frac{15}{1024}$

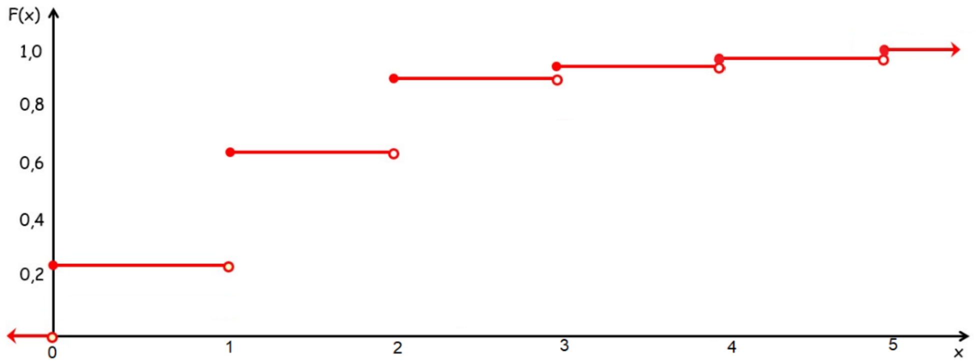
$P(X = 5) = P_5^{5,5-5}.\ 0{,}25^5.\ 0{,}75^{5-5} = 1 \times 0{,}0009766 \times 1 = 0{,}0009766$ ou $\frac{1}{1024}$

X=x	0	1	2	3	4	5	∑
P(X=x)	$\frac{243}{1024}$	$\frac{405}{1024}$	$\frac{270}{1024}$	$\frac{90}{1024}$	$\frac{15}{1024}$	$\frac{1}{1024}$	1



b) a distribuição de probabilidade acumulada de X e o seu gráfico;

X=x	0	1	2	3	4	5	$\sum$
F(x)	$\frac{243}{1024}$	$\frac{648}{1024}$	$\frac{918}{1024}$	$\frac{1008}{1024}$	$\frac{1023}{1024}$	1	1



c) Valor esperado de X pela expressão geral: $E(X) = \sum xp(x)$

$E(X) = 0.\ 0{,}2373 + 1.\ 0{,}3955 + 2.\ 0{,}2637 + 3.\ 0{,}08790 + 4.\ 0{,}01465 + 5.\ 0{,}0009766 = 1{,}25$

Valor esperado de X pelo teorema: $E(x) = n\pi$:

$E(X) = 5 \times 0{,}25 = 1{,}25$

d) Variância de X pela expressão geral: $V(X) = E(X^2) - \mu^2$:

$E(X^2) = 0^2.\ 0{,}2373 + 1^2.\ 0{,}3955 + 2^2.0{,}2637 + 3^2.0{,}08789 + 4^2.0{,}01465 + 5^2.0{,}0009766 = 2{,}5$

$V(X) = 2{,}5 - (1{,}25^2) = 2{,}5 - 1{,}5625 = 0{,}9375$

Variância de X pelo teorema: $V(x) = n\pi(1-\pi)$

$V(X) = 5 \times 0{,}25 \times 0{,}75 = 0{,}9375$

e) $a_3 = \frac{(1-\pi)-\pi}{\sqrt{n\pi(1-\pi)}} = \frac{0{,}25-0{,}75}{\sqrt{0{,}9375}} = 0{,}5164$ Distribuição assimétrica positiva

6.

a) Distribuição de Bernoulli

S = {acerto, erro};

$S_X = \{0, 1\}$;

Parâmetro: $\pi = 0{,}2$

b) X = número de sucessos (acertos) em 10 questões

$S_X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

Aluno será aprovado se acertar 7 ou mais questões no teste.

P(x $\geq$ 7) = P(x = 7) + P(x = 8) + P(x = 9) + P(x = 10)

= 0,000786432 + 0,000073728 + 0,000004096 + 0,0000001024 = 0,0008644

P(x = 7) = $P_{10}^{7,3}.0,2^7.0,8^3$ = 120 x 0,0000128 x 0,512 = 0,00078643

P(x = 8) = $P_{10}^{8,2}.0,2^8.0,8^2$ = 45 x 0,00000256 x 0,64 = 0,00007373

P(x = 9) = $P_{10}^{9,1}.0,2^9.0,8^1$ = 10 x 0,000000512 x 0,8 = 0,000004096

P(x = 10) = $P_{10}^{10,0}.0,2^{10}.0,8^0$ = 1 x 0,0000001024 x 1 = 0,0000001024

7.

a) P(X=x) = $\frac{C_4^x \cdot C_6^{4-x}}{C_{10}^4}$

b) P(X=0) = $\frac{C_4^0 \cdot C_6^{4-0}}{C_{10}^4} = \frac{1 \cdot 15}{210}$ = 0,07143

P(X=1) = $\frac{C_4^1 \cdot C_6^{4-1}}{C_{10}^4} = \frac{4 \cdot 20}{210}$ = 0,3810

P(X=2) = $\frac{C_4^2 \cdot C_6^{4-2}}{C_{10}^4} = \frac{6 \cdot 15}{210}$ = 0,4286

P(X=3) = $\frac{C_4^3 \cdot C_6^{4-3}}{C_{10}^4} = \frac{4 \cdot 6}{210}$ = 0,1143

P(X=4) = $\frac{C_4^4 \cdot C_6^{4-4}}{C_{10}^4} = \frac{1 \cdot 1}{210}$ = 0,004762

X=x	0	1	2	3	4	∑
p(x)	0,07143	0,3810	0,4286	0,1143	0,004762	1

c) E(X) = n . $\frac{N1}{N}$ = 4 . $\frac{4}{10}$ = 1,6.

V(X) = $n\frac{N_1}{N}\frac{N_2}{N}\left(\frac{N-n}{N-1}\right) = 4\frac{4}{10}\frac{6}{10}\left(\frac{10-4}{10-1}\right)$ = 0,64.

8.

a) P(X = 0) = $\frac{C_5^0 \cdot C_{10}^{3-0}}{C_{15}^3} = \frac{1 \cdot 120}{455}$ = 0,2637

b) P(X = 1) = $\frac{C_5^1 \cdot C_{10}^{3-1}}{C_{15}^3} = \frac{5 \cdot 45}{455}$ = 0,4945

9. Primeiro precisamos encontrar o valor de λ:

0,4966 = $e^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!} = e^{-\lambda}\frac{1}{1}$

0,4966 = $e^{-\lambda}$

ln(0,4966) = - λ

-0,70 = - λ

λ = 0,70

P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0,4966 + 0,3476 + 0,1217 = 0,9659.

P(X = 0) = $e^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!} = e^{-0,70}\frac{0,70^0}{0!}$ = 0,4966
P(X = 1) = $e^{-\lambda}\frac{\lambda^1}{1!} = e^{-0,70}\frac{0,70^1}{1!}$ = 0,3476
P(X = 2) = $e^{-\lambda}\frac{\lambda^2}{2!} = e^{-0,70}\frac{0,70^2}{2!}$ = 0,1217

10. λ = 6

a)

P(X < 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)

P(X < 4) = 0,00247 + 0,01487+ 0,04461 + 0,08923 = 0,1512

P(X = 0) = $e^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!} = e^{-6}\frac{6^0}{0!}$ = 0,00247
P(X = 1) = $e^{-\lambda}\frac{\lambda^1}{1!} = e^{-6}\frac{6^1}{1!}$ = 0,01487
P(X = 2) = $e^{-\lambda}\frac{\lambda^2}{2!} = e^{-6}\frac{6^2}{2!}$ = 0,04461
P(X = 3) = $e^{-\lambda}\frac{\lambda^3}{3!} = e^{-6}\frac{6^3}{3!}$ = 0,08923

b)

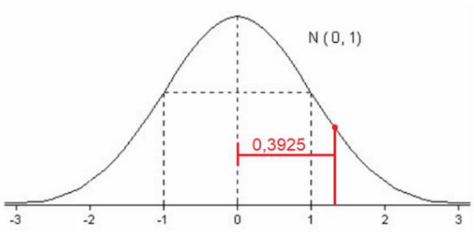
P(6 ≤ x ≤ 8) = P(X = 6) + P(X = 7) + P(X =8) = 0,1606 + 0,1377 + 0,1033 = 0,4016

P(X = 6) = $e^{-\lambda}\frac{\lambda^6}{6!} = e^{-6}\frac{6^6}{6!}$ = 0,1606
P(X = 7) = $e^{-\lambda}\frac{\lambda^7}{7!} = e^{-6}\frac{6^7}{7!}$ = 0,1377
P(X = 8) = $e^{-\lambda}\frac{\lambda^8}{8!} = e^{-6}\frac{6^8}{8!}$ = 0,1033

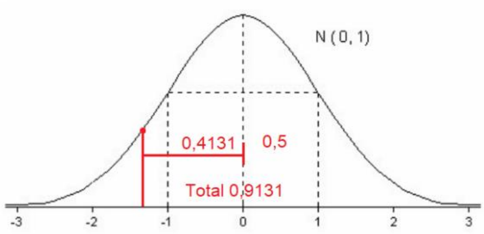
Distribuições de variáveis contínuas

11. Utilizar a tabela I, das tabelas estatísticas para encontrar os valores.

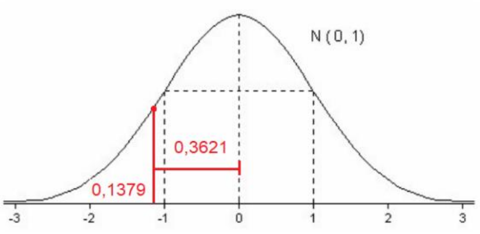
a) z = 1,24



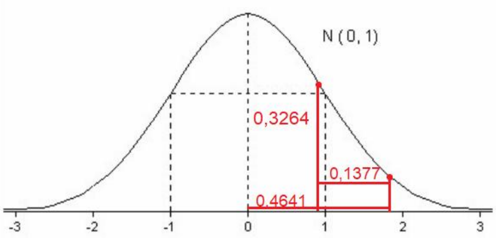
b) z = -1,36



c) z = -1,09



d) z = 0,94



12.

a) P(X < 3) = 0,0099

$Z = \frac{3 - 4{,}4}{0{,}6} = -2{,}33$

P(Z < 2,33) = 0,5 – 0,4901 = 0,0099

b) P(3,2≤ x ≤ 5,2) = 0,8854

$Z_1 = \frac{3{,}2 - 4{,}4}{0{,}6} = -2$

$Z_2 = \frac{5{,}2 - 4{,}4}{0{,}6} = 1{,}33$

P(-2 ≤ Z ≤ 1,33) = 0,4772 + 0,4082 = 0,8854

c) P(X < 2,9 ou X > 5) = 0,1649

$Z_1 = \frac{2{,}9 - 4{,}4}{0{,}6} = -2{,}5$

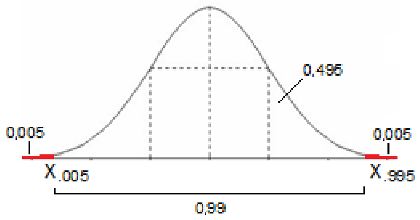
$Z_2 = \frac{5 - 4{,}4}{0{,}6} = 1$

P(Z < -2,5 ou Z > 2,33) = (0,5 - 0,4938) + (0,5 - 0,3413) = 0,0062 + 0,1587 = 0,1649

d) $x_{.95} = 4{,}4 + z_{.95} \,.\, 0{,}6 = 4{,}4 + 1{,}65 \times 0{,}6 =$ 5,39
$z_{.95} = 0{,}5 – 0{,}45 = 0{,}05$, pela tabela 1,65

e) $x_{.1} = 4{,}4 – z_{.1} \,.\, 0{,}6 = 4{,}4 – 1{,}29 \times 0{,}6 =$ 3,63
$z_{.1} = 0{,}5 – 0{,}1 = 0{,}4$, pela tabela –1,29

f) Taxas de albumina, simétricas em relação a taxa média, entre as quais estão compreendidas 99% das taxas da população:



$x_{.995} = 4{,}4 + z_{.995} \,.\, 0{,}6 = 4{,}4 + 2{,}58 \times 0{,}6 = 5{,}95$
$x_{.005} = 4{,}4 - z_{.005} \,.\, 0{,}6 = 4{,}4 - 2{,}58 \times 0{,}6 = 2{,}85$

$z_{.995} = 0{,}5 - 0{,}005 = 0{,}495$, pela tabela 2,58
$z_{.005} = 0{,}5 - 0{,}005 = 0{,}495$, pela tabela –2,58

13. Dado que

$$x = \mu + z\,\sigma,$$

temos o seguinte sistema de equações normais:

$$\begin{cases} 88 = \mu + 0{,}8\,\sigma \\ 64 = \mu - 0{,}4\,\sigma \end{cases}$$

Daí obtém-se os valores de μ e σ pela resolução deste sistema:

$$\begin{cases} 88 = \mu + 0{,}8\,\sigma \\ 64 = \mu - 0{,}4\,\sigma \qquad \times(-1) \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} 88 = \mu + 0{,}8\,\sigma \\ \underline{-64 = -\mu + 0{,}4\,\sigma} \\ 24 = 0 + 1{,}2\,\sigma \end{array}$$

$24 = 1{,}2\,\sigma$
$\sigma = 24 / 1{,}2 = 20$

$88 = \mu + 0{,}8\,\sigma$
$88 = \mu + 0{,}8 \times 20$
$\mu = 88 - 16 = 72$