



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS
CENTRO DE DESENVOLVIMENTO TECNOLÓGICO



ESTATÍSTICA BÁSICA

Prof^a. Clause Fátima de Brum Piana

ANO 2023

ESTATÍSTICA BÁSICA

Conteúdo Programático

Unidade I. Introdução

Unidade II. Estatística Descritiva

Unidade III. Elementos de Probabilidade

Unidade IV. Inferência Estatística

Unidade I - Introdução

- ◆ Conceito, divisão e aplicações da Estatística
- ◆ Informações históricas
- ◆ Estatística na pesquisa científica
- ◆ Conceitos fundamentais
- ◆ Notação somatório



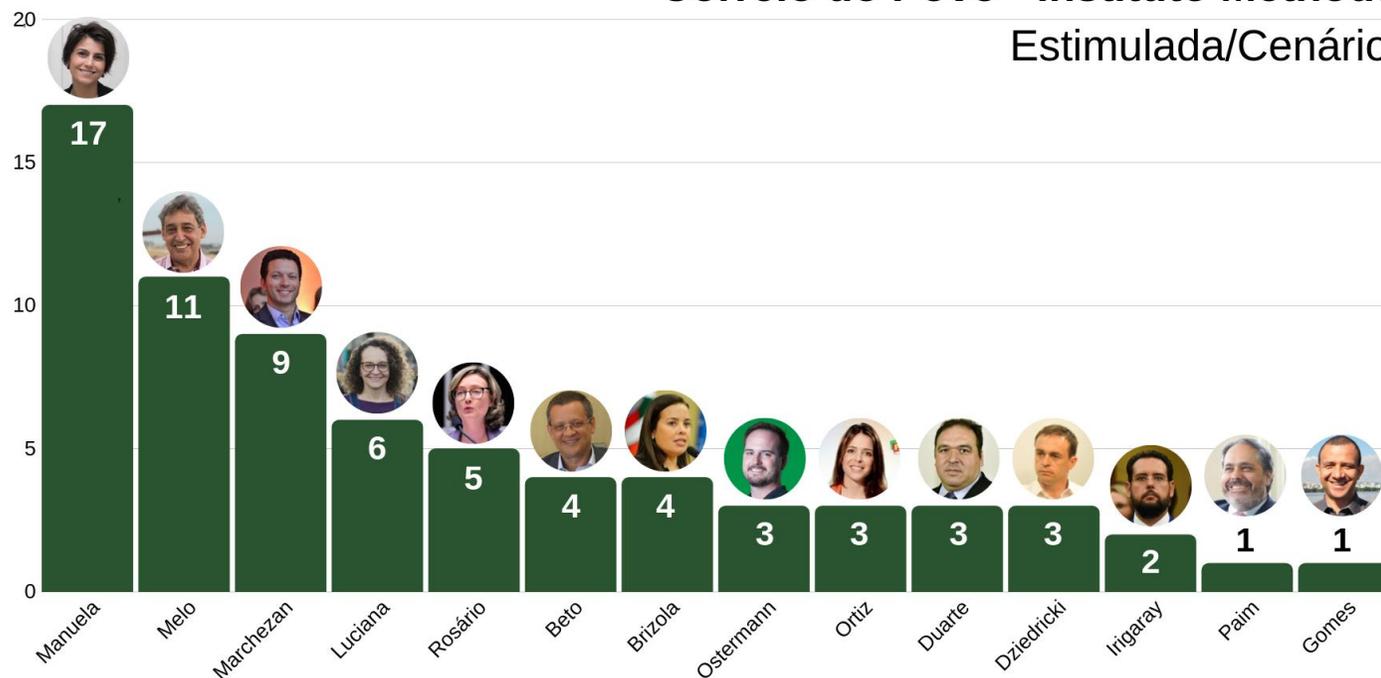
Questões relevantes do nosso cotidiano relacionadas à Estatística

- Qual é a intenção de voto dos eleitores nas próximas eleições?

PESQUISA - PORTO ALEGRE 2020

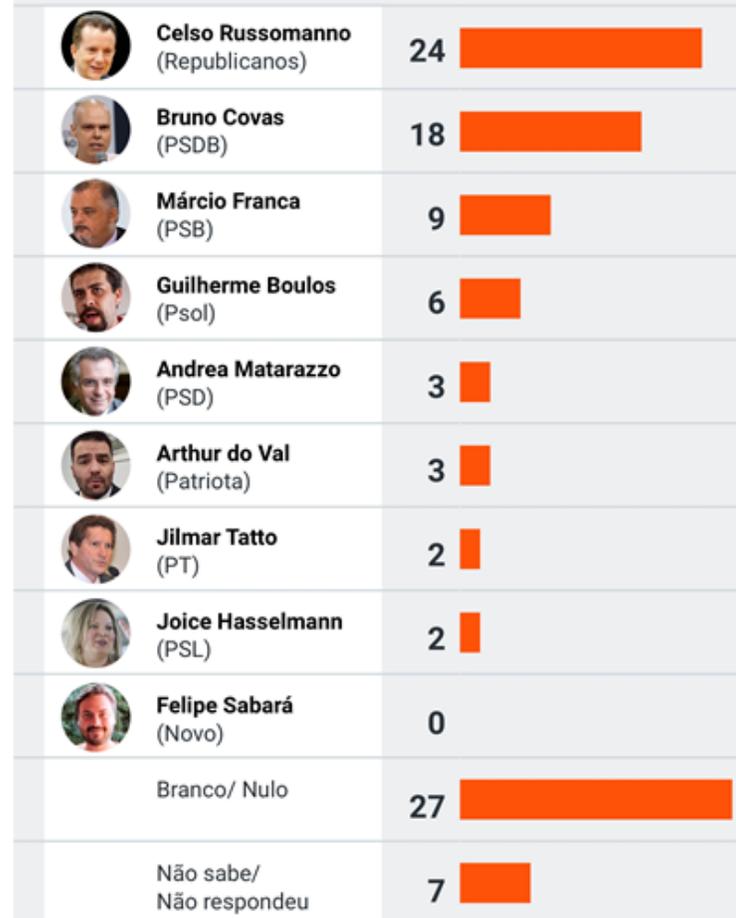
Correio do Povo - Instituto Methodus

Estimulada/Cenário 1



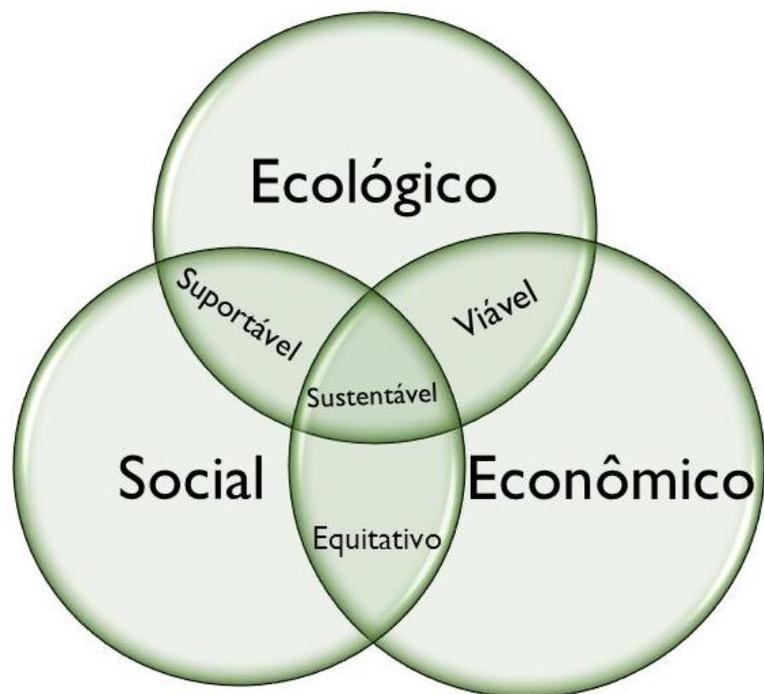
INTENÇÃO DE VOTO PARA PREFEITO DE SÃO PAULO

Estimulada - Uma opção (%)



fonte: Ibope

- ◆ Como estabelecer o grau de desenvolvimento de um país?



Quais são os indicadores econômicos, sociais e ambientais que dão ideia do grau de desenvolvimento de uma sociedade?

◆ Como verificar a eficácia de uma nova vacina?



Qual o percentual de imunização da vacina na população?

◆ Como saber se um produto tem qualidade?



Linha de produção do Boticário



Linha de produção da Natura



- ◆ Como saber se uma nova variedade de arroz é melhor do que as já existentes?



A nova variedade pode ser recomendada para os produtores de arroz?

◆ Como estabelecer o valor do seguro?

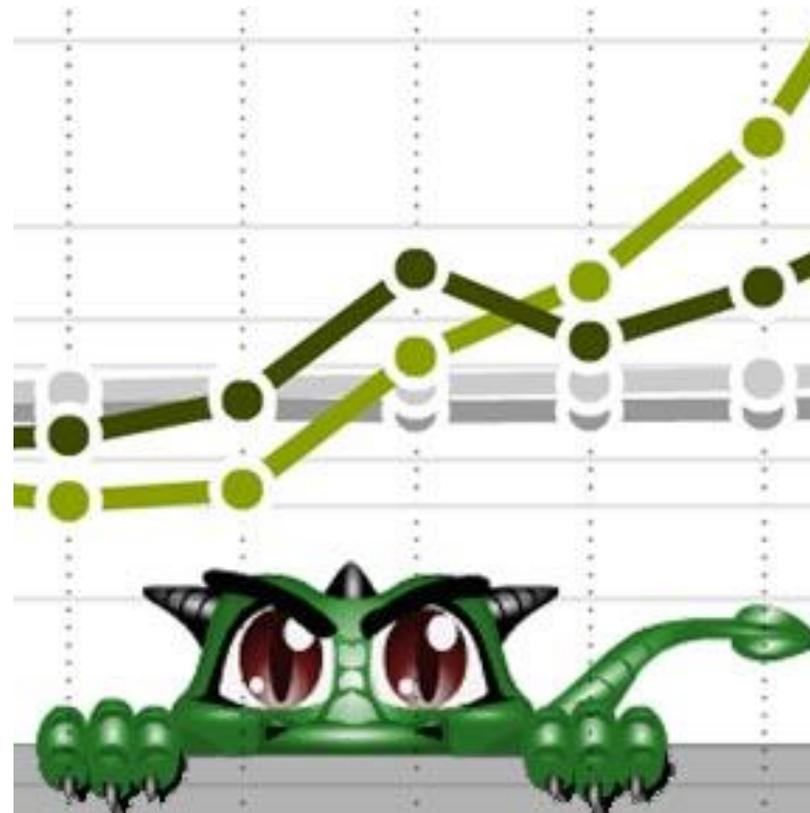


Que informações são consideradas para definir o perfil do motorista e o valor que ele pagará pelo seguro do seu carro?

◆ Como se comportam os preços?



Taxa de inflação



Quais produtos são considerados no cálculo da inflação?

- ◆ Como se caracterizam as pessoas que consomem drogas?



Qual o perfil dos usuários de crack?

◆ Existem animais em extinção no Brasil?

Como estabelecer um processo que traga informação sobre a quantidade de indivíduos distribuídos numa determinada região?



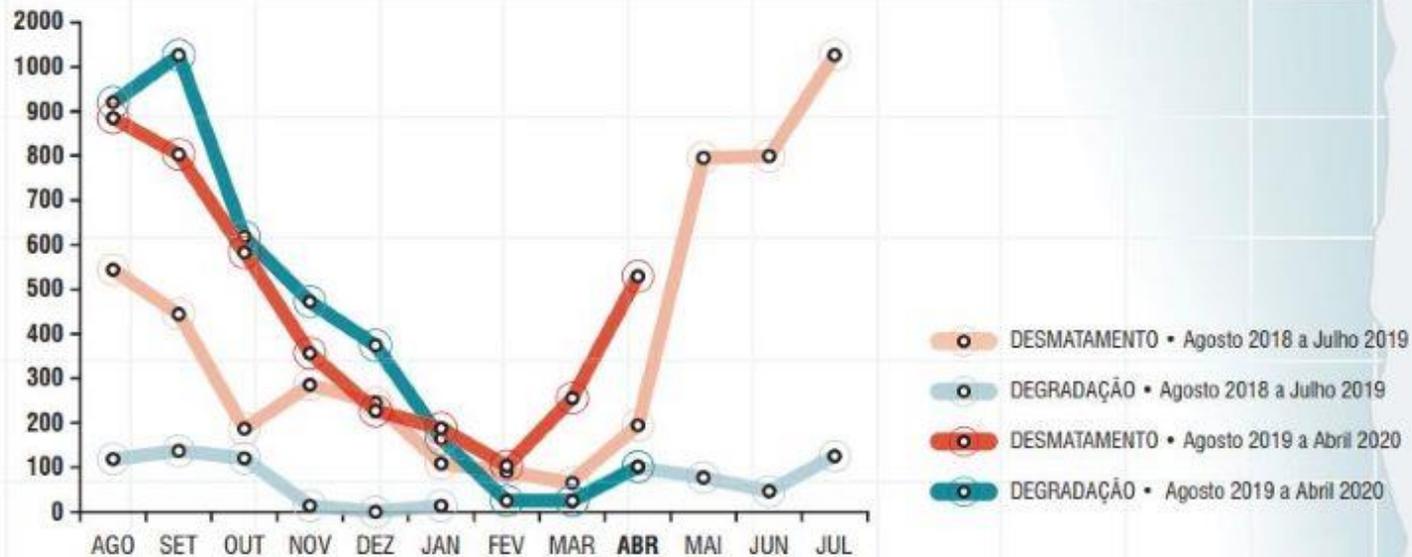
◆ O desmatamento da Amazônia aumentou em 2020?



◆ O desmatamento da Amazônia aumentou em 2020?

Como é realizado este monitoramento?

EVOLUÇÃO DO DESMATAMENTO E DEGRADAÇÃO NA AMAZÔNIA



Fonte: Relatório Imazon – Sistema de Alerta de Desmatamento (SAD)

Disponível em: <https://amazonia.org.br/2020/05/total-da-area-desmatada-na-amazonia-em-2020-ja-e-maior-que-cidade-de-sao-paulo/>

Todas essas questões tem aspectos comuns

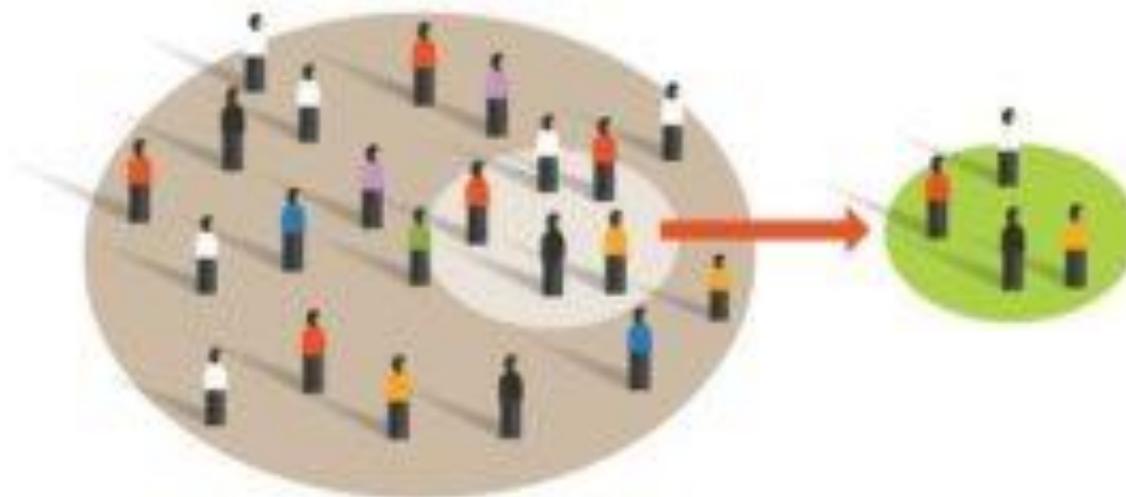
- ◆ Qual é a intenção de voto dos eleitores na eleição presidencial?
- ◆ Como estabelecer o grau de desenvolvimento de um país?
- ◆ Como verificar a eficácia de uma nova vacina?
- ◆ Como saber se um produto tem qualidade?
- ◆ Como saber se uma nova variedade de arroz é melhor do que as já existentes?
- ◆ Como estabelecer o valor do seguro?
- ◆ Como se caracterizam as pessoas que consomem drogas?
- ◆ Existem animais em extinção no Brasil?
- ◆ O desmatamento da Amazônia aumentou em 2020?

Aspectos comuns

→ Impossibilidade de examinar todos os casos

- Custo
- Tempo
- Desconhecimento dos efeitos
- Inexistência de todos os casos no momento da pesquisa
- Coleta da informação por processo destrutivo

→ Necessidade de uma metodologia que possibilite estudar alguns casos e generalizar as conclusões



Metodologia
de inferência

Conceito de estatística

- ◆ Sinônimo de dado numérico
- ◆ Planejamento, coleta, organização, resumo, apresentação e análise de dados
- ◆ Tomada de decisão na presença da incerteza provocada pela aleatoriedade
- ◆ Faz parte do **método científico**

↑
Estratégia da Ciência para
estudar problemas científicos

Compreender adequadamente a metodologia estatística implica conhecer o **contexto** da pesquisa.

Matéria-prima da Estatística



Aluno	Sexo	Idade
1	M	12
2	M	12
3	M	12
4	M	12
5	M	12
6	M	12
7	M	12
8	M	12
9	M	12
10	M	12
11	M	12
12	M	12
13	M	12
14	M	12
15	M	12
16	M	12
17	M	12

Aluno	Número de irmãos	Estatura	Peso
1	2	1,75	51,03
2	2	1,60	46,49
3	1	1,52	38,33
4	0	1,50	45,13
5	2	1,43	34,93
6	4	1,65	58,06
7	1	1,69	50,80
8	2	1,66	44,45
9	3	1,46	37,65
10	3	1,59	38,10
11	1	1,63	40,82
12	0	1,83	68,04
13	5	1,46	38,56
14	4	1,44	38,10
15	1	1,61	46,49
16	2	1,59	51,03
17	3	1,30	22,91

← variação

Matéria-prima da Estatística → variabilidade

Objetivo da Estatística → fornecer métodos para se conviver de modo racional com a variabilidade

De que forma?

Descobrir regularidade na variabilidade dos dados relativos às situações em estudo

⇒ A Estatística desenvolve métodos para descobrir e expor os padrões de comportamento (regularidade) que estão presentes nos dados, mas que não são facilmente identificáveis

Duas ideias importantes:

- ⇒ Embora os dados sejam variáveis é sempre possível associar a eles a ideia de **regularidade** e expressar essa regularidade matematicamente
- ⇒ Devido à variabilidade inerente aos indivíduos, os pontos de interesse da Estatística são referentes aos **grupos** de indivíduos

Quando estudamos uma determinada característica, geralmente, queremos obter conclusões para o conjunto de todos os indivíduos que apresentam tal característica.

Conceito

A Estatística é um corpo de conceitos e métodos úteis para coletar e interpretar dados relativos a uma área de pesquisa, e extrair conclusões em situações em que a incerteza e a variação estão presentes.

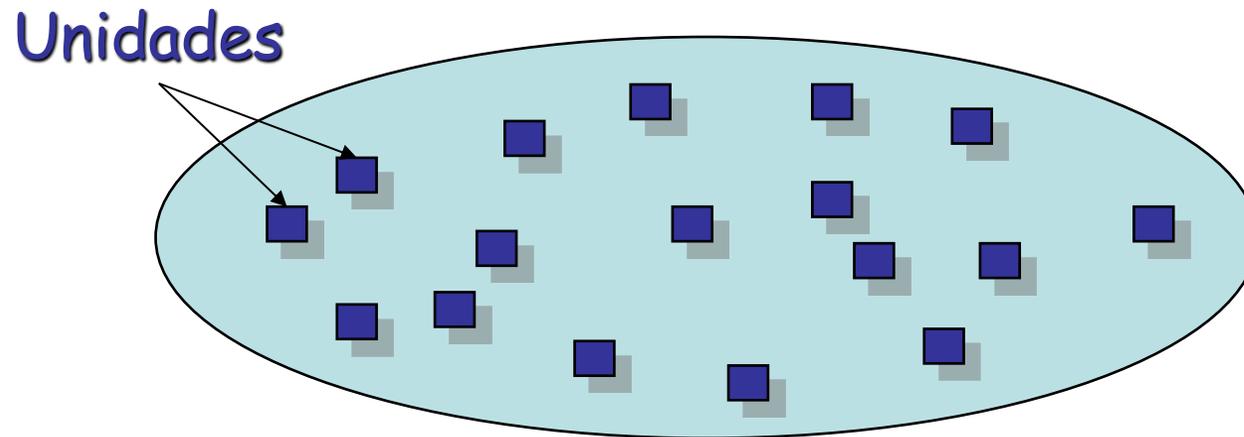
⇒ A Estatística parte de perguntas/desafios do **mundo real**

⇒ O que caracteriza a Estatística é a sua fundamentação nos **dados de observação** e, sendo assim, o **contexto** é essencial para dar significado aos resultados da aplicação dos procedimentos estatísticos.

Alguns conceitos básicos:

- ◆ **População**
- ◆ **Amostra**
- ◆ **Amostragem**

População: é o conjunto de todas as unidades (elementos) que têm pelo menos uma característica em comum. Pode ser **finita** ou **infinita**.



Exemplo: Pesquisas eleitorais no RS

Característica → votar no RS

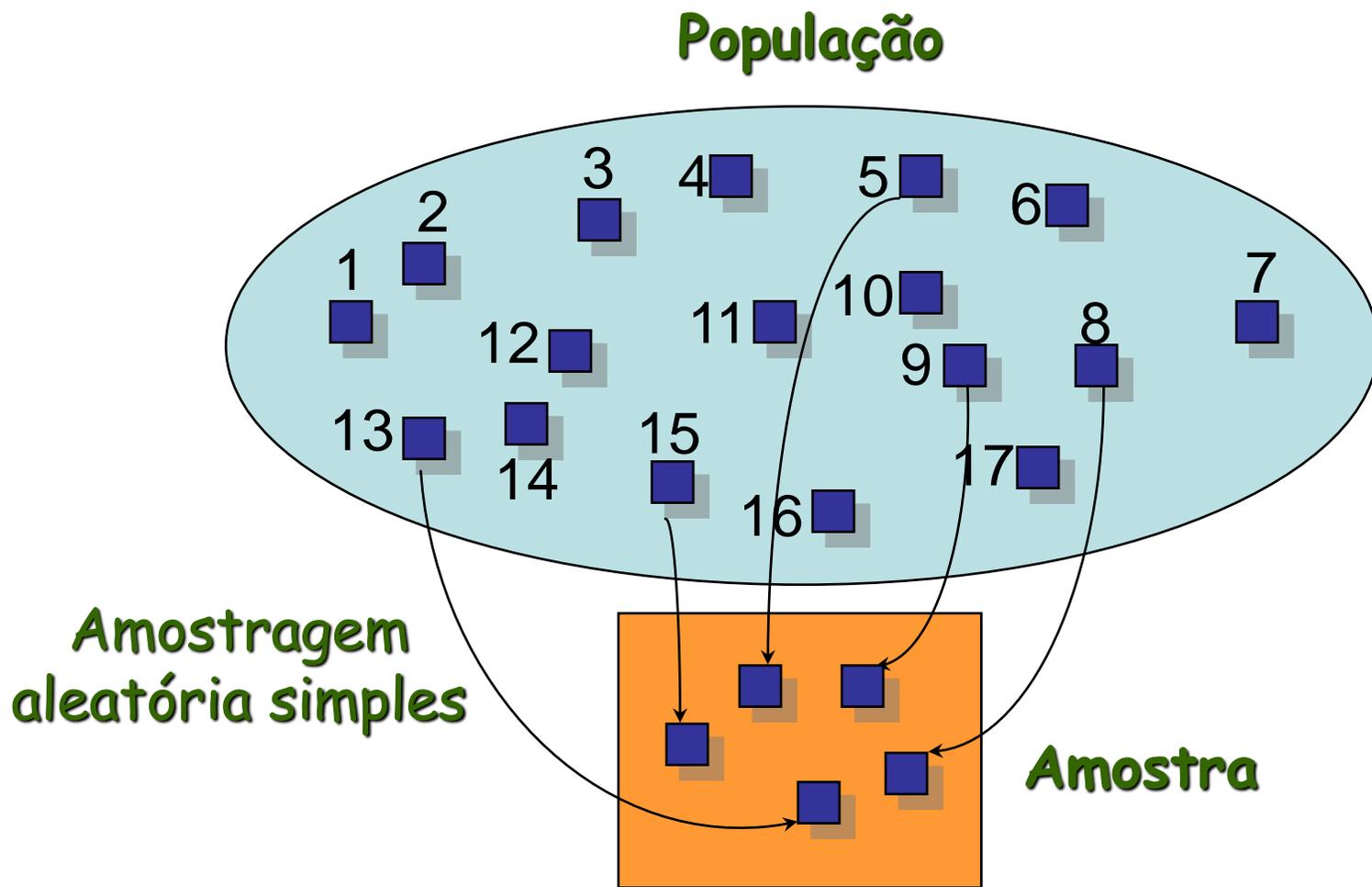
População → conjunto de todos os eleitores que votam no RS

Unidade → o eleitor

Amostra é parte de uma população, convenientemente escolhida, que tem a finalidade de representá-la. Deve apresentar as mesmas características da população.

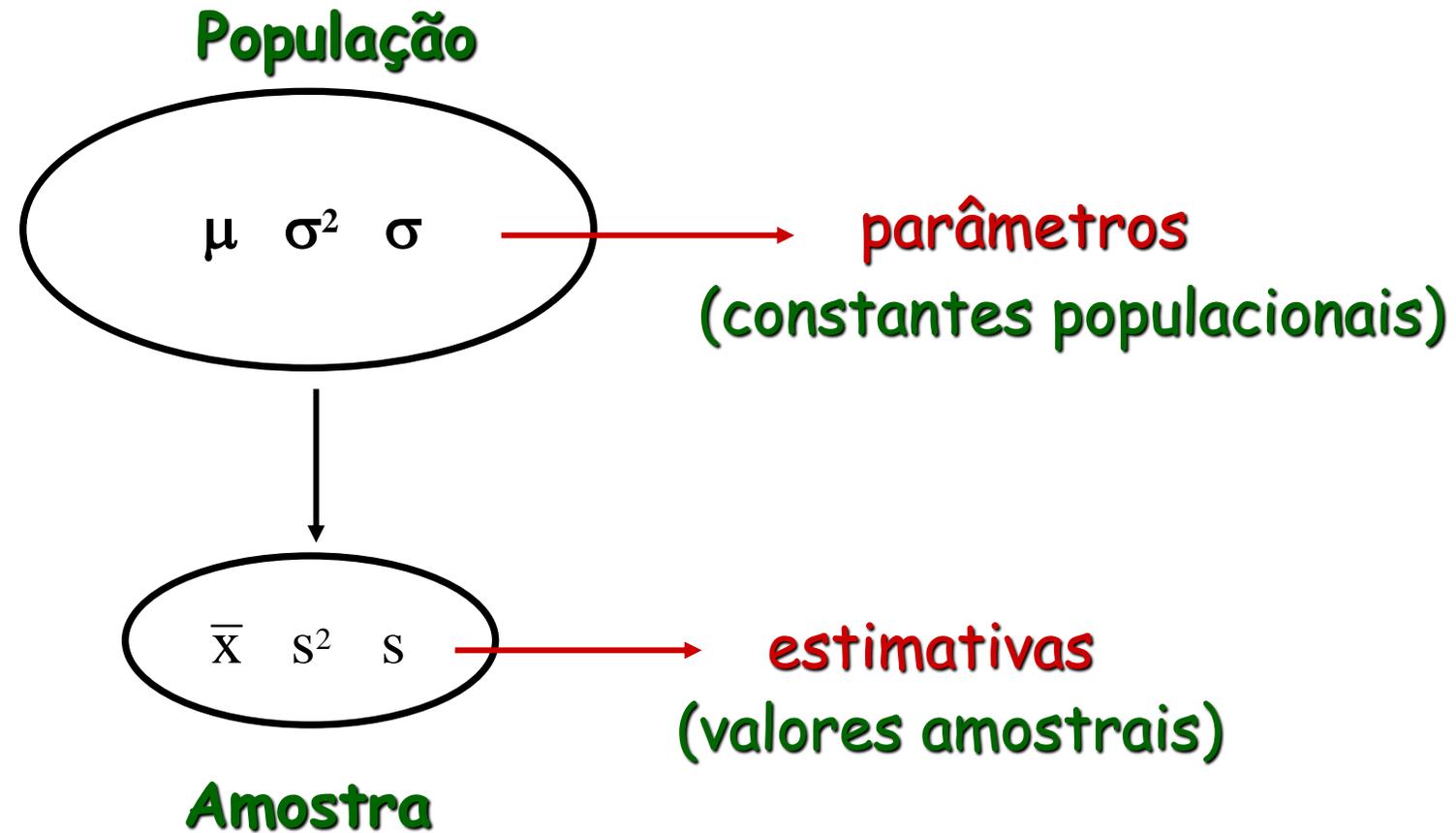
Amostragem é a metodologia de obtenção das amostras.

Obtenção de uma amostra

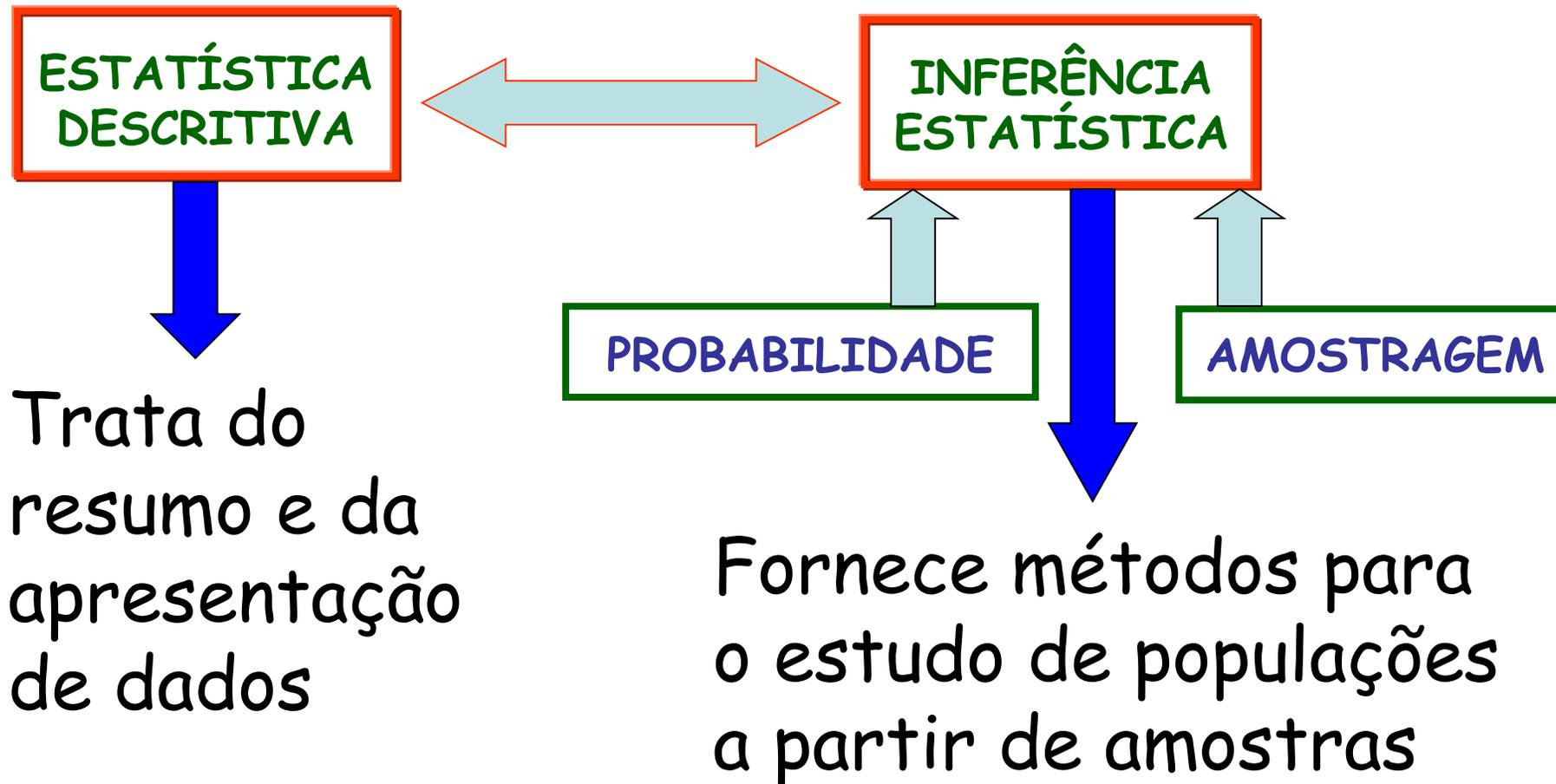


Sorteio das unidades

- 1
- 2
- 3
- 4
- 5
- 6
- 7
- 8
- 9
- 10
- 11
- 12
- 13
- 14
- 15
- 16
- 17



ESTATÍSTICA - Divisão

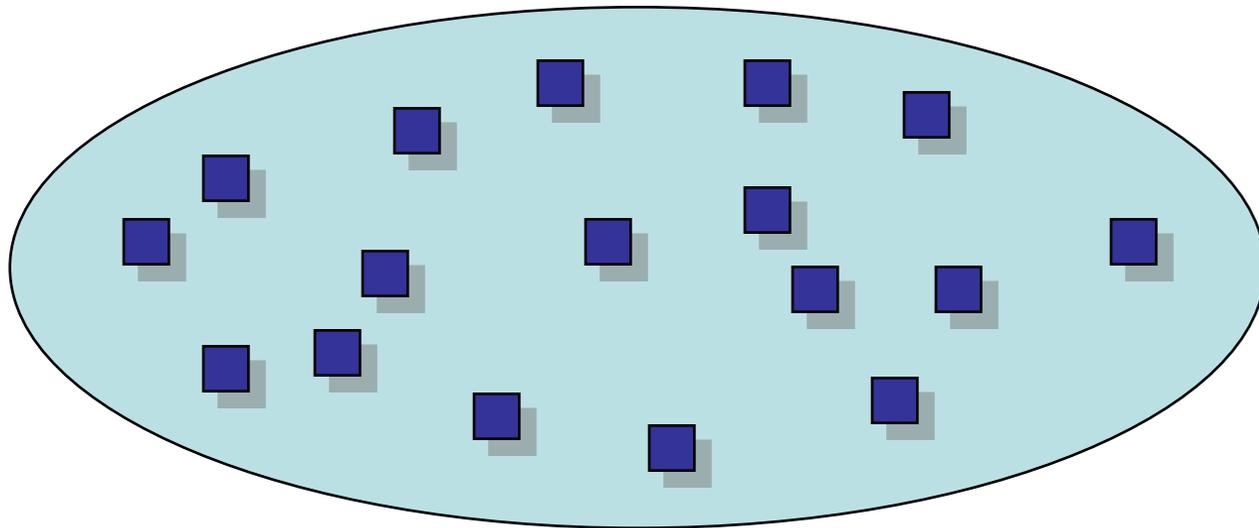


Estatística Descritiva

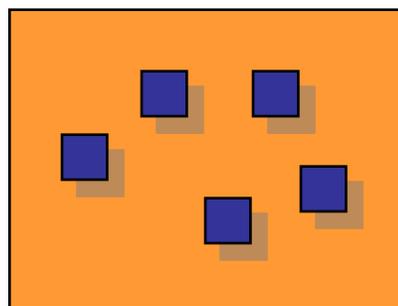
- ⇒ É a parte da estatística que trata:
 - ◆ da apresentação de dados através de tabelas e gráficos;
 - ◆ do resumo ou da descrição de dados através de medidas descritivas (de localização, de variação, de formato e separatrizes).
- ⇒ Em geral, não tem por objetivo tirar conclusões.

Objetivo: descrever ou caracterizar

População



**Estatística
Descritiva**



**Estatística
Descritiva**

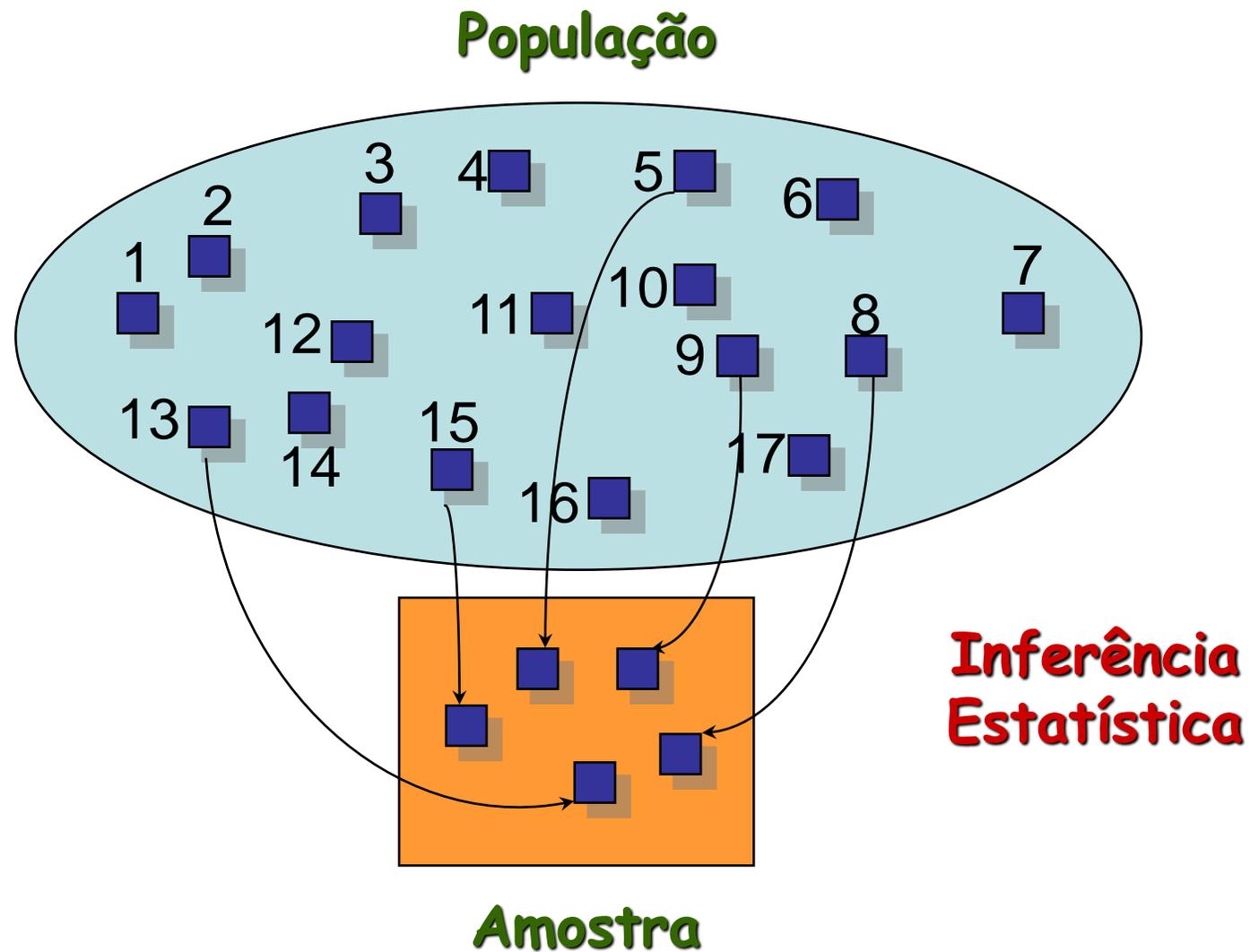
Subconjunto

Inferência Estatística ou Estatística Indutiva

- ⇒ Provê métodos que possibilitam a realização de inferências sobre populações a partir de amostras delas retiradas, tendo por base o cálculo das probabilidades.

- ⇒ Trabalha basicamente com dois grandes tópicos:
 - ◆ estimação de parâmetros
 - ◆ testes de hipóteses

Objetivo: concluir para a população com base em dados da amostra



Conjunto das temperaturas mínimas (em °C) do mês de setembro, no período 1990 a 1995, na cidade de Pelotas:

18,7 19,2 16,2 12,3 17,5 13,9

Se afirmamos que:

→ em metade **desses** anos a temperatura mínima do mês de setembro em Pelotas superou 17°C

→ **nesse** período de seis anos a temperatura mínima média do mês de setembro em Pelotas foi 16,3°C

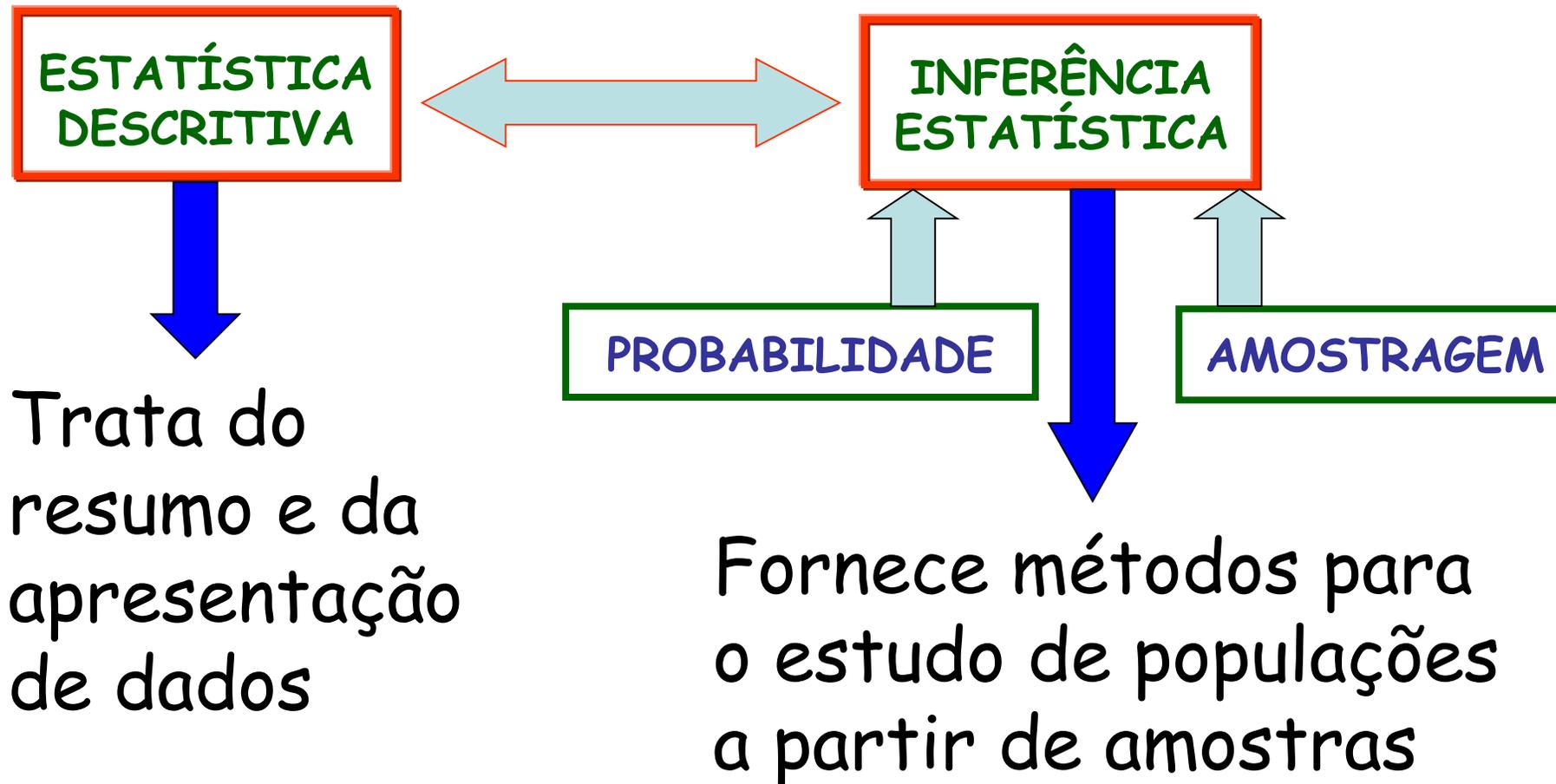
**Estatística
Descritiva**

Se afirmamos que:

→ **com base nesses** dados, a temperatura mínima média do mês de setembro em Pelotas é de 16,3°C

**Inferência
Estatística**

ESTATÍSTICA - Divisão



Aplicações

- ⇒ em várias áreas da ciência e da tecnologia
- ⇒ em muitas atividades que afetam as nossas vidas
 - decisões econômicas (públicas ou privadas)
 - avaliação de controles de poluição
 - análise de problemas de tráfego
 - cálculos de possibilidade de vitória de um time num jogo
 - nos testes de DNA para confirmação de paternidade de uma criança

Informações históricas

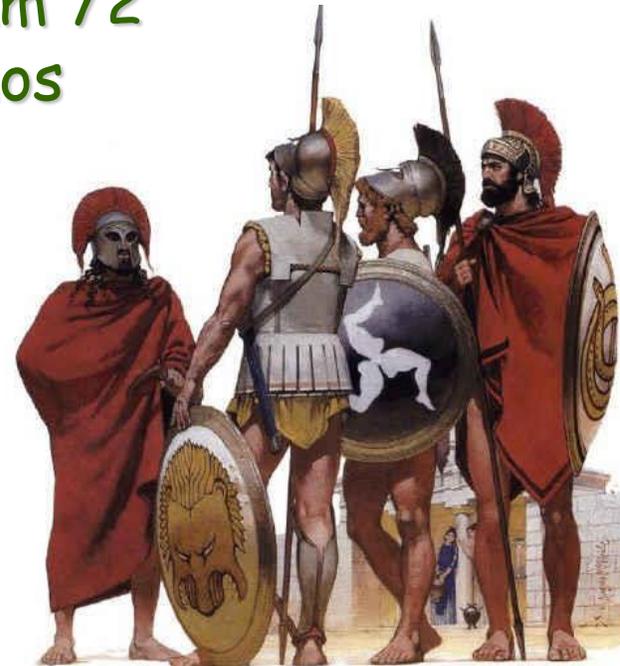
⇒ Existem indícios de que há mais de 2000 anos a.C. já se faziam censos na Babilônia, na China e no Egito.



⇒ Em 2238 a.C., o imperador Yao mandou realizar um censo da população e das lavouras cultivadas...

⇒ Os romanos fizeram 72 censos entre os anos 555 a.C. e 72 d.C.

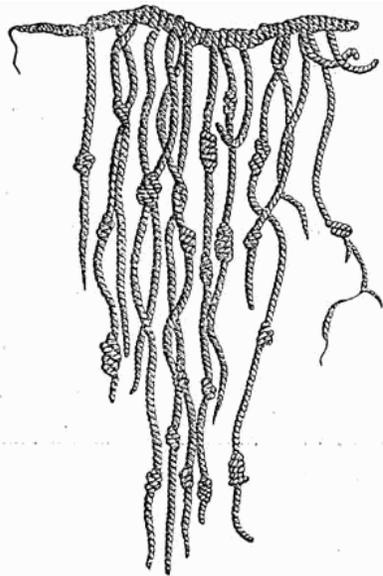
⇒ Objetivo do censo: saber o número de pessoas disponíveis para fazer a guerra e para a cobrança de impostos



⇒ O livro quarto do Velho Testamento, intitulado "Números", começa com a seguinte instrução a Moisés: "Fazer um levantamento dos homens de Israel que estivessem aptos para guerrear".

⇒ Na época do Imperador César Augusto, saiu um edito para que se fizesse o censo em todo o Império Romano

◆ Para responder ao censo José e Maria viajaram de Nazaré, na Galileia, à Belém, na Judeia



⇒ **Continente Americano** → muito antes de Cristóvão Colombo, os **Incas** já mantinham um registro numérico de dados da população em **quipus** (sistema de cordas com nós que representavam números no sistema decimal)

- ⇒ A Estatística teve origem na necessidade do Estado Político conhecer os seus domínios
- ⇒ Sob a palavra Estatística, derivada da palavra "status" (estado, em latim), acumularam-se descrições e dados relativos ao Estado
- ⇒ Em 1085, Guilherme I, o Conquistador, ordenou que se fizesse um levantamento estatístico da Inglaterra, com informações sobre terras, proprietários, empregados e animais
 - * **Domesday Book** → base também para o cálculo de impostos



Século XVII → a aritmética política (demografia) ganhou destaque na Inglaterra a partir das tábuas de mortalidade de **Graunt** e **Petty**. Não se limitaram a simples apresentação de dados e estabeleceram relações entre esses números.



Jonh Graunt
(1620 - 1674)

Tábuas de mortalidade:
exaustivas análises de
nascimentos e mortes

- ♦ Morte é um fato imprevisível quando considera um indivíduo isolado, porém em um grupo é possível predizê-la com uma certa margem de segurança.



William Petty
(1623 - 1687)

Século XVIII



1708 → primeiro curso de Estatística na Universidade de Iena, na Alemanha

1740 → a palavra "**Statistik**" (Estatística) foi cunhada pelo acadêmico alemão **Gottfried Achenwall**, que estabeleceu as relações da Estatística com outras áreas



1797 → o verbete "**Statistics**" (Estatística) apareceu na Enciclopédia Britânica

Século XIX → avanço no estudo das probabilidades permitiu que a Estatística se estruturasse e ampliasse largamente o seu campo de ação

⇒ Esse avanço se deu a partir dos estudos dos matemáticos e astrônomos **Laplace** e **Gauss** → descreveram a famosa **distribuição normal**.

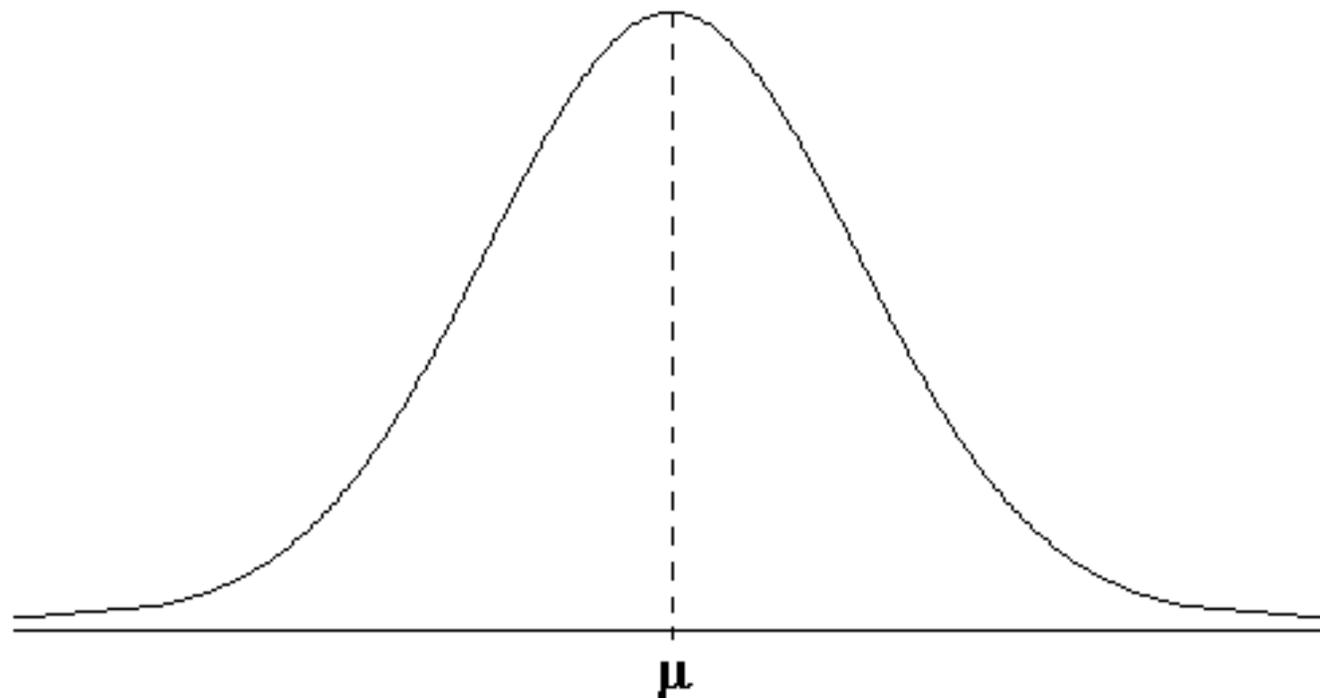


Pierre-Simon Laplace
(1749-1827)

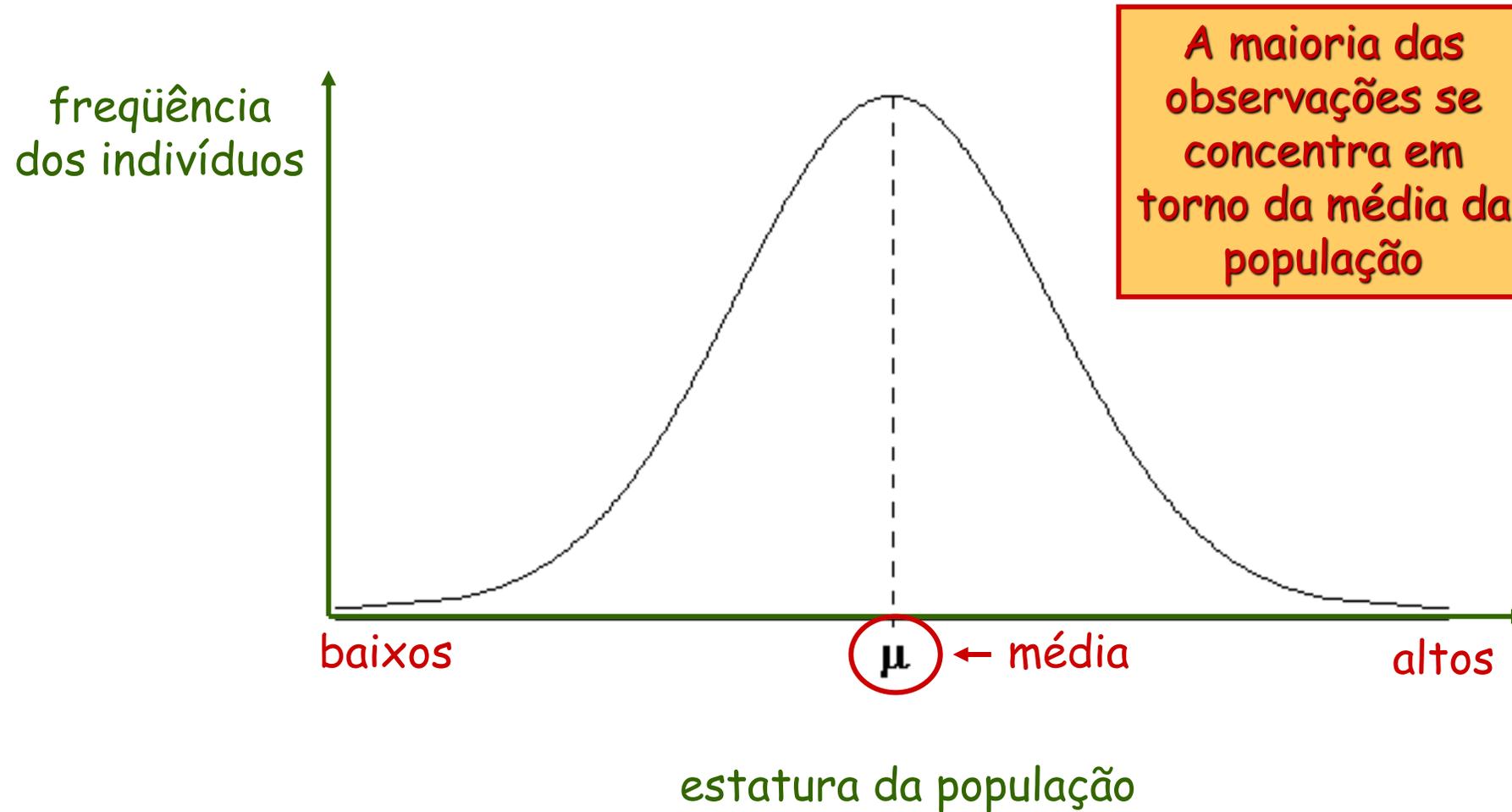


Carl Gauss
(1777-1855)

Curva normal



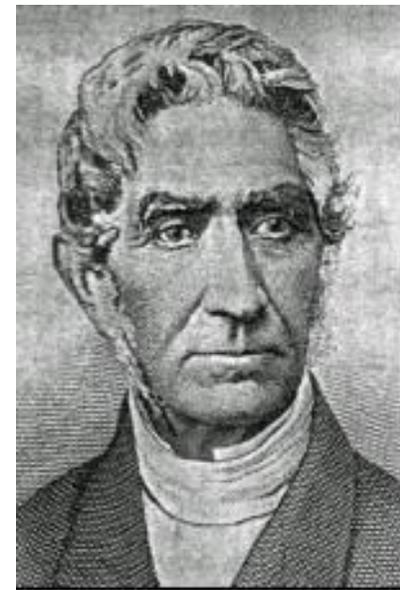
Curva normal





Século XIX → astrônomo belga **Lambert Quételet** fez o casamento entre a **Estatística** e o **Cálculo das probabilidades**

- ♦ estudos na área social → demonstrou que muitos fenômenos vivos tinham um comportamento regular



Lambert Quételet
(1796-1855)

Século XX

- ⇒ Distribuições de probabilidade → criação de técnicas de amostragem e formas de relacionar amostras com populações
- ⇒ Desenvolvimento da **Estatística Experimental**
- ⇒ Marco decisivo → advento da **computação**

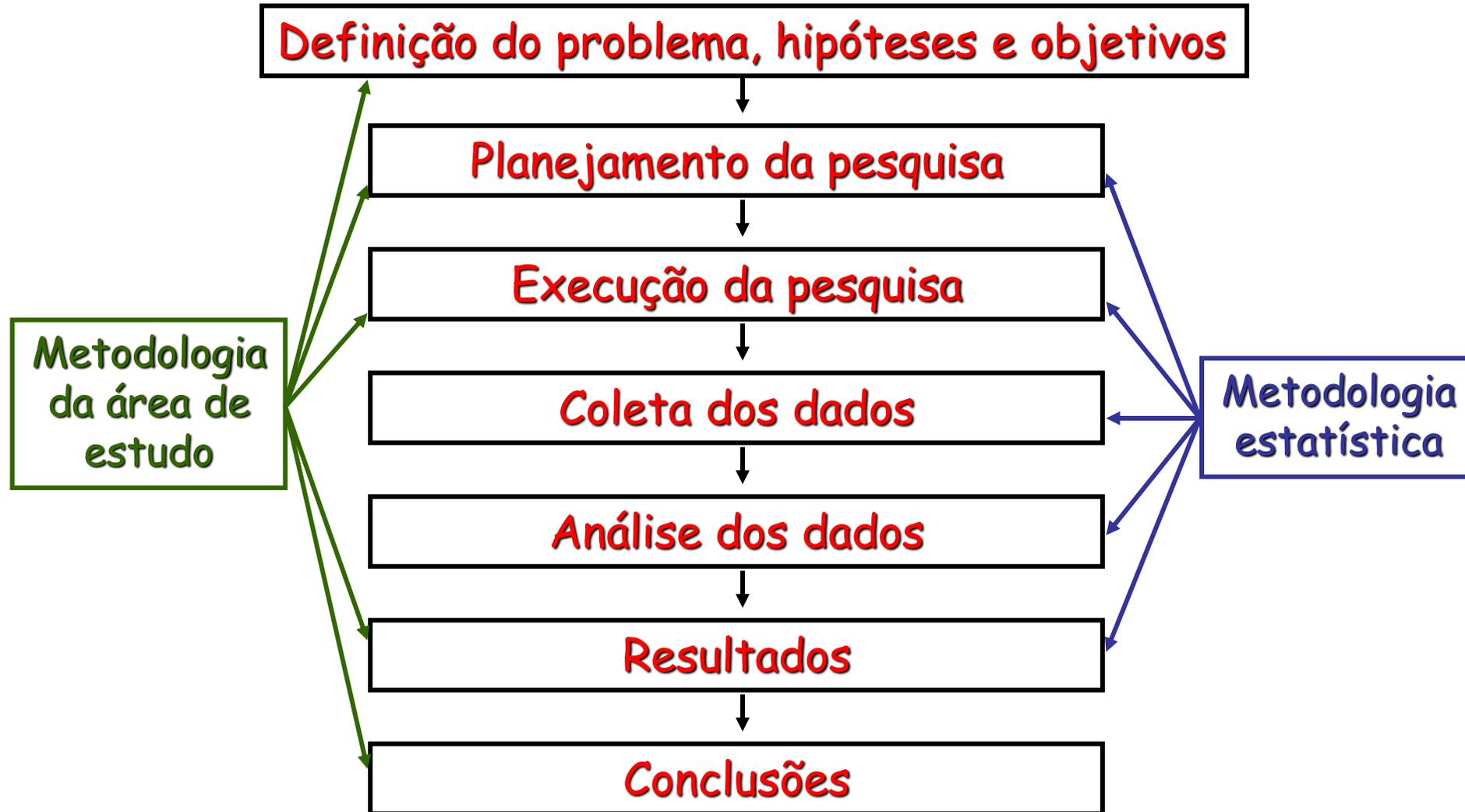


Ronald Fisher
(1890 - 1962)

A estatística na pesquisa científica

- ⇒ Nas pesquisas científicas precisamos coletar dados que possam fornecer **informações que respondam nossas indagações**
- ⇒ Para que as conclusões da pesquisa sejam válidas e confiáveis, tanto a **coleta** como **análise dos dados** devem ser feitas de forma **criteriosa e objetiva**
- ⇒ A metodologia estatística deve ser **aplicada nas diversas etapas** da pesquisa
- ⇒ A qualidade da informação depende da qualidade dos dados

Principais etapas de uma pesquisa científica



Métodos de pesquisa

⇒ Pesquisa em que as características de interesse são inerentes às unidades e se manifestam **sem interferência** do pesquisador.

Censo

Levantamento por amostragem

Estudo observacional

⇒ Pesquisa em que há **intervenção** do pesquisador na amostra.

Experimento

Métodos de pesquisa

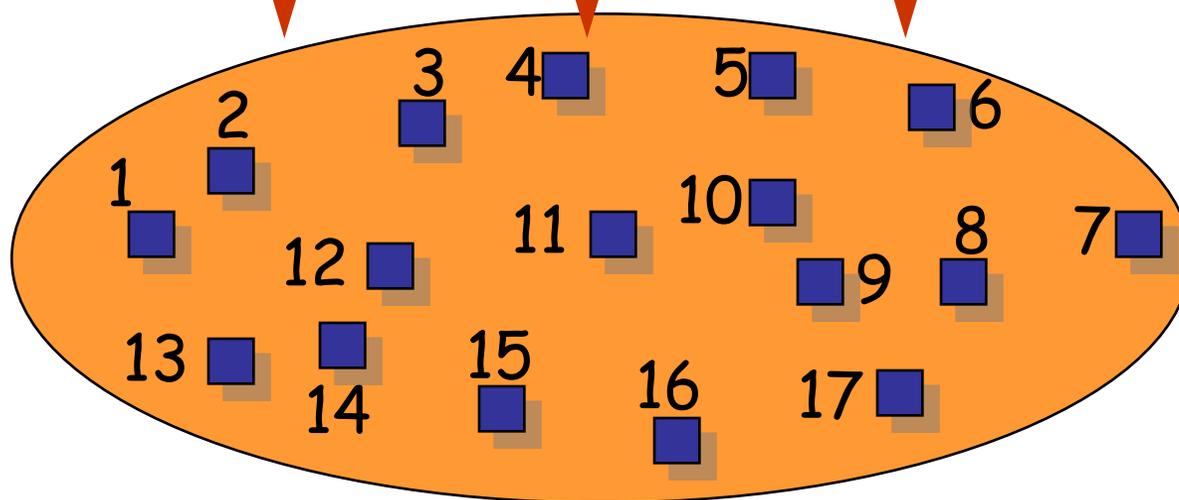
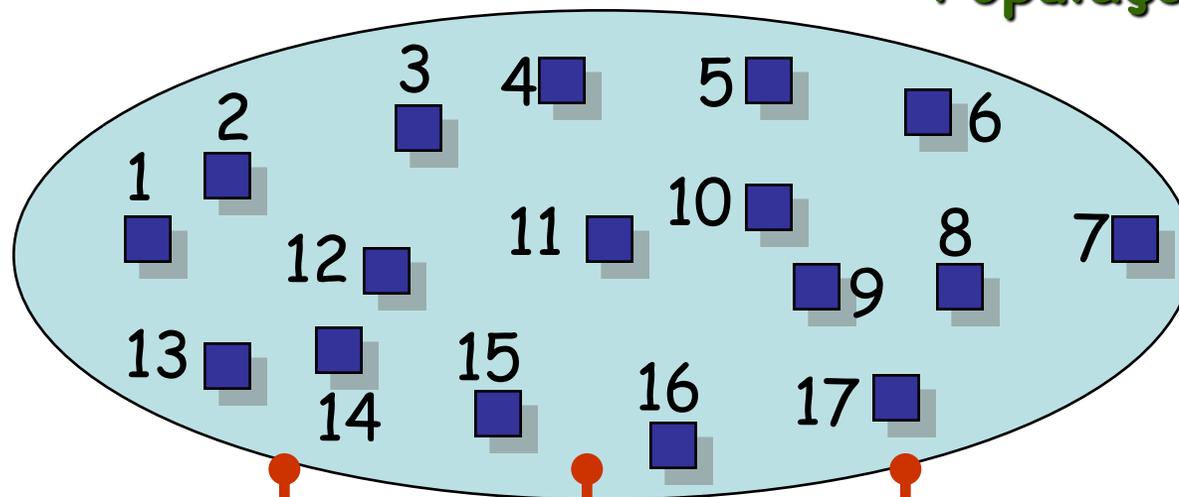


⇒ Pesquisa em que as características de interesse são inerentes às unidades e se manifestam **sem interferência** do pesquisador.

Censo: todas as unidades da população são observadas.

Censo

População objetivo



População pesquisada

Censo



Tabela 1 . Evolução da população brasileira, de 1872 a 2010.

Ano	População
1872	9.930.478
1890	14.333.915
1900	17.438.434
1920	30.635.605
1940	41.165.289
1950	51.941.767
1960	70.070.457
1970	93.139.037
1980	119.002.706
1991	146.825.575
2000	169.799.710
2010	190.755.799

Fonte: Censos demográficos diversos

Métodos de pesquisa



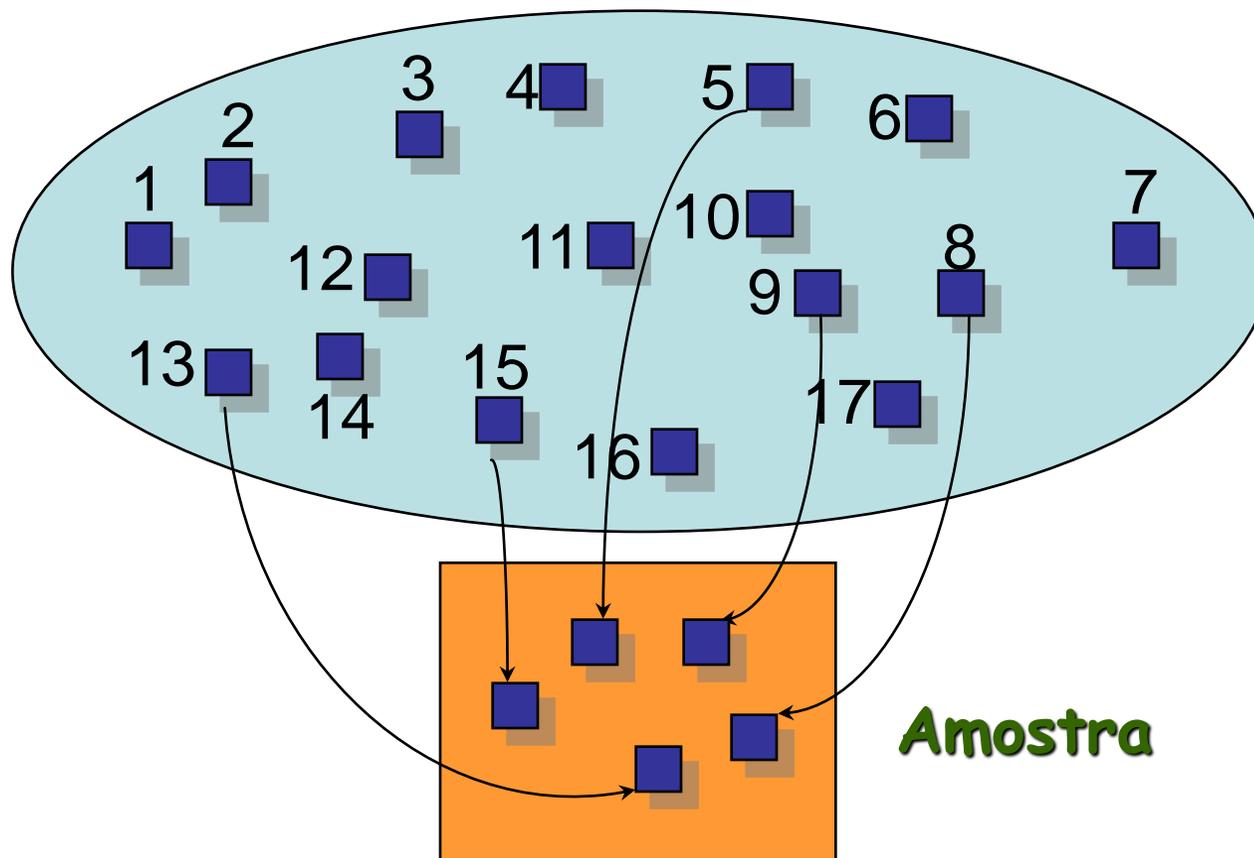
⇒ Pesquisa em que as características de interesse são inerentes às unidades e se manifestam **sem interferência** do pesquisador.

Censo: todas as unidades da população são observadas.

Levantamento por amostragem: as unidades da amostra podem ser escolhidas por processo aleatório (sorteio) ou não.

Levantamento por amostragem

População objetivo



IBGE → Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios (PNAD)

Levantamento por amostragem

Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios (PNAD)

- Entrevista 100.000 domicílios por ano
- Obtém informações **anuais** sobre características demográficas e socioeconômicas da população, como **sexo, idade, educação, trabalho e rendimento**, e **características dos domicílios**.
- Com periodicidade variável, obtém informações sobre migração, fecundidade, nupcialidade, entre outras.
- Fornece o **retrato mais completo do Brasil**.

Métodos de pesquisa



⇒ Pesquisa em que as características de interesse são inerentes às unidades e se manifestam **sem interferência** do pesquisador.

Censo: todas as unidades da população são observadas.

Levantamento por amostragem: as unidades da amostra podem ser escolhidas por processo aleatório (sorteio) ou não.

Estudo observacional: as unidades são incluídas no estudo segundo as circunstâncias. Comum na medicina e nas ciências sociais.

Na Medicina

Estudos observacionais → Epidemiológicos

Estudos transversais ou de prevalência

Os dados levantados num determinado ponto no tempo.
Duração de tempo relativamente curta.

Estudos de coorte (longitudinais)

Estudos que se baseiam na identificação de um grupo de indivíduos e no seu acompanhamento por um período de tempo.

Coorte de nascidos em Pelotas

- Conduzido pelo **Centro de Pesquisas Epidemiológicas** da UFPel, organizado em etapas, o estudo monitora a **saúde**, o **desenvolvimento físico** e **cognitivo** e o **contexto socioeconômico** dos participantes ao longo da vida.
- A pesquisa monitora todas as crianças nascidas vivas em Pelotas, nos anos de **1982** (5.914 pessoas), **1993** (5.249 pessoas) e **2004** (4.231 pessoas) e **2015** (mais de 4.200 pessoas).
- Nas três primeiras fases do estudo, foram realizadas visitas no terceiro e 12º mês de idade. Eram aplicados questionários às mães, além de medidas e avaliações do desenvolvimento das crianças.
- Os participantes continuam sendo acompanhados até o presente, e questões como sexualidade, gravidez na adolescência e hipertensão têm sido exploradas na pesquisa.
- Este estudo é a coorte de nascimentos **com seguimento regular mais longo** em um país em desenvolvimento.

Métodos de pesquisa

⇒ Pesquisa em que as características de interesse são inerentes às unidades e se manifestam **sem interferência** do pesquisador.

Censo: todas as unidades da população são observadas.

Levantamento por amostragem: as unidades podem ser escolhidas por processo aleatório (sorteio) ou não.

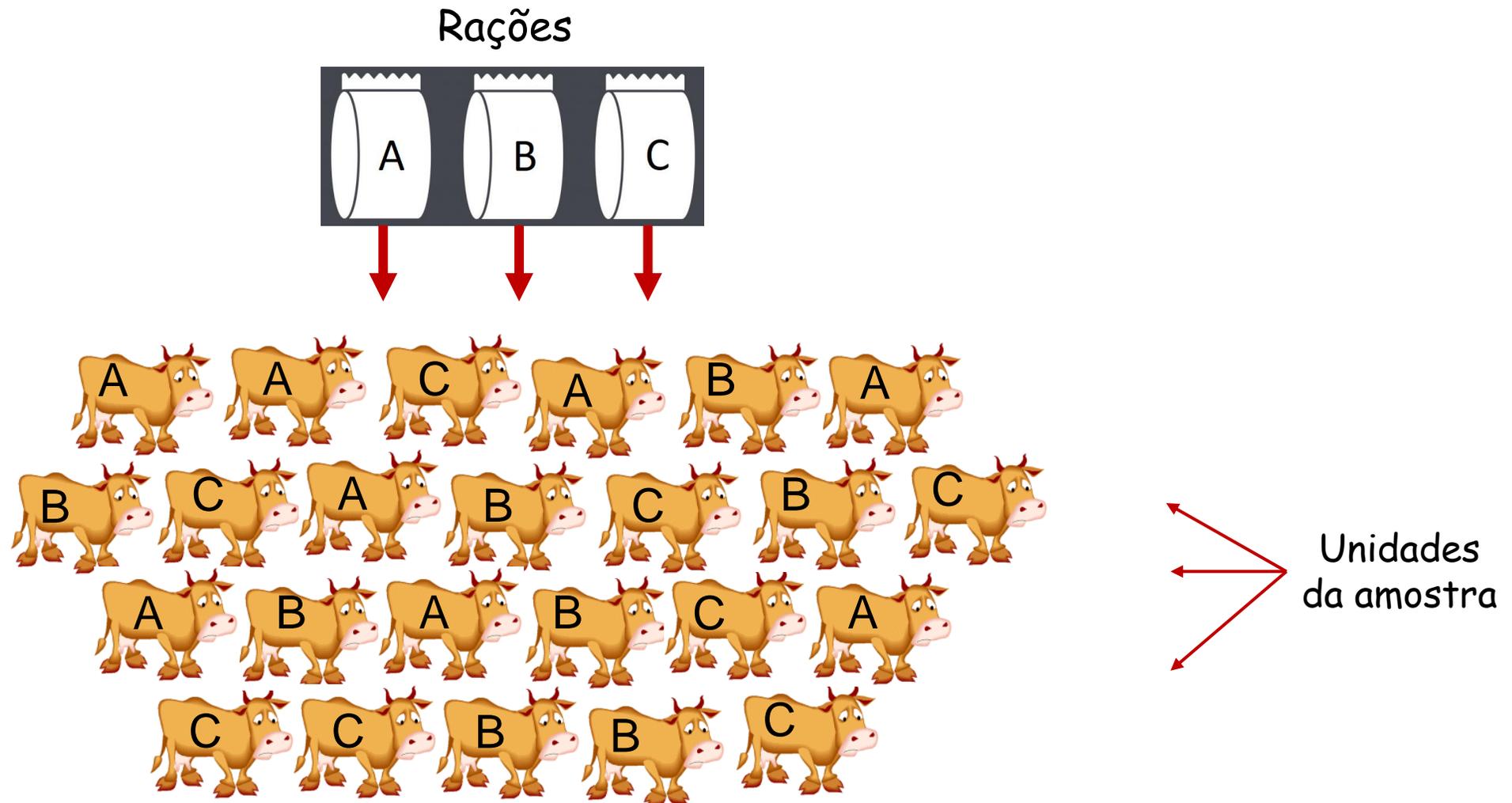
Estudo observacional: as unidades são incluídas no estudo segundo as circunstâncias. Comum na medicina e nas ciências sociais.

⇒ Pesquisa em que há **intervenção** do pesquisador na amostra.

Experimento: Os tratamentos são impostos às unidades da amostra com propósito de avaliar seus efeitos comparativamente.

Experimento: Comparação de Rações para bovinos

As diferentes rações são atribuídas aos animais pelo pesquisador por **processo aleatório**



Os métodos de pesquisa mais utilizados na Engenharia são:

⇒ Estudo observacional

O engenheiro observa um processo ou sistema → os dados são obtidos à medida em que se tornam disponíveis

⇒ Experimento

O engenheiro faz variações propositais nas variáveis controláveis de um processo ou sistema, observa os dados de saída e faz inferências sobre quais variáveis são responsáveis pelas mudanças observadas

Experimento

Comparação de duas linguagens de programação

- Um pesquisador da área de computação está investigando a utilidade de duas diferentes linguagens de programação (A e B) na melhoria das tarefas computacionais.
- Trinta programadores experientes, familiarizados com ambas as linguagens, são divididos aleatoriamente em dois grupos.
- Cada grupo codificará uma função padrão em uma das linguagens e os tempos de codificação da função (em minutos) serão registrados.

Limitações da Estatística

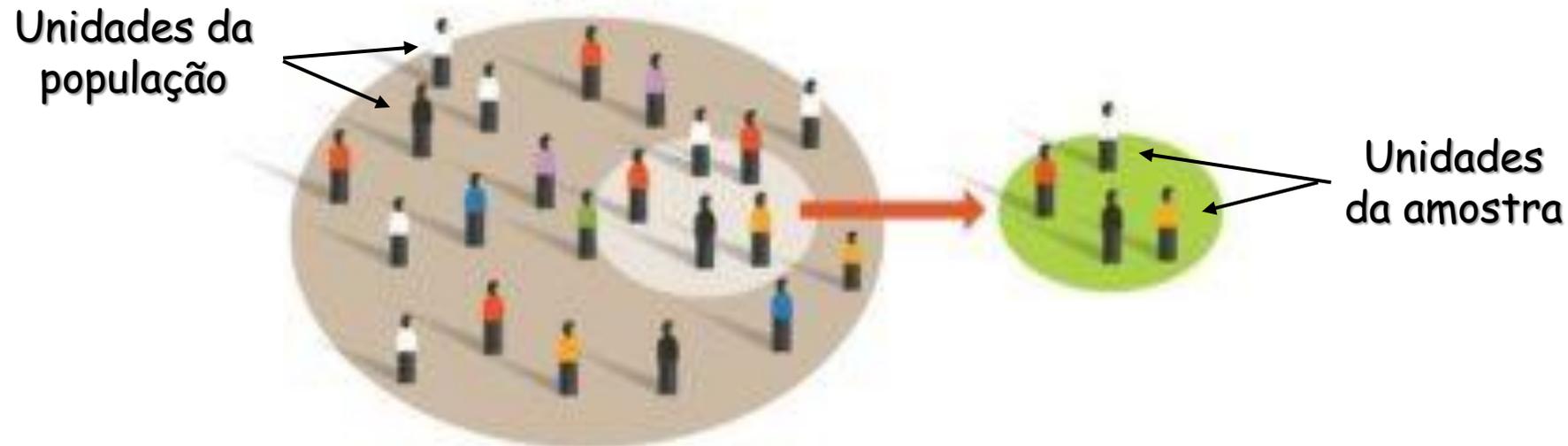
- ⇒ A Estatística não corrige erros grosseiros e técnicas defeituosas. Como toda informação está contida nos dados, se esses dados forem falsos ou viciados, será falsa qualquer conclusão retirada deles
- ⇒ Muitos procedimentos dependem da validade dos modelos escolhidos e de suas pressuposições
- ⇒ Alguns procedimentos possibilitam estabelecer associação entre variáveis, mas não relação de causa e efeito
- ⇒ A estatística não substitui o julgamento crítico do pesquisador

Conceitos fundamentais

- ◆ Característica e variável
- ◆ Escalas de medida
- ◆ Classificação de variáveis
- ◆ Observação e conjunto de dados

Características e Variáveis

- ♦ **Característica** é uma propriedade ou atributo das unidades de uma população.
- ♦ Não há interesse nas unidades em si e sim nas suas características.



Características e Variáveis

- ♦ **Característica** é uma propriedade ou atributo das unidades de uma população.
- ♦ Não há interesse nas unidades em si e sim nas suas características.
- ♦ **Variável** é uma característica para a qual foi definida uma **escala de medida**.
- ♦ Características são analisadas tendo por base os valores das variáveis a elas associados.

Por exemplo, para um grupo de alunos de uma escola pode-se medir as seguintes características: **sexo**, **escolaridade dos pais**, **temperatura corporal** e **peso**.

A definição da forma de mensuração da característica gera uma variável:

- a) **Sexo**, entre as opções {F e M}
- b) **Escolaridade dos pais**, entre as opções {EFI, EFC, EM, ES}
- c) **Temperatura**, em °C
- d) **Peso**, em kg

A variável associa números às alternativas de uma característica e esses números podem ser expresso em quatro **escalas de medida** distintas:

Nominal: os números são apenas rótulos ou nomes

Ordinal: os números possibilitam apenas ordenação

De intervalo (intervalar): algumas operações são possíveis, mas o conjunto de números não possui zero verdadeiro

De razão (racional): todas as operações são possíveis e o conjunto de números possui zero verdadeiro

A variável associa números às alternativas de uma característica e esses números podem ser expresso em quatro **escalas de medida** distintas:

Nominal: os números são apenas rótulos ou nomes

Ordinal: os números possibilitam apenas ordenação

De intervalo (intervalar): algumas operações são possíveis, mas o conjunto de números não possui zero verdadeiro

De razão (racional): todas as operações são possíveis e o conjunto de números possui zero verdadeiro

A variável associa números às alternativas de uma característica e esses número podem ser expresso em quatro **escalas de medida** distintas:

- a) **Sexo**, entre as opções {1-F e 2-M}
- b) **Escolaridade dos pais**, entre as opções {1-EFI, 2-EFC, 3-EM, 4-ES}
- c) **Temperatura**, em $^{\circ}\text{C}$
- d) **Peso**, em kg

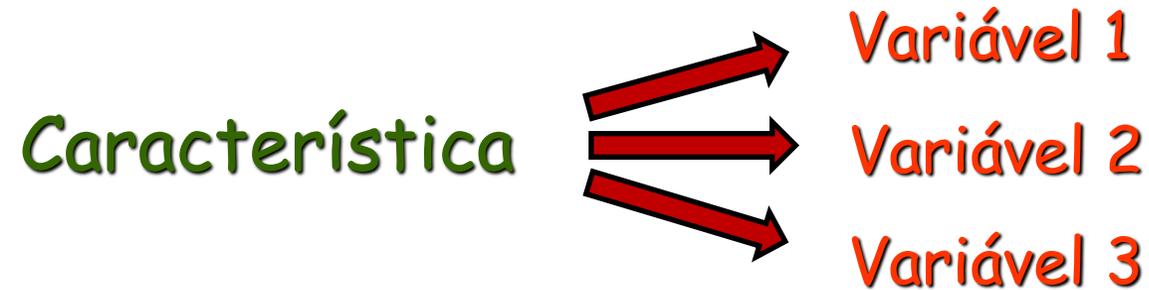
Características são analisadas tendo por base os valores das variáveis a elas associados.

No exemplo:

Aluno	Sexo	Escolaridade da mãe	Temperatura Corporal (°C)	Peso (kg)
1	2	2	36,8	51
2	1	3	36,4	46
3	1	4	35,9	38
4	2	2	36,8	45
5	1	2	35,7	34
6	2	4	37,0	58
7	2	1	36,5	50
8	1	2	37,2	44
9	2	3	36,2	37
10	2	3	37,3	38

Quantidade de informação das escalas de medida

- a) **Sexo** → pode-se apenas **distinguir** os alunos → **nominal**
- b) **Escolaridade dos pais** → pode-se **distinguir** e **ordenar** os alunos e dizer que os pais de um têm instrução superior aos pais de outro → **ordinal**
- c) **Temperatura corporal** → pode-se **distinguir** e **ordenar** os alunos e dizer que um aluno está com temperatura **superior ao outro em tantos graus** → **intervalar**
- d) **Peso** → pode-se **distinguir** e **ordenar** os alunos, dizer que **o peso de um supera o do outro em tantos quilos** e que **o peso de um aluno é metade do peso do outro aluno** → **de razão**



Uma característica pode ser medida de diferentes formas originando diferentes variáveis.

Escala nominal

Exemplos

- Sexo de estudantes (0 - Masculino, 1 - Feminino);
- Partido político de cada candidato (0 - Esquerda, 1 - Direita, 2 - Centro);
- Respostas do tipo sim ou não (0 - Sim, 1 - Não);
- Nomes de cidades (0 - Pelotas, 1 - Rio Grande, 2 - Porto Alegre).

Dados expressos
em escala nominal



⇒ Não é possível estabelecer qualquer relação de ordem entre eles

⇒ Números não têm nenhum significado para efeito de cálculos. Apenas a contagem por categoria faz sentido.

Escala ordinal

Exemplos

- Um editor de livros classifica alguns originais como:
1- excelente, 2- bom e 3- ruim;
- Classificação de alunos num teste de estatística:
1- ruim, 2- regular, 3- bom e 4- muito bom;
- Faixa etária: 0- criança, 1- jovem, 2- adulto e 3- idoso.

Dados expressos
em escala ordinal



⇒ É possível associar a eles valores que representam as ordens
⇒ Diferenças entre valores não podem ser determinadas, ou não têm sentido

Escala intervalar

Exemplos

- contagem do tempo (datas)

A contagem do tempo é feita a partir de uma escala em que o zero é arbitrário. O ocidente, a China, os judeus utilizam calendários diferentes.

- temperatura (graus Celsius, Fahrenheit)

O zero nestas escalas é apenas uma convenção.

Dados expressos
em escala intervalar



⇒ Inclui a escala ordinal;
permite determinar as
diferenças entre os dados
⇒ Não possui um ponto de
partida (zero verdadeiro)
inerente ou natural

Escala intervalar

Exemplos

- temperatura (graus Celsius, Fahrenheit)

O dobro da temperatura em °C corresponde ao dobro da temperatura em °F?

$$F = 9/5 C + 32$$

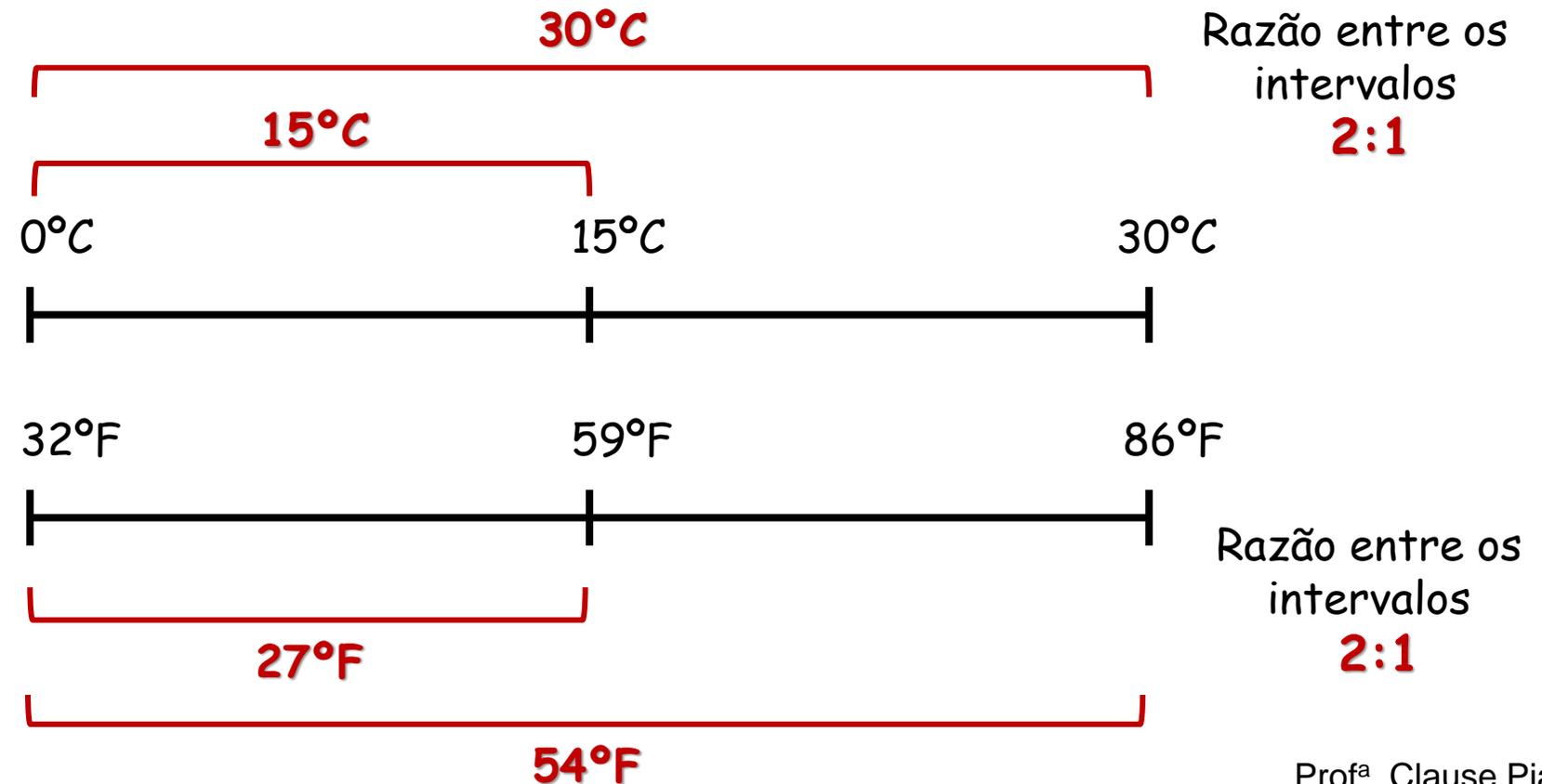
$$F = 9/5 \times 0 + 32 = 32$$

$$F = 9/5 \times 15 + 32 = 59$$

$$F = 9/5 \times 30 + 32 = 86$$

Dobro °C ≠ Dobro °F

Pode-se dizer que uma diferença entre dois valores em uma escala é um múltiplo de uma diferença entre dois outros valores.



Escala de razão

Exemplos

- Pesos e estaturas
- Distância percorrida em km
- Duração de filmes

Dados expressos
em escala de razão

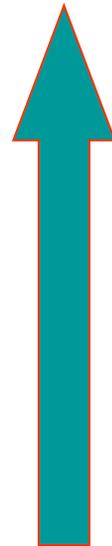


- ⇒ Inclui a escala intervalar, com a propriedade adicional de ter um zero verdadeiro (que significa ausência de quantidade)
- ⇒ Tanto as diferenças como as razões têm significado

Escalas de medida

Operações
realizadas

Metodologia
Estatística



4º nível: escala de razão
3º nível: escala intervalar
2º nível: escala ordinal
1º nível: escala nominal



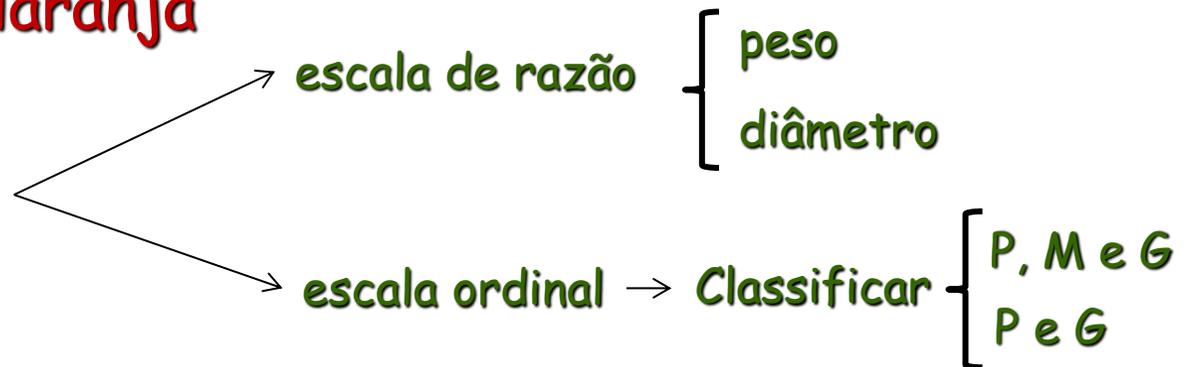
A complexidade e a informação
aumentam com o nível

Indústria de sucos



Característica: tamanho da laranja

Definir a escala de medida





Classificação de variáveis



Variáveis categóricas (fatores)

- seus valores representam categorias ou classes
- possuem um conjunto limitado de valores que se repetem para todas as observações
- cada valor da variável é denominado nível

Variáveis categóricas qualitativas → descrevem qualidades

Nominais → não há um sentido de ordem entre seus níveis

Exemplos: sexo (masculino e feminino)

raça de cavalos (manga-larga, crioulo e árabe)

região geográfica (norte, sul e sudeste)

estado civil (solteiro, casado e divorciado)

estado do tempo (bom, chuvoso, nublado)

Ordinais → há um sentido de ordem entre seus níveis

Exemplos: faixas de idade (criança, adolescente, adulto, idoso)

intensidade de cor (claro, médio, escuro)

nível de instrução (primário, secundário, universitário)

nível de armazenamento de um reservatório (muito alto, alto, médio, baixo e muito baixo).

Variáveis categóricas quantitativas → descrevem quantidades (a cada nível está associado um valor numérico)

Exemplo: Um experimento pretende comparar doses de um tranquilizante usado contra insônia

Variável: Dose de tranquilizante



Dose 1 - 0,5 mg

Dose 2 - 1,5 mg

Dose 3 - 2,5 mg

↑
categoria
ou nível

↑
valor
numérico

Variáveis numéricas → seus valores são números reais

Discretas

→ descrevem dados discretos ou de enumeração
(obtidos por **processo de contagem**)

→ assumem valores inteiros não negativos (0, 1, 2, 3, ...)

Exemplos: número de falhas em um sistema

número de pacientes que se recuperam

número de filhos de um casal

Contínuas

→ descrevem dados contínuos ou de mensuração
(obtidos por **processo de medição**)

→ podem assumir qualquer valor dos reais (-10, 0, π)

Exemplos: peso, altura, tempo, teor de umidade, temperatura

continuidade na reta dos reais

↑
medição → contínua

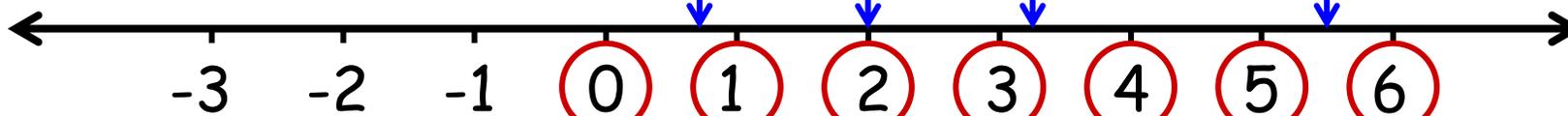
quantidade de chuva no mês (mm)

0,787

2

3,25

5,420001

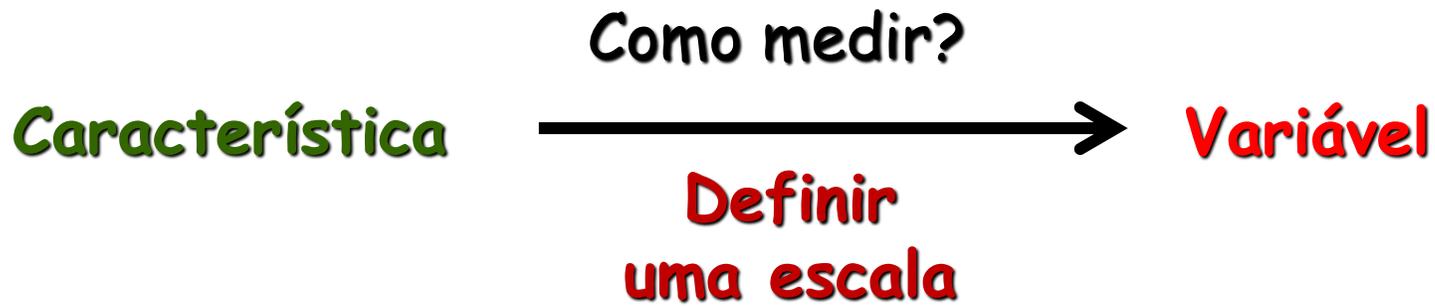


número de dias chuvosos do mês

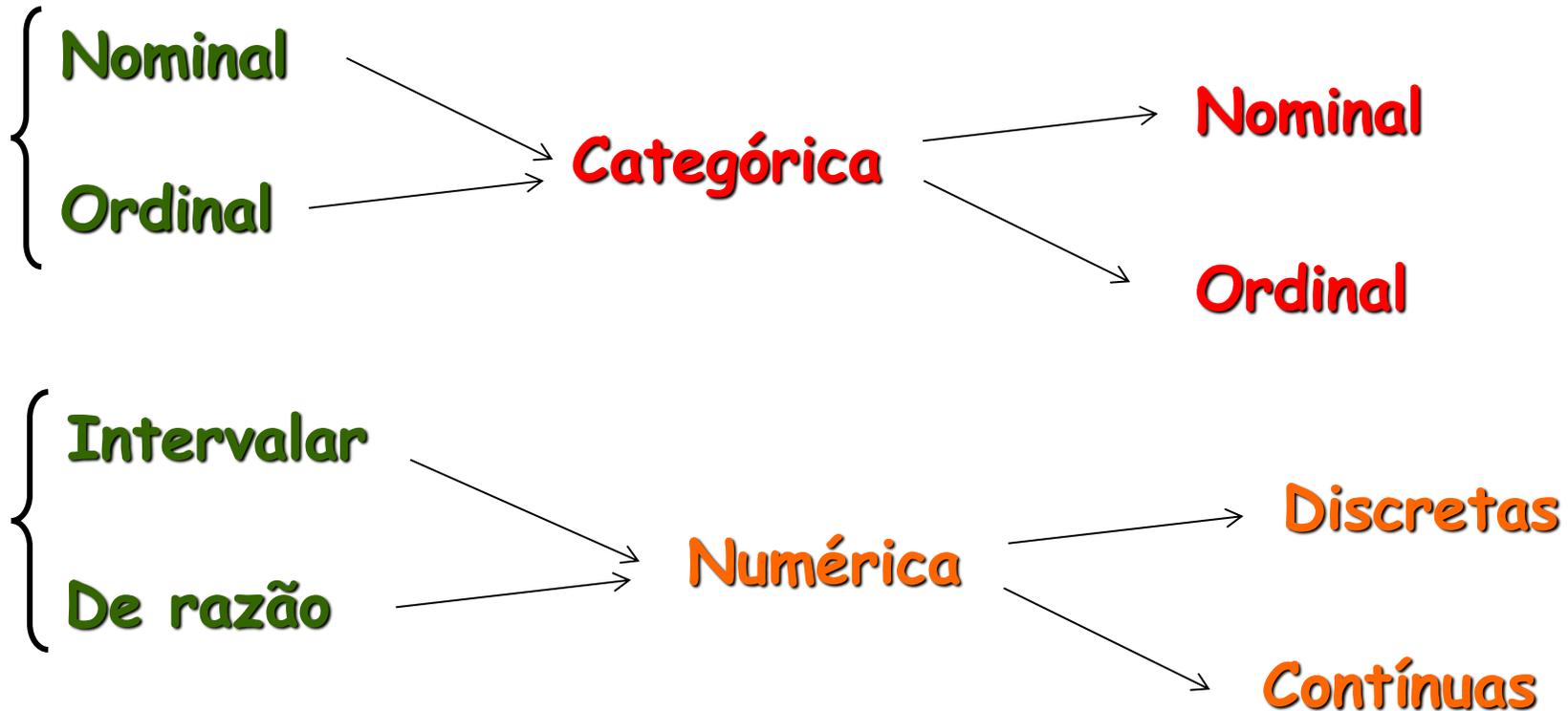
↓
contagem → discreta

Por que classificar as variáveis?

É de fundamental importância saber classificar corretamente uma variável porque esta discriminação é que irá indicar a possibilidade e a forma de utilização dos procedimentos estatísticos disponíveis.



Escala



Exercício proposto:

Classifique as variáveis e identifique suas escalas de medida.

- número anual de dias consecutivos sem precipitação num local
- vazão de uma bacia hidrográfica ($m^3.s^{-1}$)
- total diário de evaporação de um reservatório (mm)
- estado do tempo, entre as opções {bom, chuvoso e nublado}
- temperaturas da água ($^{\circ}C$)
- nível de armazenamento de um reservatório, entre as opções {excessivamente alto, alto, médio, baixo e excessivamente baixo}
- concentração de oxigênio dissolvido em um lago ($mg.L^{-1}$)
- velocidade de um carro ($km. s^{-1}$)
- Postos hierárquicos em um exército
- número de peças com defeito em um lote
- valor de venda diária de uma empresa (em R\$)

Exercício proposto:

Classifique as variáveis e identifique suas escalas de medida.

- Número de vendas diárias de uma empresa
- Vazão de uma bacia hidrográfica ($\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$)
- Consumo de gasolina de um carro ($\text{km} \cdot \text{L}^{-1}$)
- Consumo de gasolina de um carro (baixo, médio, alto)
- Grau de escolaridade
- Número de dias sem chuva em um dado local
- Temperatura de uma mistura (em $^{\circ}\text{C}$)
- Modelo de um carro
- Velocidade de um carro ($\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$)
- Postos hierárquicos em um exército
- Número de peças com defeito em um lote
- Valor de venda diária de uma empresa (em R\$)

Unidade de observação → unidade onde são medidas as variáveis de interesse

Exemplos: aluno, planta, animal, computador

Observação → conjunto dos valores de todas as variáveis medidas em uma unidade de observação

Exemplo: peso, estatura e número de irmãos de um estudante

Conjunto de dados → conjunto de todas as observações

Um conjunto de dados com: 17 unidades ou observações, 1 variável identificadora, 1 variável categórica, 1 variável numérica discreta e 3 variáveis numéricas contínuas



i	Nome	Sexo	Número de irmãos	Idade	Estatutura	Peso
1	Alfredo	M	2	14	1,75	51,03
2	Carol	F	2	14	1,60	46,49
3	Jane	F	1	12	1,52	38,33
4	João	M	0	12	1,50	45,13
5	Luísa	F	2	12	1,43	34,93
6	Roberto	M	4	12	1,65	58,06
7	William	M	1	15	1,69	50,80
8	Bárbara	F	2	13	1,66	44,45
9	Juca	M	3	12	1,46	37,65
10	Joca	M	3	13	1,59	38,10
11	Judite	F	1	14	1,63	40,82
12	Felipe	M	0	16	1,83	68,04
13	Tomas	M	5	11	1,46	38,56
14	Alice	F	4	13	1,44	38,10
15	Henrique	M	1	14	1,61	46,49
16	Janete	F	2	15	1,59	51,03
17	Joice	F	3	11	1,30	22,91

Representação de variáveis

Variáveis → letras maiúsculas (X, Y, Z)

Valores da variável (dados) → letras minúsculas (x, y, z)

Exemplo: Se uma variável é representada por **X** (**x is maiúsculo**), todos os seus valores serão representados por **x** (**x is minúsculo**)

Diferenciação dos valores da variável → acrescenta-se um índice i ao x

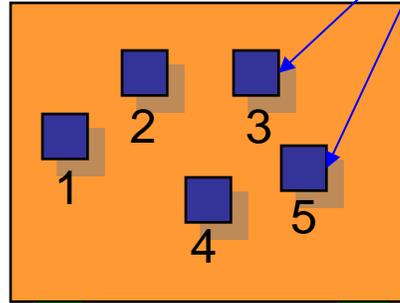
x_i → conjunto de valores

Se $i = 1, 2, \dots, n$, então, $x_i = x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$

Valores de variáveis nas amostras

Amostra

Unidades i



x_i : valor da variável X na unidade i

y_i : valor da variável Y na unidade i

z_i : valor da variável Z na unidade i

Variáveis
medidas
(X, Y e Z)



$\left\{ \begin{array}{l} \{ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \} \\ \{ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \} \\ \{ z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 \} \end{array} \right.$

Um conjunto de dados com: 17 unidades ou observações, 1 variável identificadora,
1 variável categórica, 1 variável numérica discreta e 3 variáveis numéricas contínuas



i	Nome	Sexo	Número de irmãos	Idade	Estatura	Peso
1	Alfredo	M	2	14	1,75	51,03
2	Carol	F	2	14	1,60	46,49
3	Jane	F	1	12	1,52	38,33
4	João	M	0	12	1,50	45,13
5	Luísa	F	2	12	1,43	34,93
6	Roberto	M	4	12	1,65	58,06
7	William	M	1	15	1,69	50,80
8	Bárbara	F	2	13	1,66	44,45
9	Juca	M	3	12	1,46	37,65
10	Joca	M	3	13	1,59	38,10
11	Judite	F	1	14	1,63	40,82
12	Felipe	M	0	16	1,83	68,04
13	Tomas	M	5	11	1,46	38,56
14	Alice	F	4	13	1,44	38,10
15	Henrique	M	1	14	1,61	46,49
16	Janete	F	2	15	1,59	51,03
17	Joice	F	3	11	1,30	22,91

Representação simbólica de variáveis e valores

$A = \text{Sexo}$

$$a_1 = M$$

$$a_2 = F$$

$X = \text{Número de irmãos}$

$$x_3 = 1$$

$$x_{12} = 0$$

$Y = \text{Idade}$

$$y_2 = 14$$

$$y_{14} = 13$$

$Z = \text{Estatura}$

$$z_5 = 1,43$$

$$z_9 = 1,46$$

$W = \text{Peso}$

$$w_4 = 45,13$$

$$w_{13} = 38,56$$

Notação somatório

i	x_i	y_i
1	1	2
2	0	1
3	2	-2
4	-1	1
5	4	0

$$x_{(1)} = -1$$

$$x_{(2)} = 0$$

...

$$x_{(5)} = 4$$

$$y_{(1)} = -2$$

$$y_{(2)} = 0$$

...

$$y_{(5)} = 2$$

i é o número da observação, tal que $i = 1, 2, \dots, n$

n é o número total de observações

x_i é o valor da variável X para a observação i , tal que $x_1 = 1, x_2 = 0, \dots, x_5 = 4$

y_i é o valor da variável Y para a observação i , tal que $y_1 = 2, y_2 = 1, \dots, y_5 = 0$

$x_{(i)}$ é o valor da variável X para a observação i , tal que $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$

$x_{(1)}$ é o menor valor da variável X

$x_{(n)}$ é o maior valor da variável X

Somatório (Σ)

⇒ indica a soma seqüencial de um conjunto de valores

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = \sum_{i=1}^5 x_i$$

limite superior da soma

somatório

$$\sum_{i=1}^n x_i$$

Valores que estão sendo somados

número das observações

limite inferior da soma

A notação $\sum_{i=1}^n$ inclui todos os valores do intervalo e pode ser simplificada por Σ

$$\sum_{i=1}^n = \Sigma$$

Outra forma de notação da soma:

$$\sum_{i=1}^n x_i = \Sigma x_i = X_+$$

$$\sum_{i=1}^n y_i = \Sigma y_i = Y_+$$

Algumas quantidades de interesse:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = \sum_{i=1}^5 x_i^2 \quad \leftarrow \text{Soma de quadrados}$$

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^2 = \left(\sum_{i=1}^5 x_i \right)^2 \quad \leftarrow \text{Quadrado da soma}$$

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4 + x_5 y_5 = \sum_{i=1}^5 x_i y_i \quad \leftarrow \text{Soma de produtos}$$

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) \cdot (y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5) = \sum_{i=1}^5 x_i \sum_{i=1}^5 y_i \quad \leftarrow \text{Produto das somas}$$

1. Desenvolva os seguintes somatórios:

$$\sum_{j=6}^{10} f_j^2 = f_6^2 + f_7^2 + f_8^2 + f_9^2 + f_{10}^2$$

$$\sum_{j=3}^6 (x_j + c) =$$

$$\sum_{i=1}^4 (x_i + 2)^2 f_i =$$

2. Represente, usando a notação Σ , as seguintes expressões:

$$5x_1^2 + 5x_2^2 + \dots + 5x_{10}^2 = \sum_{i=1}^{10} 5x_i^2$$

$$x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + \dots + x_j + y_j + \dots + x_6 + y_6 =$$

$$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + k =$$

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_u y_u + \dots + x_n y_n =$$

Propriedades da soma

1ª propriedade: A soma é distributiva, ou seja, se cada termo da soma é multiplicado por uma constante c , os termos podem ser somados e a soma multiplicada pela constante.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n c x_i &= c x_1 + c x_2 + \dots + c x_n \\ &= c (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \\ &= c \sum_{i=1}^n x_i\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^n c x_i = c \sum_{i=1}^n x_i}$$

2ª propriedade: A soma de uma constante **c** sobre **n** termos é igual a **n** vezes esta constante.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^4 c &= c + c + c + c \\ &= (1c + 1c + 1c + 1c) \\ &= c(1 + 1 + 1 + 1) \\ &= 4c\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^n c = nc$$

3ª propriedade: A soma é associativa, ou seja, o somatório da soma (ou diferença) é igual a soma (ou diferença) de somatórios.

$$\sum_{i=1}^n (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n y_i$$

$$(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + \dots + (x_n + y_n) = (x_1 + x_2 + \dots + x_n) + (y_1 + y_2 + \dots + y_n)$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i - y_i) = \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n y_i$$

As propriedades devem ser usadas no sentido de simplificar as operações. Sempre que houver uma operação que precede a soma, devemos desenvolvê-la antes de aplicar as propriedades.

Exemplo:

$$\begin{aligned} \underbrace{\sum (x_i - c)^2}_{\text{binômio}} &= \sum (x_i^2 - 2x_i c + c^2) \leftarrow \text{3ª propriedade} \\ &= \sum x_i^2 - \sum 2x_i c + \sum c^2 \quad \text{1ª propriedade} \\ &= \sum x_i^2 - 2c \sum x_i + nc^2 \quad \text{2ª propriedade} \\ &= \sum x_i^2 - 2c \sum x_i + nc^2 \end{aligned}$$

Simplifique os seguintes somatórios, utilizando as propriedades da soma.

$$\text{a) } \sum_{i=1}^5 2x_i =$$

$$\text{b) } \sum_{j=3}^6 (x_j + c) =$$

$$\text{c) } \sum_{i=1}^4 (x_i + 2)^2 f_i =$$

$$\text{d) } \sum_{i=3}^5 \frac{1}{4} x_i y_i =$$

$$\text{e) } \sum_{i=2}^4 (x_i + 3y_i)^2 + \sum_{i=2}^4 y_i =$$

A partir do conjunto de dados, calcule os seguintes somatórios:

i	x_i	y_i
1	1	2
2	0	1
3	2	-2
4	-1	1
5	4	0

$$a) \sum_{i=3}^5 x_i^2 =$$

$$b) \left(\sum_{i=3}^5 x_i \right)^2 =$$

$$c) \sum_{i=1}^3 x_i y_i =$$

$$d) \sum_{i=1}^3 x_i \sum_{i=1}^3 y_i =$$



Respostas dos Exercícios

Respostas do Exercício proposto:

Classifique as variáveis e identifique suas escalas de medida.

- Número de vendas diárias de uma empresa → Numérica discreta, escala de razão
- Vazão de uma bacia hidrográfica ($\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$) → Numérica contínua, escala de razão
- Consumo de gasolina de um carro ($\text{km} \cdot \text{L}^{-1}$) → Numérica contínua, escala de razão
- Consumo de gasolina de um carro (baixo, médio, alto) → Categ. qualit. ordinal, escala ordinal
- Grau de escolaridade → Categ. qualit. ordinal, escala ordinal
- Número de dias sem chuva em um dado local → Numérica discreta, escala de razão
- Temperatura de uma mistura (em $^{\circ}\text{C}$) → Numérica contínua, escala intervalar
- Modelo de um carro → Categ. qualit. nominal, escala nominal
- Velocidade de um carro ($\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$) → Numérica contínua, escala de razão
- Postos hierárquicos em um exército → Categ. qualit. ordinal, escala ordinal
- Número de peças com defeito em um lote → Numérica discreta, escala de razão
- Valor de venda diária de uma empresa (em R\$) → Numérica contínua, escala de razão

Exercício proposto:

Classifique as variáveis e identifique suas escalas de medida.

- número anual de dias consecutivos sem precipitação num local → Numérica discreta, escala de razão
- vazão de uma bacia hidrográfica ($m^3 \cdot s^{-1}$) → Numérica contínua, escala de razão
- total diário de evaporação de um reservatório (mm) → Numérica contínua, escala de razão
- estado do tempo, entre as opções {bom, chuvoso e nublado} → Categ. qualit. nominal, escala nominal
- temperaturas da água ($^{\circ}C$) → Numérica contínua, escala intervalar
- nível de armazenamento de um reservatório, entre as opções {excessivamente alto, alto, médio, baixo e excessivamente baixo} → Categ. qualit. ordinal, escala ordinal
- concentração de oxigênio dissolvido em um lago ($mg \cdot L^{-1}$) → Numérica contínua, escala de razão
- velocidade de um carro ($km \cdot s^{-1}$) → Numérica contínua, escala de razão
- postos hierárquicos em um exército → Categ. qualit. ordinal, escala ordinal
- número de peças com defeito em um lote → Numérica discreta, escala de razão
- valor de venda diária de uma empresa (em R\$) → Numérica contínua, escala de razão

1. Desenvolva os seguintes somatórios:

$$\sum_{j=6}^{10} f_j^2 = f_6^2 + f_7^2 + f_8^2 + f_9^2 + f_{10}^2$$

$$\sum_{j=3}^6 (x_j + c) = (x_3 + c) + (x_4 + c) + (x_5 + c) + (x_6 + c)$$

$$\sum_{i=1}^4 (x_i + 2)^2 f_i = (x_1 + 2)^2 f_1 + (x_2 + 2)^2 f_2 + (x_3 + 2)^2 f_3 + (x_4 + 2)^2 f_4$$

2. Represente, usando a notação Σ , as seguintes expressões:

$$5x_1^2 + 5x_2^2 + \dots + 5x_{10}^2 = \sum_{i=1}^{10} 5x_i^2$$

$$x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + \dots + x_j + y_j + \dots + x_6 + y_6 = \sum_{j=1}^6 (x_j + y_j)$$

$$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + k = \left(\sum_{i=1}^4 w_i \right) + k$$

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_u y_u + \dots + x_n y_n = \sum_{u=1}^n x_u y_u$$

Simplifique os seguintes somatórios, utilizando as propriedades da soma.

$$\text{a) } \sum_{i=1}^5 2x_i = 2 \sum_{i=1}^5 x_i$$

$$\text{b) } \sum_{j=3}^6 (x_j + c) = \sum_{j=3}^6 x_j + 4c$$

$$\text{c) } \sum_{i=1}^4 (x_i + 2)^2 f_i = \sum_{i=1}^4 x_i^2 f_i + 4 \sum_{i=1}^4 x_i f_i + 4 \sum_{i=1}^4 f_i$$

$$\text{d) } \sum_{i=3}^5 \frac{1}{4} x_i y_i = \frac{1}{4} \sum_{i=3}^5 x_i y_i$$

$$\text{e) } \sum_{i=2}^4 (x_i + 3y_i)^2 + \sum_{i=2}^4 y_i = \sum_{i=2}^4 x_i^2 + 6 \sum_{i=2}^4 x_i y_i + 9 \sum_{i=2}^4 y_i^2 + \sum_{i=2}^4 y_i$$

A partir do conjunto de dados, calcule os seguintes somatórios:

i	x_i	y_i
1	1	2
2	0	1
3	2	-2
4	-1	1
5	4	0

$$\text{a) } \sum_{i=3}^5 x_i^2 = 21$$

$$\text{b) } \left(\sum_{i=3}^5 x_i \right)^2 = 25$$

$$\text{c) } \sum_{i=1}^3 x_i y_i = -2$$

$$\text{d) } \sum_{i=1}^3 x_i \sum_{i=1}^3 y_i = 3$$

Bibliografia

FERREIRA, D.F. **Estatística básica**. Lavras: Editora UFLA, 2005.

MONTGOMERY, D.C.; RUNGER, G.C.; HUBELE, N.F. **Estatística Aplicada à Engenharia**. 2 ed. Rio de Janeiro: Editora LTC. 2004. 335p.

SILVEIRA JUNIOR, P. ; MACHADO, A.A. ; ZONTA, E.P.; SILVA, J.B. da. **Curso de Estatística v.1**. Pelotas: Universidade Federal de Pelotas, 1992, 135p.

Sistema Galileu de Educação Estatística. Disponível em:
<http://www.galileu.esalq.usp.br/topico.html>