Gabarito da lista 6 – Tópicos 3.2.3, 3.3.1.1 e 3.3.1.2

1. A função pode ser reescrita desta forma: f(x) = $\frac{3x}{2} - \frac{3x^2}{4}$, S_x= [0; 2]

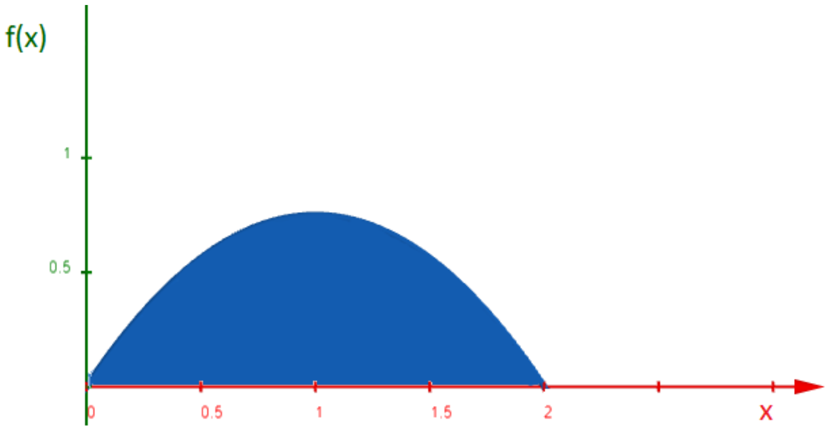
a) Primeira condição: f(x) ≥ 0, ∀ x ∈ SX

para x = 0, temos f(0) = $\frac{3.0}{2} - \frac{3.0^2}{4}$ = 0

para x = 1, temos f(1) = $\frac{3.1}{2} - \frac{3.1^2}{4}$= 0,75

para x = 2, temos f(2) = $\frac{3.2}{2} - \frac{3.2^2}{4}$ = 0

A partir desses 3 pontos podemos traçar o gráfico e verificar que todos os valores da função f(x) são não negativos no intervalo de 0 a 2, portanto, a primeira condição foi atendida.



Segunda condição: $\int_{Sx} \mathrm{f(x)dx} = 1$

$$\int_0^2 (\frac{3}{2}x - \frac{3}{4}x^2)dx$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^2 x\,dx - \frac{3}{4}\int_0^2 x^2\,dx$$

$$= \frac{3}{2}\,\frac{2^2}{2} - \frac{3}{4}\,\frac{2^3}{3} = 1$$

Como as duas condições foram satisfeitas, a função f(x) é função de densidade de probabilidade.

b) F(x) = $\int_0^x (\frac{3}{2}t - \frac{3}{4}t^2)dt$

$$= \frac{3}{2}\int_0^x t\ dt - \frac{3}{4}\int_0^x t^2\,dt$$

$$= \frac{3}{2}\,\frac{x^2}{2} - \frac{3}{4}\,\frac{x^3}{3}$$

F(x) = $\frac{3x^2 - x^3}{4}$

c) P(A) = P(1 < x < 2) = F(2) – F(1) = 1 – 0,5 = 0,5

F(2) = $\frac{3.2^2-2^3}{4}$ = 1

F(1) = $\frac{3.1^2-1^3}{4}$ = 0,5

d) P(x > 1,7) = 1 – P(x < 1,7)

= 1 - 0,93925 = 0,06075

F(1,7) = $\frac{3\,.1{,}7^2-1{,}7^3}{4}$ = 0,93925

Como obtivemos uma porcentagem baixa (0,06075) de haver necessidade de drenar água não é razoável prever um sistema de drenagem.

e) P(x < 1,3) = 0,7183

F(1,3) = $\frac{3\,.1{,}3^2-1{,}3^3}{4}$ = 0,7183

Como obtivemos uma porcentagem alta de haver necessidade de represar água é razoável prever a construção de barragens.

f) E(X) = $\int_{S_X} x\, f(x)dx$

E(X) = $\int_0^2 x\,(\frac{3}{2}x - \frac{3}{4}x^2)dx$

E(X) = $\int_0^2 (\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^3)dx$

E(X) = $\frac{3}{2}\int_0^2 x^2 dx - \frac{3}{4}\int_0^2 x^3\, dx$

E(X) = 1

V(X) = E(X²) – μ^2

E(X²) = $\int_0^2 x^2\,(\frac{3}{2}x - \frac{3}{4}x^2)dx$

E(X²) = $\int_0^2 (\frac{3}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^4)dx$

E(X²) = $\frac{3}{2}\int_0^2 x^3 dx - \frac{3}{4}\int_0^2 x^4\, dx$

E(X²) = 1,2

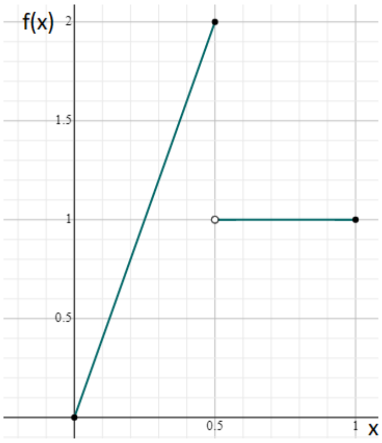
V(X) = E(X²) – μ^2 = 1,2 – 1^2 = 0,2

2.

a) Para obter a função densidade de probabilidade f(x), obtém-se a primeira derivada da função de distribuição F(x).

F'(x) = f(x)

$$f(x) = \begin{cases} 4x, & \text{para } 0 \leq x \leq 1/2 \\ 1, & \text{para } 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$$



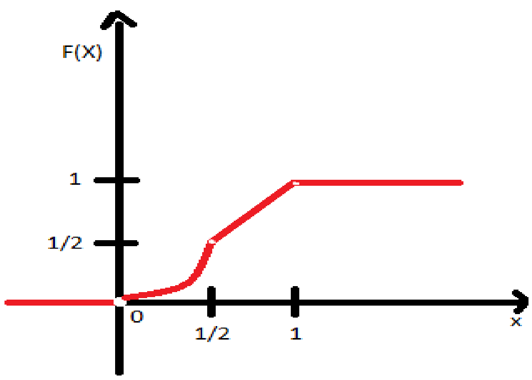
b) P(X < 2/3) = F(2/3) = 2/3

c) E(X) = $\int_0^{1/2} x4x\,dx + \int_{1/2}^{1} x1\,dx$

E(X) = $\int_0^{1/2} x4x\,dx + \int_{1/2}^{1} x1\,dx$

E(X) = $\frac{1}{6} + \frac{3}{8} = \frac{13}{24}$ = 0,5417

d)



3. S = {macho, fêmea}

S_X = {0 ,1}

P(X = x) = $0,5^{x} \cdot 0,5^{1-x}$

4.

a) $\pi = 0{,}9$ e $n = 4$

b) $P(X = 0) = P_4^{0,4-0}.0{,}9^0.0{,}1^{4-0} = 1 . 1 . 0{,}1^4 = 0{,}0001$

$P(X = 1) = P_4^{1,4-1}.0{,}9^1.0{,}1^{4-1} = 4. 0{,}9 . 0{,}001 = 0{,}0036$

$P(X = 2) = P_4^{2,4-2}.0{,}9^2.0{,}1^{4-2} = 6 . 0{,}81 . 0{,}01 = 0{,}0486$

$P(X = 3) = P_4^{3,4-3}.0{,}9^3.0{,}1^{4-3} = 4 . 0{,}729. 0{,}1 = 0{,}2916$

$P(X = 4) = P_4^{4,4-4}.0{,}9^4.0{,}1^{4-4} = 1 . 0{,}6561 .1 = 0{,}6561$

X=x	0	1	2	3	4	$\sum$
p(x)	0,0001	0,0036	0,0486	0,2916	0,6561	1

c) $E(x) = n\pi = 4 \times 0{,}9 = 3{,}6$

$V(x) = n\pi(1-\pi) = 4 \times 0{,}9 \times 0{,}1 = 0{,}36$

5. Numa competição de tiro ao alvo, a probabilidade de um atirador acertar é 1/4. Supondo que ele atira cinco vezes e que os disparos são independentes, determine:

a) a função de probabilidade (representação analítica e tabular) e seu gráfico;

$P(X = x) = P_5^{x,5-x} . 0{,}25^x . 0{,}75^{5-x}$, $S_x = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

$P(X = 0) = P_5^{0,5-0}. 0{,}25^0. 0{,}75^{5-0} = 1 \times 1 \times 0{,}2373 = 0{,}2373$ ou $\frac{243}{1024}$

$P(X = 1) = P_5^{1,5-1}. 0{,}25^1. 0{,}75^{5-1} = 5 \times 0{,}25 \times 0{,}3164 = 0{,}3955$ ou $\frac{405}{1024}$

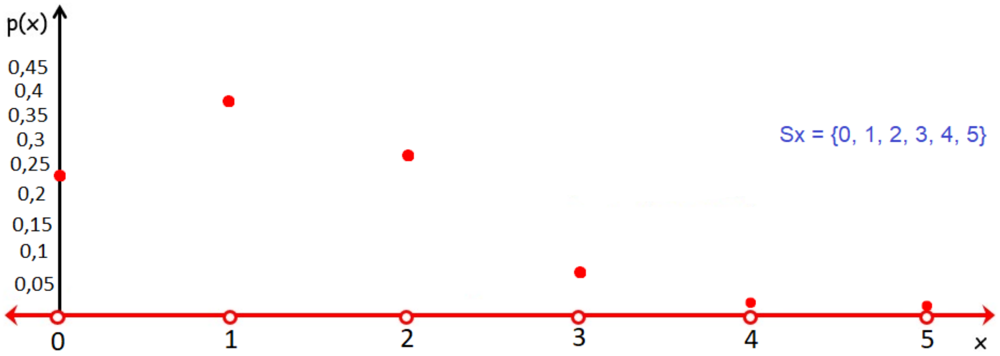
$P(X = 2) = P_5^{2,5-2}. 0{,}25^2. 0{,}75^{5-2} = 10 \times 0{,}0625 \times 0{,}421875 = 0{,}2637$ ou $\frac{270}{1024}$

$P(X = 3) = P_5^{3,5-3}. 0{,}25^3. 0{,}75^{5-3} = 10 \times 0{,}01563 \times 0{,}5625 = 0{,}08789$ ou $\frac{90}{1024}$

$P(X = 4) = P_5^{4,5-4}. 0{,}25^4. 0{,}75^{5-4} = 5 \times 0{,}003906 \times 0{,}75 = 0{,}01465$ ou $\frac{15}{1024}$

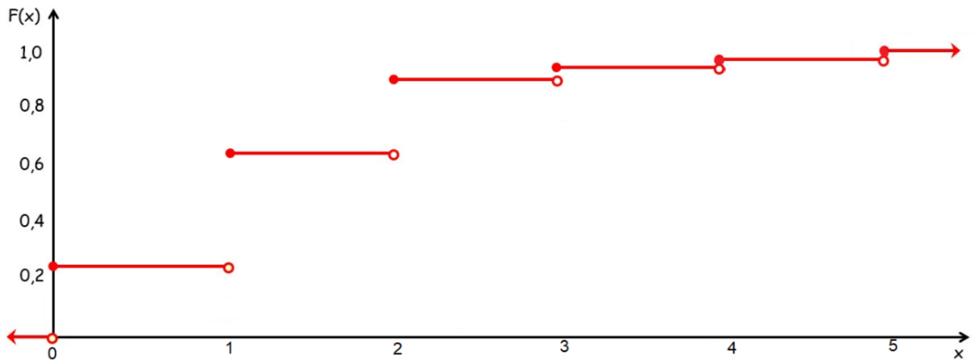
$P(X = 5) = P_5^{5,5-5}. 0{,}25^5. 0{,}75^{5-5} = 1 \times 0{,}0009766 \times 1 = 0{,}0009766$ ou $\frac{1}{1024}$

X=x	0	1	2	3	4	5	$\sum$
P(X=x)	$\frac{243}{1024}$	$\frac{405}{1024}$	$\frac{270}{1024}$	$\frac{90}{1024}$	$\frac{15}{1024}$	$\frac{1}{1024}$	1



b) a distribuição de probabilidade acumulada de X e o seu gráfico;

X=x	0	1	2	3	4	5	∑
F(x)	$\frac{243}{1024}$	$\frac{648}{1024}$	$\frac{918}{1024}$	$\frac{1008}{1024}$	$\frac{1023}{1024}$	1	1



c) Valor esperado de X pela expressão geral: $E(X) = \sum xp(x)$

$E(X) = 0.\ 0{,}2373 + 1.\ 0{,}3955 + 2.\ 0{,}2637 + 3.\ 0{,}08790 + 4.\ 0{,}01465 + 5.\ 0{,}0009766 = 1{,}25$

Valor esperado de X pelo teorema: $E(x) = n\pi$:

$E(X) = 5 \times 0{,}25 = 1{,}25$

d) Variância de X pela expressão geral: $V(X) = E(X^2) - \mu^2$:

$E(X^2) = 0^2.\ 0{,}2373 + 1^2.\ 0{,}3955 + 2^2.0{,}2637 + 3^2.0{,}08789 + 4^2.0{,}01465 + 5^2.0{,}0009766 = 2{,}5$

$V(X) = 2{,}5 - (1{,}25^2) = 2{,}5 - 1{,}5625 = 0{,}9375$

Variância de X pelo teorema: $V(x) = n\pi(1-\pi)$

$V(X) = 5 \times 0{,}25 \times 0{,}75 = 0{,}9375$

e) $a_3 = \frac{(1-\pi)-\pi}{\sqrt{n\pi(1-\pi)}} = \frac{0{,}25-0{,}75}{\sqrt{0{,}9375}} = 0{,}5164$ Distribuição assimétrica positiva

6.

a) Distribuição de Bernoulli

S = {acerto, erro};

S_X = {0, 1};

Parâmetro: $\pi = 0,2$

b) X = número de sucessos (acertos) em 10 questões

S_X = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

Aluno será aprovado se acertar 7 ou mais questões no teste.

$P(x \geq 7) = P(x = 7) + P(x = 8) + P(x = 9) + P(x = 10)$

$= 0,000786432 + 0,000073728 + 0,000004096 + 0,0000001024 = 0,0008644$

$P(x = 7) = P_{10}^{7,3}.0,2^7.0,8^3 = 120 \times 0,0000128 \times 0,512 = 0,00078643$

$P(x = 8) = P_{10}^{8,2}.0,2^8.0,8^2 = 45 \times 0,00000256 \times 0,64 = 0,00007373$

$P(x = 9) = P_{10}^{9,1}.0,2^9.0,8^1 = 10 \times 0,000000512 \times 0,8 = 0,000004096$

$P(x = 10) = P_{10}^{10,0}.0,2^{10}.0,8^0 = 1 \times 0,0000001024 \times 1 = 0,0000001024$