UNIDADE III - Elementos de probabilidades

Profª. Clause Piana

Variável aleatória

Definição: É uma função (ou regra) que transforma um espaço amostral qualquer em um **espaço amostral numérico**, que será sempre um subconjunto do conjunto dos números reais.

$$\text{Variáveis aleatórias} \begin{cases} \text{Discretas} \\ \text{Contínuas} \end{cases}$$

3.2.3 Variáveis aleatórias contínuas

Definição: São contínuas todas as variáveis cujo espaço amostral S_X é **contínuo** ou **não enumerável**.

⇨ Se X é uma variável aleatória contínua, X pode assumir qualquer valor num intervalo $[a; b]$ ou no intervalo $(-\infty;+\infty)$.

⇨ O espaço S_X será sempre definido como um intervalo do conjunto dos reais, sendo, portanto, um conjunto infinito.

Exemplos:

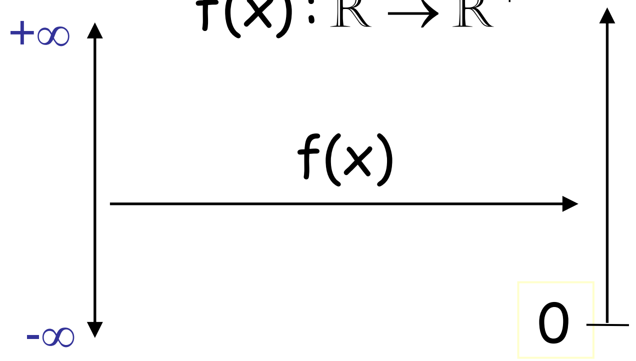
- tempo que uma pessoa espera numa fila
- peso da produção de uma planta
- estatura de uma pessoa
- produção de leite de uma vaca
- quantidade de chuva que ocorre numa região

1. Função densidade de probabilidade

Definição: Seja X uma variável aleatória contínua e S_X o seu espaço amostral. Uma função **f** associada a variável X é denominada **função densidade de probabilidade (fdp)** se satisfizer duas condições:

1. $f(x) \geq 0, \ \forall \ x \in S_X$

$$f(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$



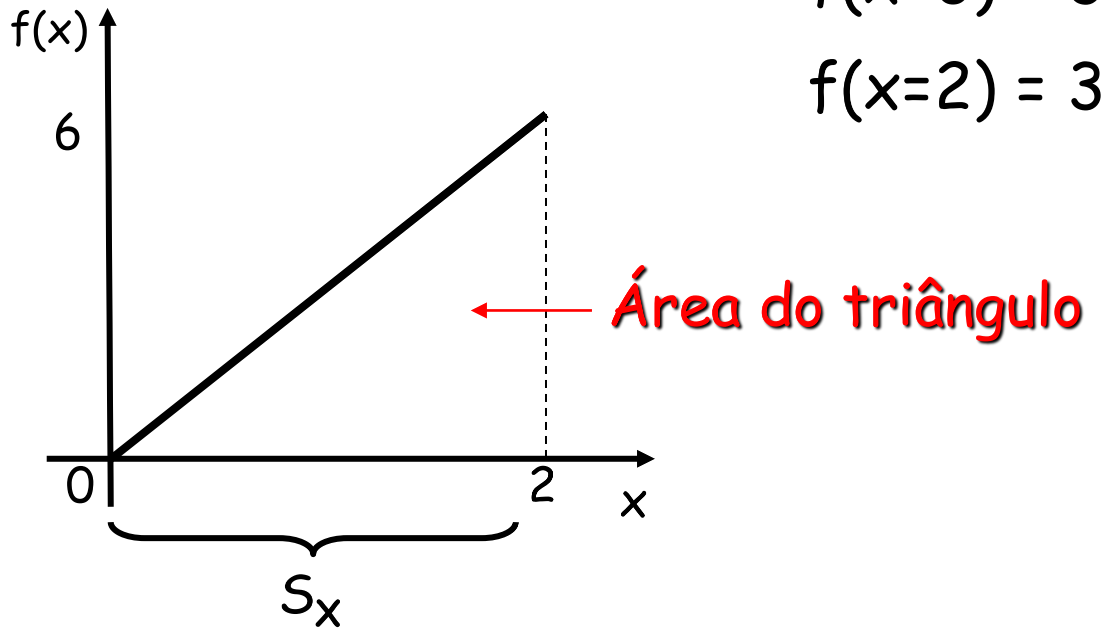
Domínio

Espaço amostral de X: intervalo (-∞; +∞).

Contradomínio

Intervalo [0, +∞)

$f(x) = 3x$



$f(x{=}0) = 3 \times 0 = 0$

$f(x{=}2) = 3 \times 2 = 6$

$\int_0^2 f(x)dx =$ área sob a função no intervalo [0; 2]

1. Função densidade de probabilidade

Definição: Seja X uma variável aleatória contínua e S_X o seu espaço amostral. Uma função **f** associada a variável X é denominada **função densidade de probabilidade (fdp)** se satisfizer duas condições:

1. $f(x) \geq 0, \ \forall \ x \in S_X$

2. $\int_{S_X} f(x)dx = 1 = P(X \in S_X)$

Esta área corresponde à probabilidade de um valor de X pertencer ao espaço amostral S_X

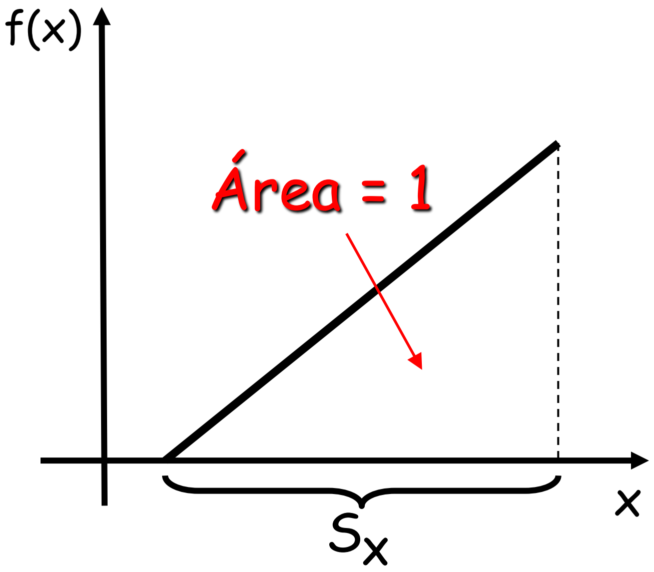
A integral da diferencial da função f(x) fornece a área sob a função no intervalo S_X

1. Função densidade de probabilidade

Definição: Seja X uma variável aleatória contínua e S_X o seu espaço amostral. Uma função **f** associada a variável X é denominada **função densidade de probabilidade (fdp)** se satisfizer duas condições:

1. $f(x) \geq 0, \ \forall \ x \in S_X$

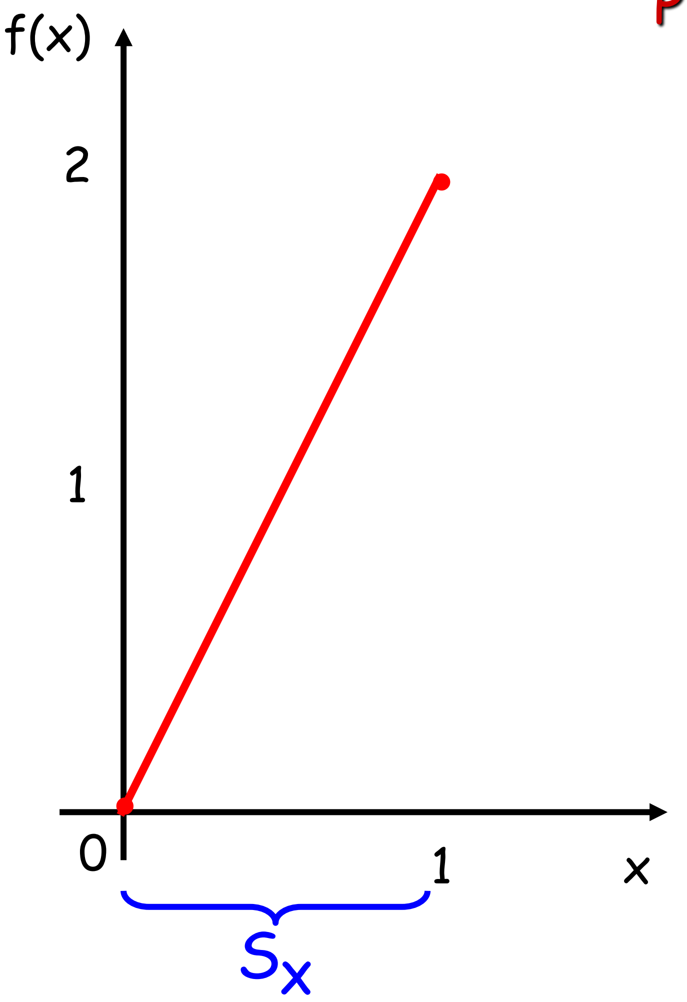
2. $\int_{S_X} f(x)dx = 1$



Fdp é toda a função que não assume valores negativos, ou seja, cujo gráfico esteja acima do eixo das abcissas, e cuja área compreendida entre a função e o eixo das abcissas seja igual a um.

Exemplo 1:

Seja a função $f(x) = 2x$, no intervalo $S_X = [0,1]$. Verifique se f(x) é uma função densidade de probabilidade.



Primeira condição: $f(x) \geq 0, \forall\, x \in S_X$

$$f(x) = 2x$$

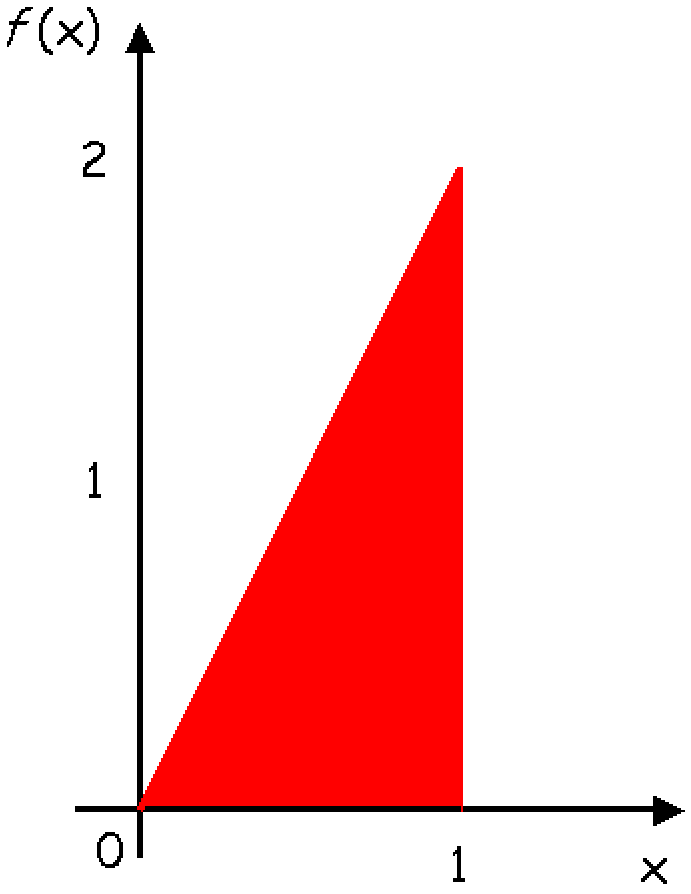
$$f(x=0) = 2 \times 0 = 0$$

$$f(x=1) = 2 \times 1 = 2$$

Todos os valores da função f(x) são não negativos no intervalo de 0 a 1.

Segunda condição: $\int_{S_X} f(x)dx = 1$

Segunda condição: $\int_{S_X} f(x)dx = 1$

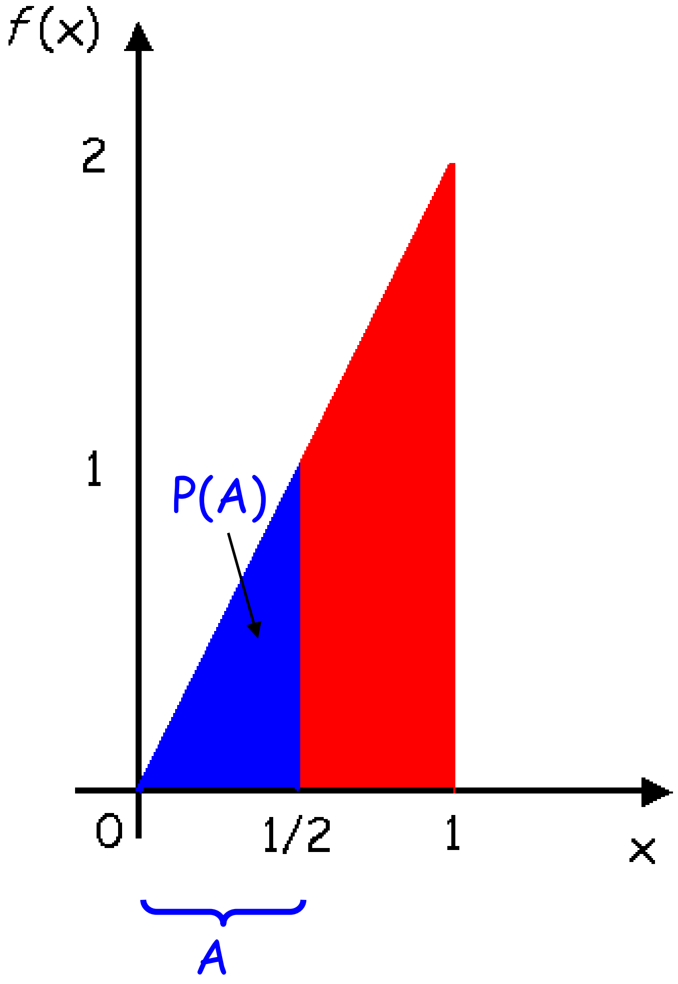


Área: $\frac{b \times h}{2} = \frac{1 \times 2}{2} = 1$

A área sob a função f(x) no intervalo S_X, que equivale a $P(X \in S_X)$, é igual a 1.

A função f(x) = 2x, no intervalo S_X =[0, 1] é uma função densidade de probabilidade!!

Seja $A=[0, 1/2]$, qual é a probabilidade de ocorrer o evento A?



Probabilidade = área

Área: $\dfrac{b \times h}{2} = \dfrac{1/2 \times 1}{2} = \dfrac{1}{4}$

$P(0 \leq X \leq 1/2) = 1/4$

Exemplo 2:

Seja a função $f(x) = 6x-6x^2$, no intervalo $S_X = [0,1]$. Verifique se f(x) é uma função densidade de probabilidade.

Primeira condição: $f(x) \geq 0, \forall\ x \in S_X$

Determina-se o valor de X que corresponde ao ponto crítico, derivando a função e igualando a primeira derivada a zero.

$$f'(x) = 6 - 12x$$

$$0 = 6 - 12x$$

$$x = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \quad \leftarrow \text{valor que corresponde ao ponto crítico}$$

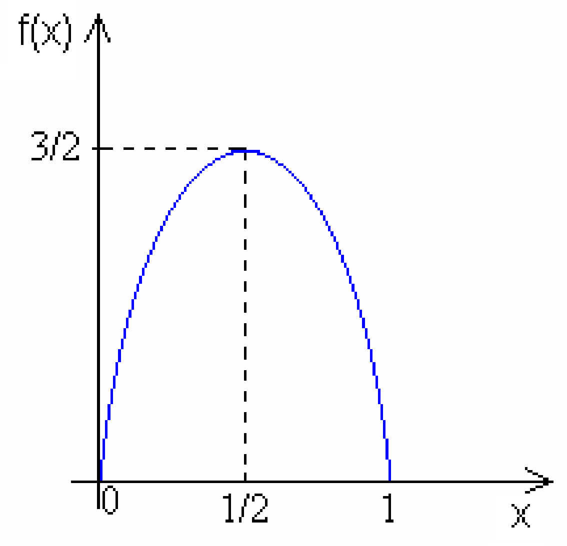
Derivando a função pela segunda vez, determina-se se o ponto crítico é de máximo ou de mínimo.

$$f'(x) = 6 - 12x$$

$$f''(x) = -12 \qquad \begin{cases} \text{se } f''(x) < 0 & \rightarrow \text{ponto de máximo} \\ \text{se } f''(x) > 0 & \rightarrow \text{ponto de mínimo} \end{cases}$$

A função $f(x) = 6x-6x^2$ tem ponto de máximo.

Traçar o gráfico:



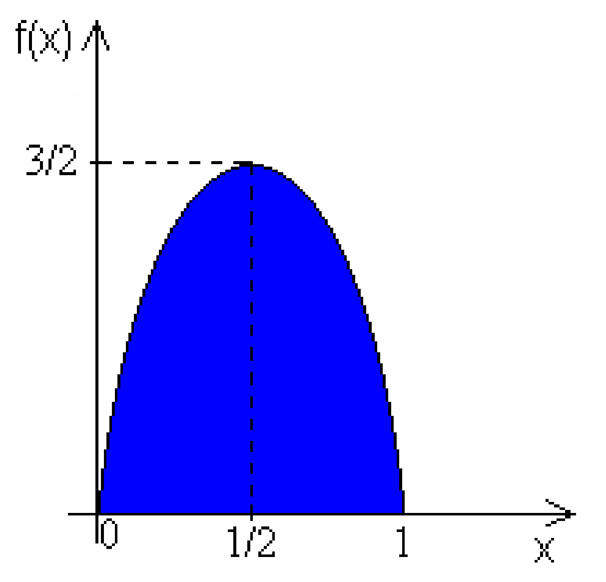
$f(0) = 6\times0-6\times0^2 = 0$

$f(1/2) = 6\times1/2-6\times(1/2)^2 = 3/2$

$f(1) = 6\times1-6\times1^2 = 0$

Todos os valores da função f(x) são não negativos no intervalo de 0 a 1.

Segunda condição: $\int_{S_X} f(x)dx = 1$



Para obter a área sob a parábola é necessário integrar!

Integral definida

Se f é uma função de x, então a sua integral definida é uma integral restrita a valores em um intervalo específico, por exemplo, $a \leq x \leq b$. O resultado é um número que depende apenas de a e b, e não de x.

Teorema Fundamental do Cálculo

Se f(x) é uma função contínua no intervalo [a, b] e temos uma função F(x), tal que F'(x) = f(x), então F(x) é chamada **primitiva** ou **anti-derivada** de f(x). Nesse caso,

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)$$

Entendendo a integral como processo inverso da derivada:

$$\int_a^b \underbrace{f(x)}_{\text{integranda}}dx = [\overbrace{F(x)}^{\text{primitiva}}]_a^b = F(b) - F(a)$$

A primitiva F(x) é a função cuja derivada é a integranda f(x).

$$F'(x) = f(x)$$

Entendendo a integral como processo inverso da derivada:

integração

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$$

derivação

Como encontrar a primitiva?

Integranda	Primitiva
$f(x) = x^n$	$F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$

Algumas propriedades da integral

1. A área num ponto a é igual a zero, ou seja

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

2. Se b é um ponto entre a e c, então

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

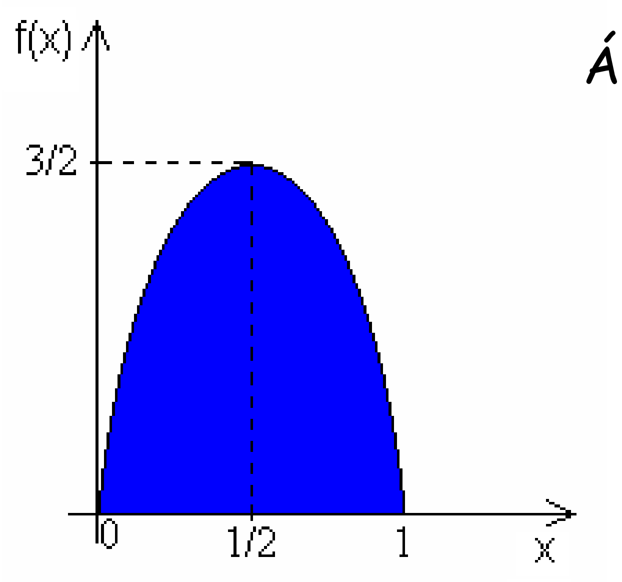
3. O fator constante k pode ser retirado do sinal de integração, ou seja

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$

4. A integral definida da soma (ou da diferença) de funções é a soma (ou a diferença) das integrais definidas, ou seja

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

Segunda condição: $\int_{S_X} f(x)dx = 1$



$$\text{Área}: \int_0^1 \left(6x - 6x^2\right)dx$$

$$= \int_0^1 6x dx - \int_0^1 6x^2 dx = 6\int_0^1 x dx - 6\int_0^1 x^2 dx$$

$$= 6\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - 6\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 6\left(\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) - 6\left(\frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right)$$

$$= 3 - 2 = 1$$

A área sob a função f(x) no intervalo S_X, que equivale a $P(X \in S_X)$, é igual a 1.

A função $f(x) = 6x-6x^2$, no intervalo $S_X = [0, 1]$, é uma função densidade de probabilidade!!

Profª. Clause Piana

Importante!!!

No caso de variáveis contínuas, as representações $a \leq x \leq b$, $a \leq x < b$, $a < x \leq b$ e $a < x < b$ são todas equivalentes, pois a probabilidade num ponto, por definição, é nula.

Seja o evento $A=\{x;\ x=a\}$. Então,

$$P(A) = \int_A f(x)dx = \int_a^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0$$

2. Função de distribuição ou probabilidade acumulada

Definição: Seja X uma variável aleatória contínua e S_X o seu espaço amostral. A função de distribuição, denotada por **F(x)** ou **P(X≤x)**, é a **função que associa a cada ponto $x \in S_X$ a probabilidade P(X≤x)**. Desta forma, tem-se

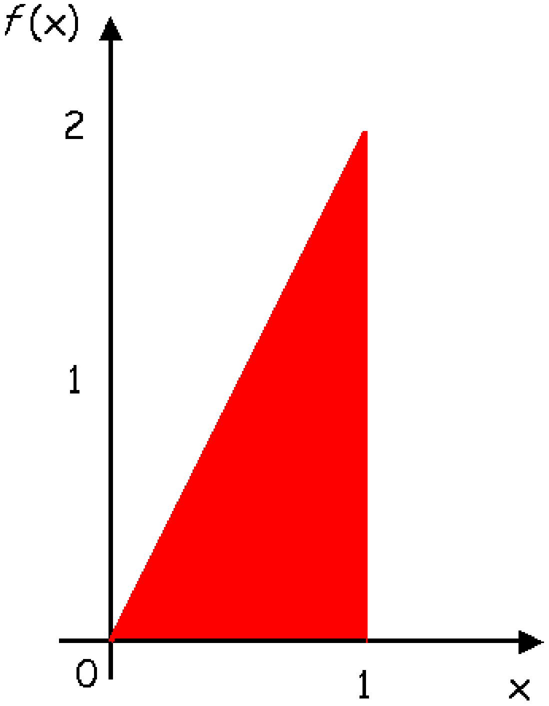
$$F(x) = P(X \leq x) = \int_a^x f(t)dt, \quad \text{para } S_X = [a, b]$$

Sendo $S_X = [a, b]$, então

$$F(a) = P(X \leq a) = 0$$

$$F(b) = P(X \leq b) = 1$$

Exemplo 1: $f(x) = 2x, \ S_X = [0,1]$

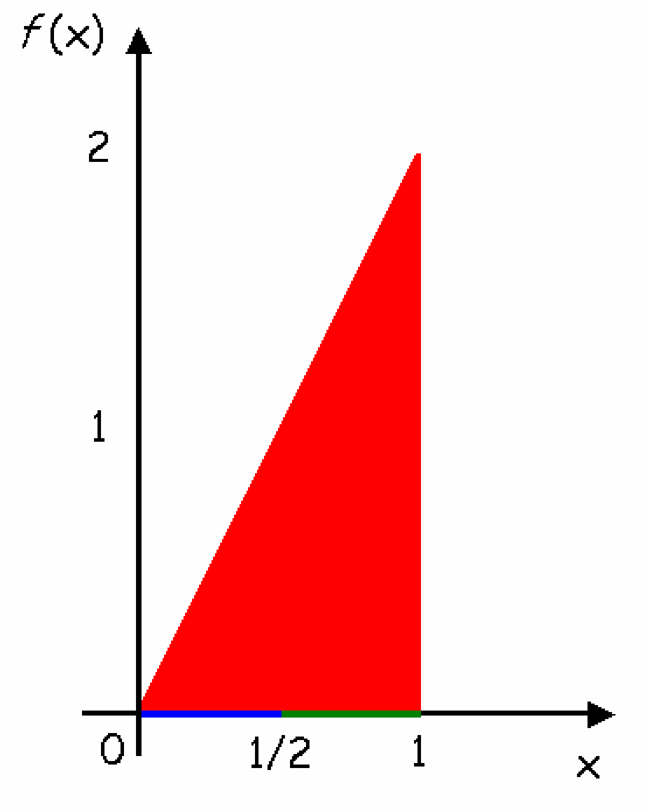


$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$
$$= \int_0^x 2t dt$$
$$= 2\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x$$
$$= x^2$$

$$F(x) = x^2$$

A função de probabilidade acumulada é a primitiva de f(x).

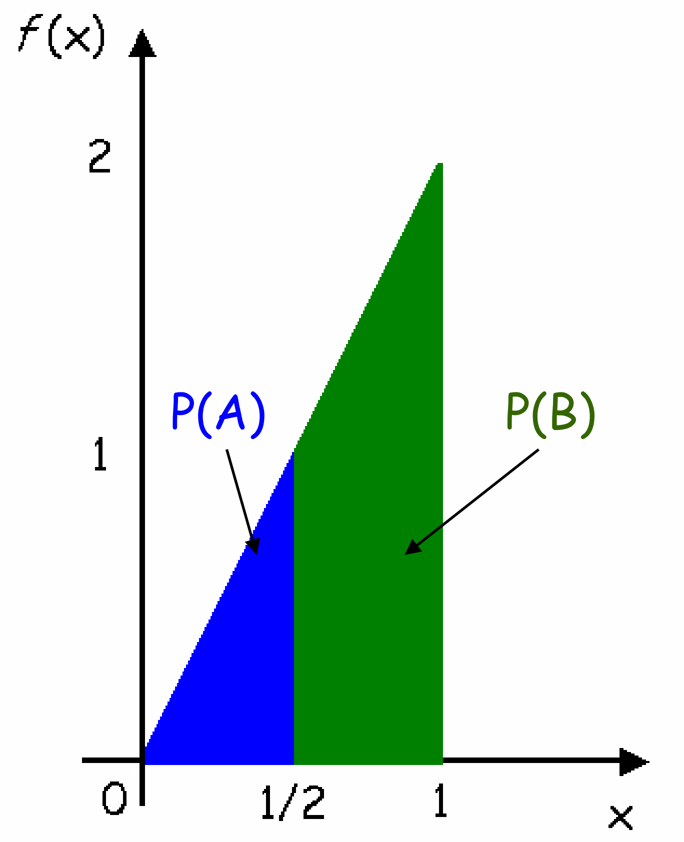
Exemplo 1: $f(x) = 2x, \; S_X = [0,1]$



$A=[0, 1/2]$

$B=[1/2, 1]$

Exemplo 1: $f(x) = 2x, \; S_X = [0,1]$



$A=[0, 1/2]$

$B=[1/2, 1]$

$$F(x) = x^2$$

$$F(1/2) = P(X \leq 1/2) = (1/2)^2 = 1/4$$

$P(A) = F(1/2)=1/4$

$P(B) = 1 - F(1/2)$

$= 1 - 1/4 = 3/4$

Gráfico da função densidade de probabilidade

$f(x) = 2x, \; S_X = [0,1]$

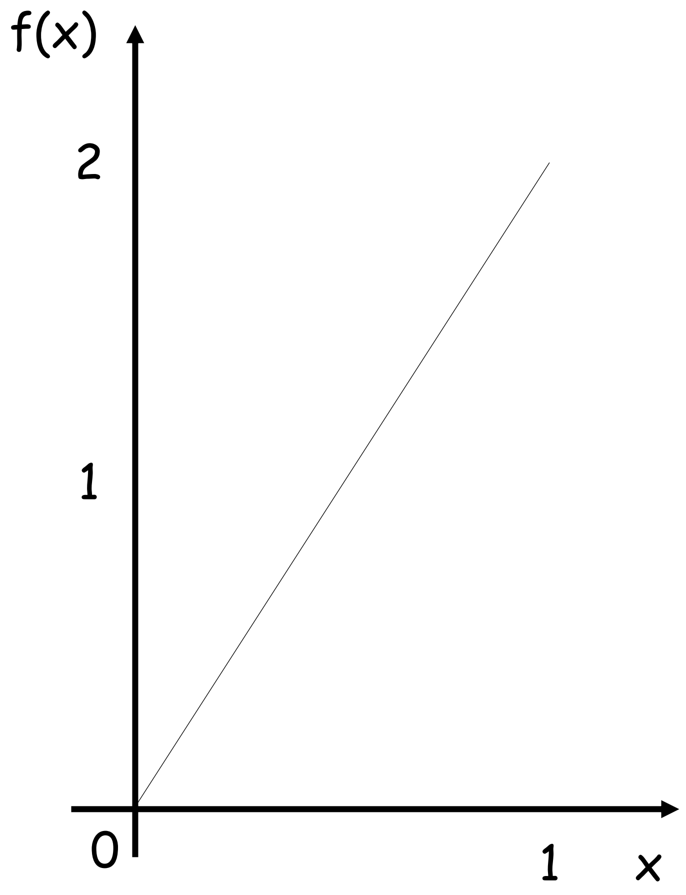
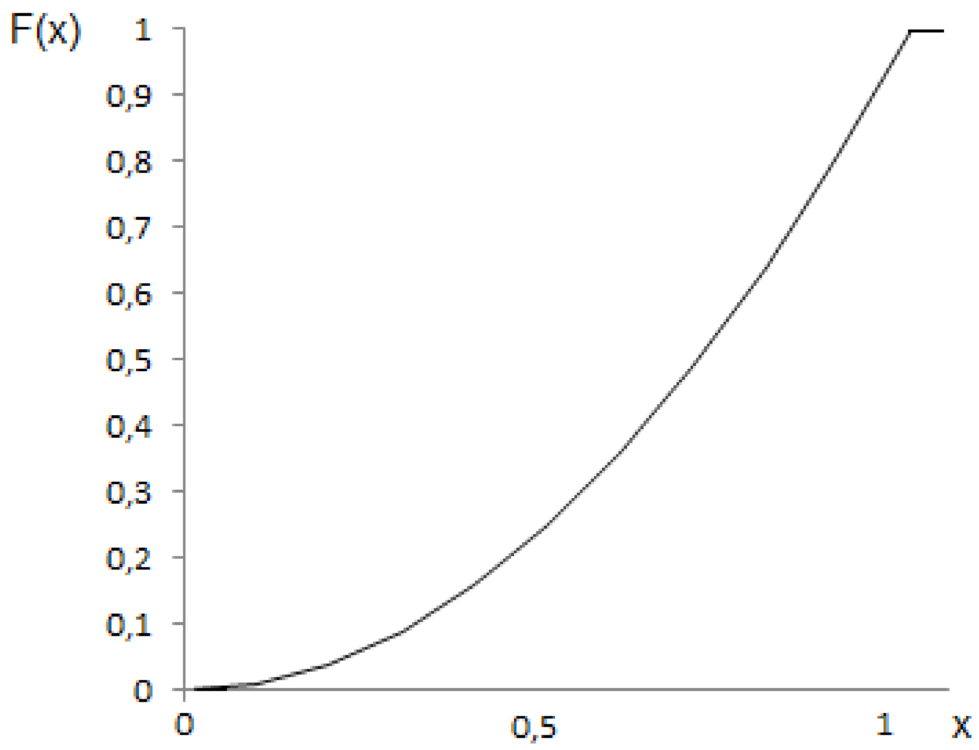


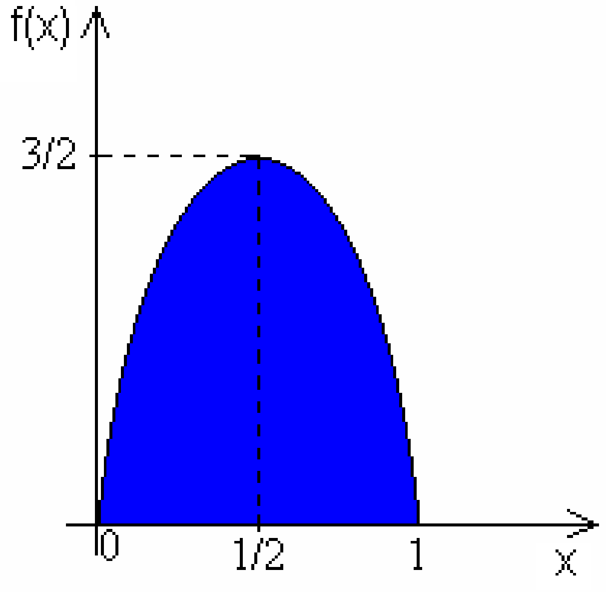
Gráfico da função de distribuição ou probabilidade acumulada

$$F(x) = x^2$$



A função F(x) expressa a probabilidade da variável X assumir um valor menor ou igual a x → P(X≤x)

Exemplo 2: $f(x) = 6x-6x^2$, $S_X = [0,1]$



$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

$$= \int_0^x \left(6t - 6t^2\right)dt$$

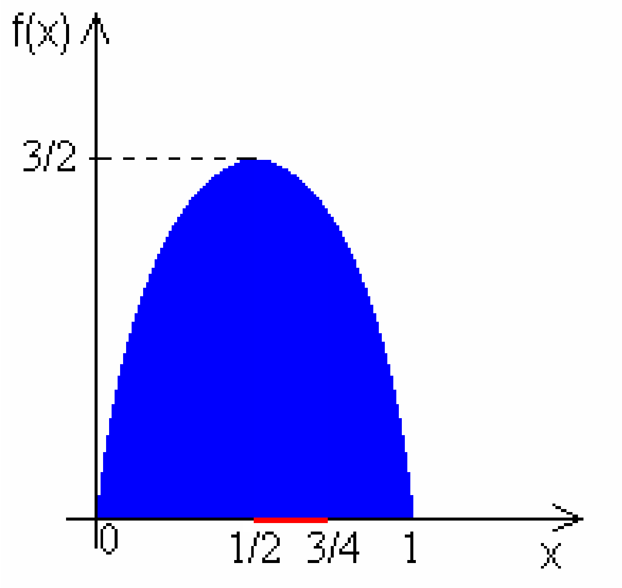
$$= \int_0^x 6tdt - \int_0^x 6t^2dt$$

$$= 6\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x - 6\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x$$

$$= 3x^2 - 2x^3$$

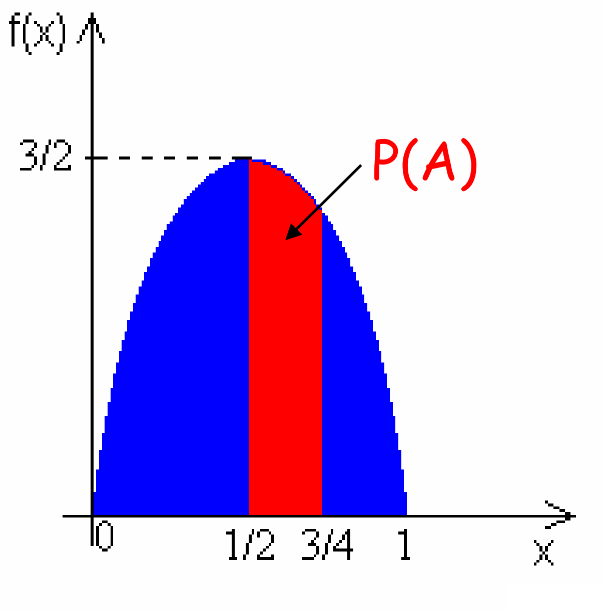
$$F(x) = 3x^2 - 2x^3$$

Exemplo 2: $f(x) = 6x-6x^2$, $S_X = [0,1]$



$A=[1/2, 3/4]$

Exemplo 2: $f(x) = 6x - 6x^2$, $S_X = [0,1]$



$$F(x) = 3x^2 - 2x^3$$

$$F(1/2) = 3(1/2)^2 - 2(1/2)^3$$
$$= 3/4 - 1/4 = 1/2$$

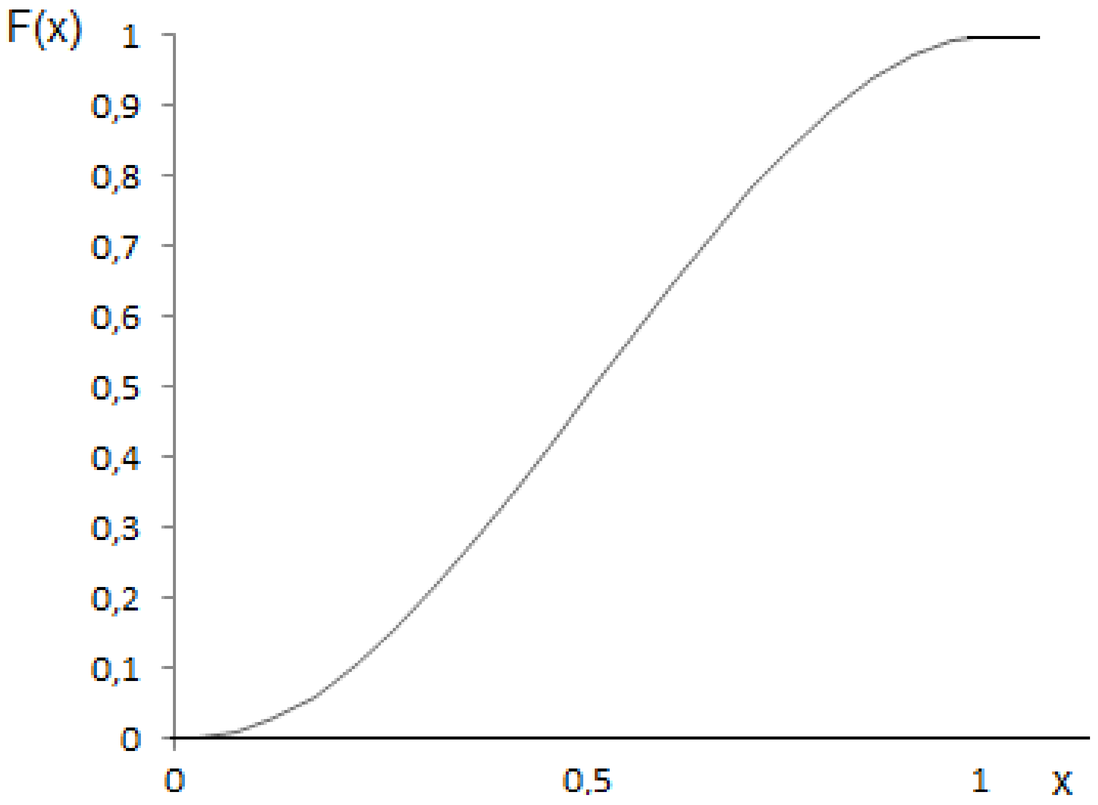
$$F(3/4) = 3(3/4)^2 - 2(3/4)^3$$
$$= 27/16 - 27/32$$
$$= \frac{54-27}{32} = \frac{27}{32}$$

A=[1/2, 3/4]

$$P(A) = F(3/4) - F(1/2)$$
$$= 27/32 - 1/2$$
$$= \frac{27-16}{32} = \frac{11}{32} = 0{,}344$$

Gráfico da função de probabilidade acumulada

$$F(x) = 3x^2 - 2x^3$$



A função F(x) expressa a probabilidade da variável X assumir um valor menor ou igual a x $\rightarrow$ $P(X \leq x)$

Momentos, assimetria e curtose

Momentos ordinários

- Primeiro momento:

$$\mu_1' = E(X) = \int_{S_X} x f(x) dx$$

- Segundo momento:

$$\mu_2' = E(X^2) = \int_{S_X} x^2 f(x) dx$$

- Terceiro momento:

$$\mu_3' = E(X^3) = \int_{S_X} x^3 f(x) dx$$

- Quarto momento:

$$\mu_4' = E(X^4) = \int_{S_X} x^4 f(x) dx$$

Momentos, assimetria e curtose

Momentos centrados na média

- Segundo momento:

$$\mu_2 = E(X-\mu)^2 = \int_{S_X} (x-\mu)^2 f(x)dx \qquad \text{(Fórmula de definição)}$$

$$\mu_2 = E(X^2) - \mu^2 = \left(\int_{S_X} x^2 f(x)dx \right) - \mu^2 \qquad \text{(Fórmula prática)}$$

- Terceiro momento:

$$\mu_3 = E(X-\mu)^3 = \int_{S_X} (x-\mu)^3 f(x)dx \qquad \text{(Fórmula de definição)}$$

$$\mu_3 = E(X^3) - 3\mu E(X^2) + 2\mu^3$$

$$= \left(\int_{S_X} x^3 f(x)dx \right) - 3\mu \left(\int_{S_X} x^2 f(x)dx \right) + 2\mu^3 \qquad \text{(Fórmula prática)}$$

- Quarto momento:

$$\mu_4 = E(X-\mu)^4 = \int_{S_X} (x-\mu)^4 f(x)dx \quad \text{(Fórmula de definição)}$$

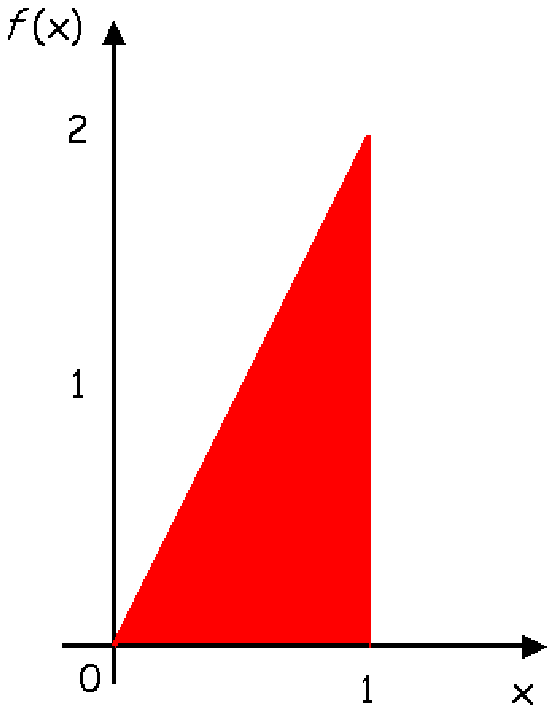
$$\mu_4 = E(X^4) - 4\mu E(X^3) + 6\mu^2 E(X^2) - 3\mu^4 \quad \text{(Fórmula prática)}$$

$$= \left[\int_{S_X} x^4 f(x)dx\right] - 4\mu\left[\int_{S_X} x^3 f(x)dx\right] + 6\mu^2\left[\int_{S_X} x^2 f(x)dx\right] - 3\mu^4$$

Coeficiente de assimetria: $a_3 = \dfrac{\mu_3}{\mu_2\sqrt{\mu_2}}$

Coeficiente de curtose: $a_4 = \dfrac{\mu_4}{\mu_2^2}$

Exemplo 1: $f(x) = 2x$, $S_X = [0,1]$



$$\mu_4 = E(X^4) - 4\mu E(X^3) + 6\mu^2 E(X^2) - 3\mu^4$$

$$= \left[\int_0^1 x^4 2x dx\right] - 4\mu\left[\int_0^1 x^3 2x dx\right] + 6\mu^2\left[\int_0^1 x^2 2x dx\right] - 3\mu^4$$

$$= \left[\int_0^1 2x^5 dx\right] - 4\mu\left[\int_0^1 2x^4 dx\right] + 6\mu^2\left[\int_0^1 2x^3 dx\right] - 3\mu^4$$

$$= 2\left[\frac{x^6}{6}\right]_0^1 - 4\mu 2\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 + 6\mu^2 2\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 - 3\mu^4$$

$$= \frac{1}{3} - 4 \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} + 6 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{2} - 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^4$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{16}{15} + \frac{4}{3} - \frac{16}{27} = \frac{45 - 144 + 180 - 64}{135} = 7{,}941$$

Exemplo 1: $f(x) = 2x, \; S_X = [0,1]$

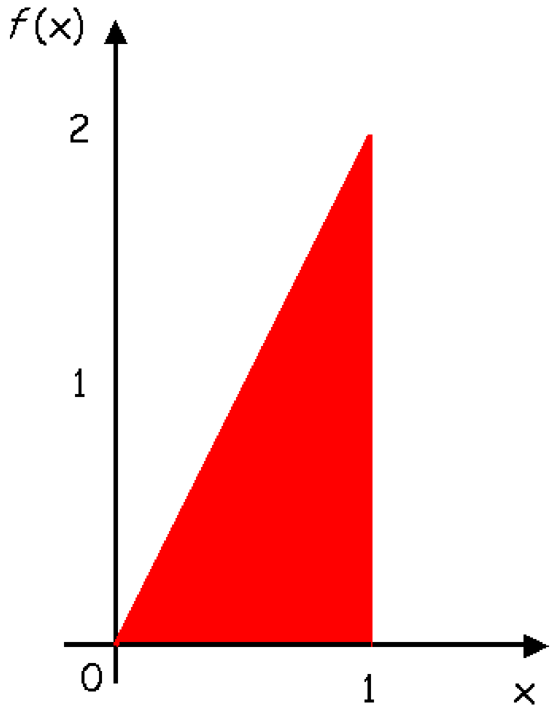
Momentos ordinários

$$\mu_2' = E\left(X^2\right) = \int_{S_X} x^2 f(x)dx = \int_0^1 x^2 2x dx = \int_0^1 2x^3 dx = 2\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\mu_3' = E\left(X^3\right) = \int_{S_X} x^3 f(x)dx = \int_0^1 x^3 2x dx = \int_0^1 2x^4 dx = 2\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{2}{5}$$

$$\mu_4' = E\left(X^4\right) = \int_{S_X} x^4 f(x)dx = \int_0^1 x^4 2x dx = \int_0^1 2x^5 dx = 2\left[\frac{x^6}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Exemplo 1: $f(x) = 2x$, $S_X = [0,1]$



$$\mu_3 = E(X^3) - 3\mu E(X^2) + 2\mu^3$$

$$= \frac{2}{5} - 3 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = -0{,}0074$$

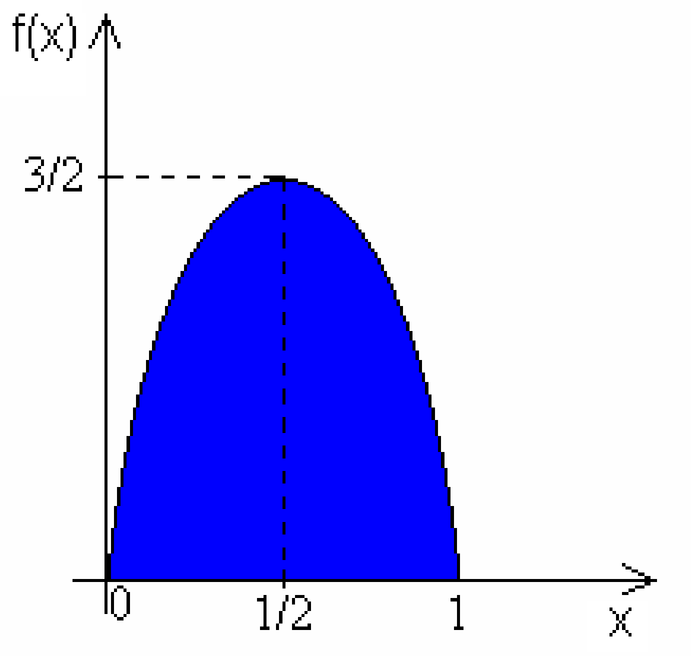
$$\mu_4 = E(X^4) - 4\mu E(X^3) + 6\mu^2 E(X^2) - 3\mu^4$$

$$= \frac{1}{3} - 4 \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} + 6 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{2} - 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^4 = 7{,}941$$

$$a_3 = \frac{\mu_3}{\mu_2\sqrt{\mu_2}} = \frac{-0{,}0074}{1/18\sqrt{1/18}} = \frac{-0{,}0074}{0{,}0131} = -0{,}565$$ $\rightarrow$ Assimétrica negativa

$$a_4 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{7{,}941}{(1/18)^2} = 40{,}8$$ $\rightarrow$ Leptocúrtica

Exemplo 2: $f(x) = 6x-6x^2$, $S_X = [0,1]$



$$
\begin{aligned}
\mu_3 &= E(X^3) - 3\mu E(X^2) + 2\mu^3 \\
&= \left[\int_0^1 x^3\left(6x-6x^2\right)dx\right] - 3\mu\left[\int_0^1 x^2\left(6x-6x^2\right)dx\right] + 2\mu^3 \\
&= \left[\int_0^1 \left(6x^4-6x^5\right)dx\right] - 3\mu\left[\int_0^1 \left(6x^3-6x^4\right)dx\right] + 2\mu^3 \\
&= \left[\int_0^1 6x^4dx - \int_0^1 6x^5dx\right] - 3\mu\left[\int_0^1 6x^3dx - \int_0^1 6x^4dx\right] + 2\mu^3 \\
&= \left\{6\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 - 6\left[\frac{x^6}{6}\right]_0^1\right\} - 3\mu\left\{6\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 - 6\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1\right\} + 2\mu^3 \\
&= \left(\frac{6}{5}-1\right) - 3\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{2}-\frac{6}{5}\right) + 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^3 \\
&= \frac{1}{5} - \frac{3}{2}\times\frac{3}{10} + 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{5} - \frac{9}{20} + \frac{1}{4} = \frac{4-9+5}{20} = 0
\end{aligned}
$$

Exemplo 2: $f(x) = 6x-6x^2$, $S_X = [0,1]$

$$\mu_4 = E(X^4) - 4\mu E(X^3) + 6\mu^2 E(X^2) - 3\mu^4$$

$$= \left[\int_0^1 x^4\left(6x-6x^2\right)dx\right] - 4\mu\left[\int_0^1 x^3\left(6x-6x^2\right)dx\right] + 6\mu^2\left[\int_0^1 x^2\left(6x-6x^2\right)dx\right] - 3\mu^4$$

$$= \left[\int_0^1 \left(6x^5-6x^6\right)dx\right] - 4\mu\left[\int_0^1 \left(6x^4-6x^5\right)dx\right] + 6\mu^2\left[\int_0^1 \left(6x^3-6x^4\right)dx\right] - 3\mu^4$$

$$= \left\{6\left[\frac{x^6}{6}\right]_0^1 - 6\left[\frac{x^7}{7}\right]_0^1\right\} - 4\mu\left\{6\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 - 6\left[\frac{x^6}{6}\right]_0^1\right\} + 6\mu^2\left\{6\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 - 6\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1\right\} - 3\mu^4$$

$$= \left(1-\frac{6}{7}\right) - 4\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{6}{5}-1\right) + 6\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(\frac{3}{2}-\frac{6}{5}\right) - 3\times\left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$= \frac{1}{7} - \frac{4}{2}\times\frac{1}{5} + \frac{3}{2}\times\frac{3}{10} - \frac{3}{16}$$

$$= \frac{1}{7} - \frac{4}{10} + \frac{9}{20} - \frac{3}{16} = \frac{80-224+252-105}{560} = \frac{3}{560} = 0{,}005357$$

Exemplo 2: $f(x) = 6x-6x^2$, $S_X = [0,1]$

Momentos ordinários

$$\mu'_2 = E(X^2) = \int_{S_X} x^2 f(x)dx = \int_0^1 x^2(6x-6x^2)dx = \int_0^1 (6x^3-6x^4)dx$$

$$= 6\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 - 6\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{3}{2} - \frac{6}{5} = \frac{3}{10}$$

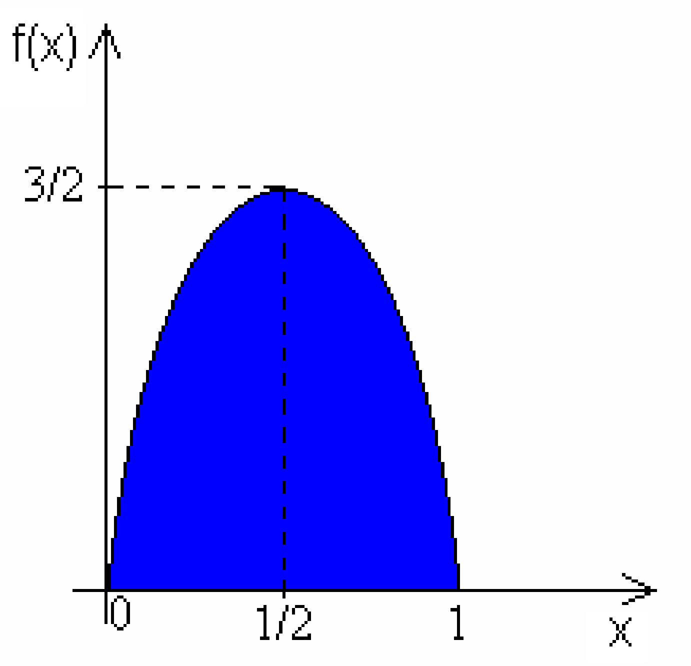
$$\mu'_3 = E(X^3) = \int_{S_X} x^3 f(x)dx = \int_0^1 x^3(6x-6x^2)dx = \int_0^1 (6x^4-6x^5)dx$$

$$= 6\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 - 6\left[\frac{x^6}{6}\right]_0^1 = \frac{6}{5} - 1 = \frac{2}{10}$$

$$\mu'_4 = E(X^4) = \int_{S_X} x^4 f(x)dx = \int_0^1 x^4(6x-6x^2)dx = \int_0^1 (6x^5-6x^6)dx$$

$$= 6\left[\frac{x^6}{6}\right]_0^1 - 6\left[\frac{x^7}{7}\right]_0^1 = 1 - \frac{6}{7} = \frac{1}{7}$$

Exemplo 2: $f(x) = 6x-6x^2$, $S_X = [0,1]$



$$\mu_3 = E(X^3) - 3\mu E(X^2) + 2\mu^3$$
$$= \frac{2}{10} - 3\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{10} + 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

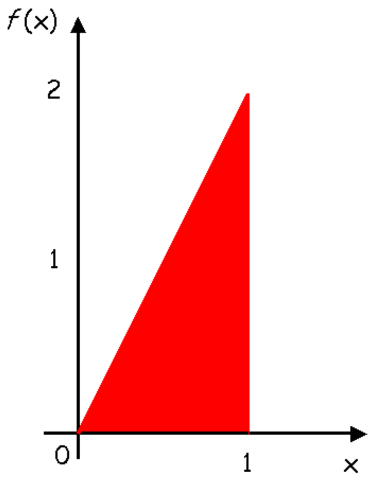
$$\mu_4 = E(X^4) - 4\mu E(X^3) + 6\mu^2 E(X^2) - 3\mu^4$$
$$= \frac{1}{7} - 4\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{10} + 6\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{3}{10} - 3\times\left(\frac{1}{2}\right)^4$$
$$= 0{,}005357$$

$$a_3 = \frac{\mu_3}{\mu_2\sqrt{\mu_2}} = \frac{0}{1/20\sqrt{1/20}} = 0 \quad \rightarrow \text{Simétrica}$$

$$a_4 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{0{,}005357}{(1/20)^2} = 2{,}14 \quad \rightarrow \text{Platicúrtica}$$

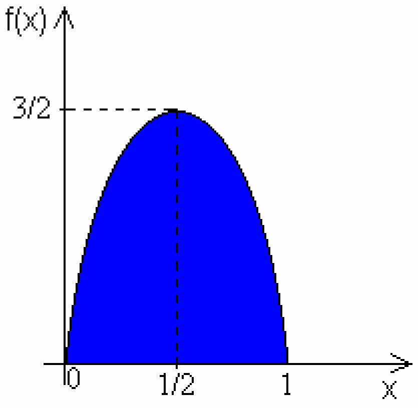
Descrição das variáveis aleatórias

$f(x) = 2x, \; S_X = [0,1]$



$$\begin{cases} F(x) = x^2 \\ \mu = \dfrac{2}{3} \qquad \sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\dfrac{1}{18}} = \dfrac{1}{\sqrt{18}} \\ a_3 = -0{,}565 \;\rightarrow \text{Assimétrica negativa} \\ a_4 = 40{,}8 \;\rightarrow \text{Leptocúrtica} \end{cases}$$

$f(x) = 6x - 6x^2, \; S_X = [0,1]$

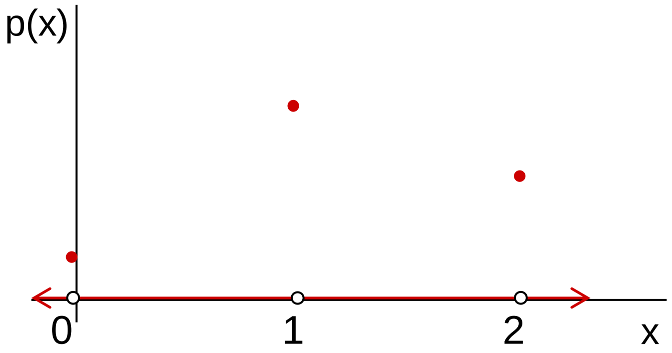


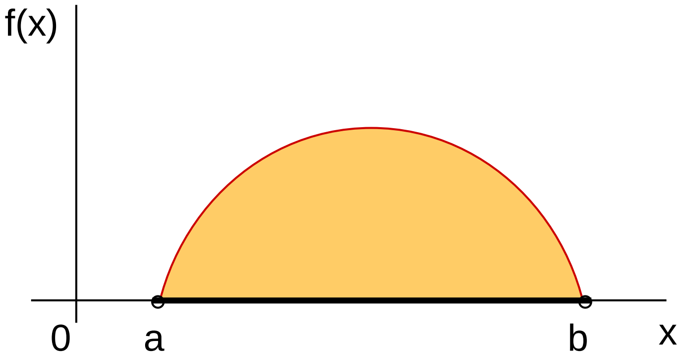
$$\begin{cases} F(x) = 3x^2 - 2x^3 \\ \mu = \dfrac{1}{2} \qquad \sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\dfrac{1}{20}} = \dfrac{1}{\sqrt{20}} \\ a_3 = 0 \;\rightarrow \text{Simétrica} \\ a_4 = 2{,}14 \;\rightarrow \text{Platicúrtica} \end{cases}$$

Variável aleatória discreta	Variável aleatória contínua
Espaço amostral enumerável (finito ou infinito)	Espaço amostral contínuo ou não enumerável (intervalo infinito)
X = número de bolas pretas	X = volume de chuva em uma região (mm)
$S_x=\{0, 1, 2\}$	$S_x=[0; 2000]$
$p(x) \rightarrow$ função de probabilidade	$f(x) \rightarrow$ função densidade de probabilidade
Condições: 1. $p(x) \geq 0, \forall\, x \in S_X$ 2. $\sum_{x \in S_X} p(x) = 1$	Condições: 1. $f(x) \geq 0, \forall\, x \in S_X$ 2. $\int_{S_X} f(x)dx = 1$
O valor da função p(x) expressa a probabilidade de ocorrência de cada valor de X	A área sob f(x) num intervalo [a, b] expressa a probabilidade de ocorrer um valor da variável X entre os limites a e b.
$p(x) = \dfrac{C_3^x\ C_2^{2-x}}{C_5^2}$, para $S_X = \{0, 1, 2\}$	$f(x) = \dfrac{3x}{2} - \dfrac{3x^2}{4}$, para $S_x=[0; 2000]$

Modelo matemático

Variável aleatória discreta	Variável aleatória contínua
Espaço amostral enumerável (finito ou infinito)	Espaço amostral contínuo ou não enumerável (intervalo infinito)
X = número de bolas pretas	X = volume de chuva em uma região (mm)
$S_x=\{0, 1, 2\}$	$S_x=[0; 2000]$
	$f(x) \rightarrow$ função densidade de probabilidade
Condições: 1. $p(x) \geq 0, \forall\ x \in S_X$; 2. $\sum_{x \in S_X} p(x) = 1$	Condições: 1. $f(x) \geq 0, \forall\ x \in S_X$; 2. $\int_{S_X} f(x)dx = 1$
O valor da função p(x) expressa a probabilidade de ocorrência de cada valor de X	A área sob f(x) num intervalo [a, b] expressa a probabilidade de ocorrer um valor da variável X entre os limites a e b.





Profª. Clause Piana

Variável aleatória discreta	Variável aleatória contínua
Espaço amostral enumerável (finito ou infinito)	Espaço amostral contínuo ou não enumerável (intervalo infinito)
X = número de bolas pretas	X = volume de chuva em uma região (mm)
$S_x=\{0, 1, 2\}$	$S_x=[0; 2000]$
	$f(x) \rightarrow$ função densidade de probabilidade
Condições: 1. $p(x) \geq 0, \forall\ x \in S_X$ 2. $\sum_{x \in S_X} p(x) = 1$	Condições: 1. $f(x) \geq 0, \forall\ x \in S_X$ 2. $\int_{S_X} f(x)dx = 1$
O valor da função p(x) expressa a probabilidade de ocorrência de cada valor de X	A área sob f(x) num intervalo [a, b] expressa a probabilidade de ocorrer um valor da variável X entre os limites a e b.

A função F(x) expressa a probabilidade da variável X assumir um valor menor ou igual a $x \rightarrow P(X \leq x)$

Medidas descritivas	Variável aleatória discreta	Variável aleatória contínua
Média	$\mu = E(X) = \sum_{x \in S_X} x\,p(x)$	$\mu = E(X) = \int_{S_X} x\,f(x)dx$
Variância	$\sigma^2 = E(X-\mu)^2 = \sum_{x \in S_X} (x-\mu)^2\,p(x)$	$\sigma^2 = E(X-\mu)^2 = \int_{S_X} (x-\mu)^2 f(x)dx$
Desvio padrão	$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$	$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$
Momentos	$\mu_r = E(X-\mu)^r = \sum_{x \in S_X} (x-\mu)^r\,p(x)$	$\mu_r = E(X-\mu)^r = \int_{S_X} (x-\mu)^r f(x)dx$
Assimetria	$a_3 = \dfrac{\mu_3}{\mu_2\sqrt{\mu_2}}$	$a_3 = \dfrac{\mu_3}{\mu_2\sqrt{\mu_2}}$
Curtose	$a_4 = \dfrac{\mu_4}{\mu_2^2}$	$a_4 = \dfrac{\mu_4}{\mu_2^2}$

Bibliografia

BUSSAB, W.O.; MORETTIN, P.A. **Estatística Básica**. São Paulo: Saraiva. 2006. 526p.

FERREIRA, D.F. **Estatística Básica**. Lavras: Editora UFLA, 2005, 664p.

FREUND, J.E., SIMON, G.A. **Estatística Aplicada. Economia, Administração e Contabilidade**. 9.ed., Porto Alegre: Bookman, 2000. 404p.

MEYER, P. L. **Probabilidade: aplicações à estatística**. Rio de Janeiro: LTC, 1976.

MLODINOW, L. **O andar do bêbado. Como o acaso determina nossas vidas**. Rio de Janeiro: Editora Zahar, 2009, 264p.

SILVEIRA JÚNIOR, P., MACHADO, A.A., ZONTA, E.P., SILVA, J.B. da **Curso de Estatística**. v.2, Pelotas: Universidade Federal de Pelotas, 1992. 234p.

Sistema Galileu de Educação Estatística. Disponível em: http://www.galileu.esalq.usp.br/topico.html