UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS
CENTRO DE DESENVOLVIMENTO TECNOLÓGICO

MÉTODOS ESTATÍSTICOS

Profª. Clause Fátima de Brum Piana

MÉTODOS ESTATÍSTICOS

Conteúdo programático

1. Introdução
2. Correlação linear
3. Análise de regressão linear simples
4. Análise de regressão múltipla (2 variáveis)
5. Análise de dados de classificação simples e dupla

Tópico 2. Correlação linear

2.1 Medidas de associação: covariância e coeficiente de correlação linear

2.2 Estimação do coeficiente de correlação linear de Pearson

2.3 Inferências sobre o coeficiente de correlação linear de Pearson

2.4 Coeficiente de correlação de postos de Spearman

2.1 Associação entre variáveis

Duas ou mais variáveis

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & X \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \bar{x} & & s_X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] & Y \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \bar{y} & & s_Y \end{tikzcd}$$

→ Se elas não se relacionam, podem ser estudadas individualmente

→ Se elas estão correlacionadas, devem ser estudadas conjuntamente

2.1 Associação entre variáveis

Duas ou mais variáveis

Objetivos:

→ analisar o **comportamento conjunto** dessas variáveis

→ identificar se existe algum tipo de **associação entre elas**

- valores altos (ou baixos) de uma variável ocorrem junto com valores altos (ou baixos) da outra variável?

Exemplos:

✓ relação entre a altura dos pais e a altura dos filhos

✓ relação entre peso de uma pessoa e sua pressão arterial

✓ relação entre peso da carga de caminhões e seu consumo de combustível

2.1 Associação entre variáveis

- Na engenharia de recursos hídricos também há interesse em conhecer o grau de associação entre duas ou mais variáveis, como por exemplo:
  - ✓ relação entre as vazões médias anuais e as áreas de drenagem;
  - ✓ relação entre as alturas anuais de precipitação e as altitudes dos postos pluviométricos;
  - ✓ relação entre as intensidades, as durações e as frequências das precipitações intensas.

- O primeiro objetivo é o de analisar o comportamento simultâneo das variáveis, tomadas duas a duas, verificando se a variação positiva (ou negativa) de uma delas está associada a uma variação positiva (ou negativa) da outra, ou se não há nenhuma forma de associação entre elas.

Diagrama de dispersão bivariada

Primeira abordagem exploratória → diagrama de dispersão de pontos
Permite visualizar o grau de associação e a tendência de variação conjunta

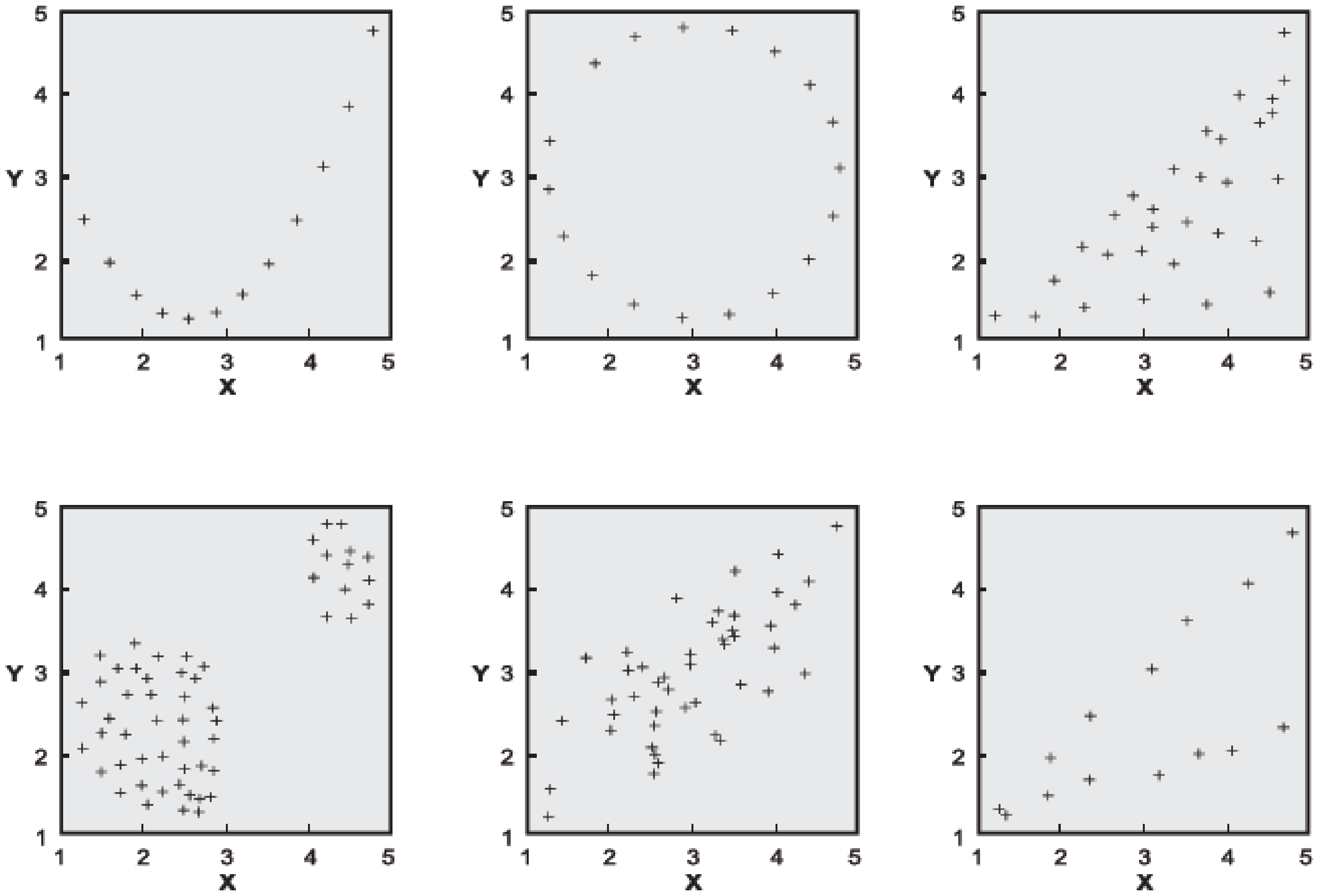


Figura 1. Exemplos de variação conjunta entre duas variáveis.
Fonte: Naghettini e Pinto (2007).

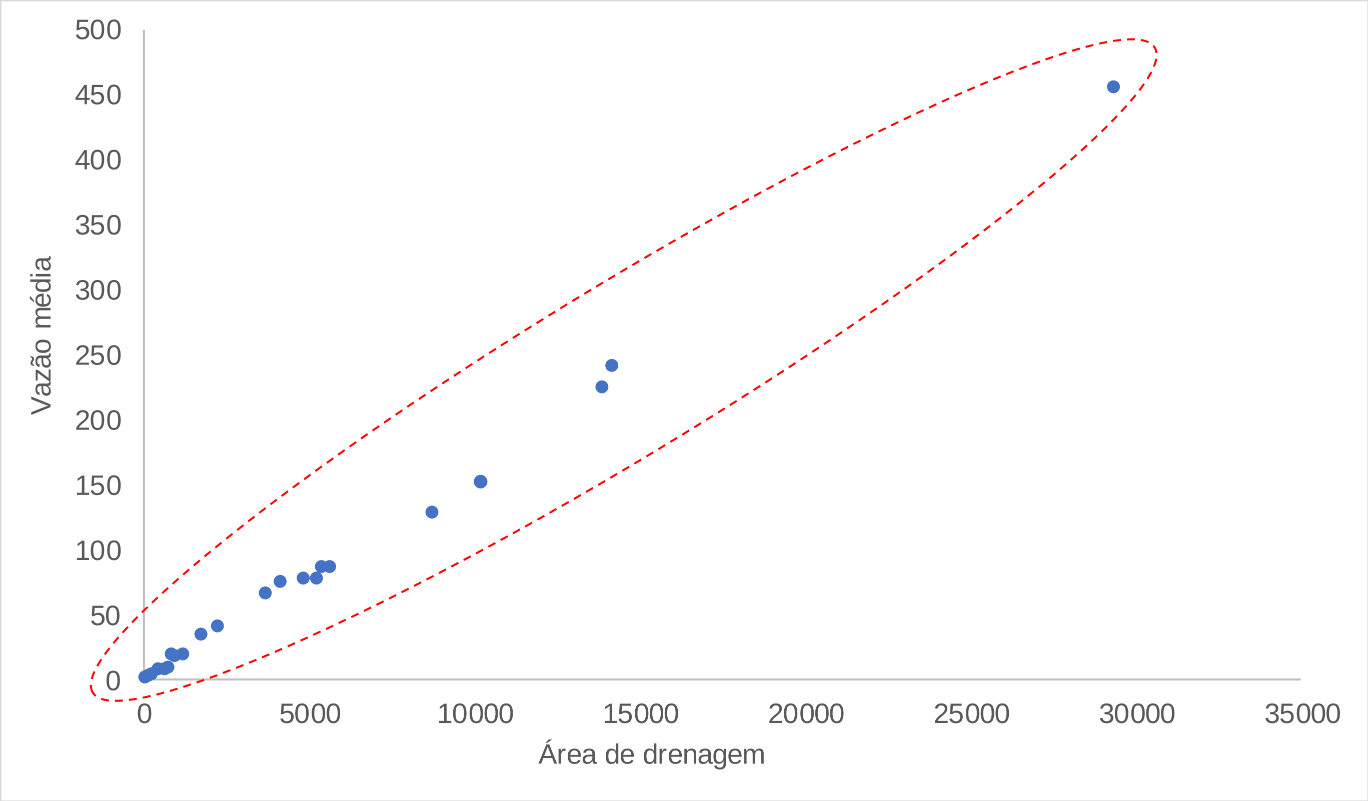
Exemplo:

Um engenheiro está estudando a bacia do rio São Francisco. Um dos objetivos da pesquisa é verificar se existe correlação entre a área de drenagem e a vazão média de longo termo, observadas em 22 estações fluviométricas do alto rio. Os valores observados foram os seguintes:

Tabela 1. Área de drenagem e vazão média (Q) de 22 estações fluviométricas da bacia do alto rio São Francisco.

Estação	Área	Q (m^3/s)	Estação	Área	Q (m^3/s)
1	83,9	1,32	12	3727,4	65,30
2	188,3	2,29	13	4142,9	75,00
3	279,4	4,24	14	4874,2	77,20
4	481,3	7,34	15	5235,0	77,50
5	675,7	8,17	16	5414,2	86,80
6	769,7	8,49	17	5680,4	85,70
7	875,8	18,90	18	8734,0	128,00
8	964,2	18,30	19	10191,5	152,00
9	1206,9	19,30	20	13881,8	224,00
10	1743,5	34,20	21	14180,1	241,00
11	2242,4	40,90	22	29366,2	455,00

Diagrama de dispersão



O diagrama de dispersão fornece uma idéia do tipo de relacionamento entre as duas variáveis que, em geral, são denotadas por X e Y

→ à medida que aumenta a área de drenagem observa-se um aumento da vazão média

2.1 Medidas de associação

- A forma de medir a intensidade da relação entre variáveis depende do tipo de variáveis e da escala em que elas são medidas.

- Existem muitos tipos de correlação: simples, múltipla, parcial, canônica, etc.

- Será tratado apenas do tipo mais comum: a correlação linear simples

- A intensidade da associação linear simples entre duas variáveis numéricas contínuas (X e Y) pode ser mensurada por meio de duas medidas:

    - ✓ Covariância
    - ✓ Coeficiente de correlação linear de Pearson

2.1.1 Covariância

- É uma medida do grau de correlação linear entre duas variáveis → expressa a variação conjunta das variáveis

- É denotada por s_{xy} e definida como a **média dos produtos dos desvios de X pelos desvios de Y**

$$s_{xy} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n-1}$$

Fórmula de definição

- Pode assumir valores positivos (indicando relação positiva entre X e Y) ou negativos (indicando relação negativa)

- Sua desvantagem é a **dificuldade de interpretação**, pois seus valores podem variar de $-\infty$ a $+\infty$.

2.1.1 Covariância

Soma dos produtos dos desvios de X e Y

$$s_{xy} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n-1} = \frac{\sum x_i y_i - n\bar{x}\,\bar{y}}{n-1} = \frac{SPXY}{n-1}$$

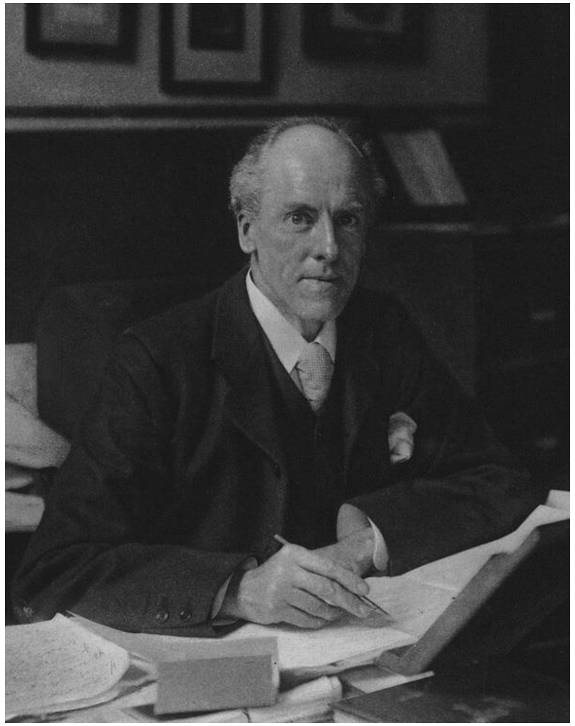
Fórmula de definição

Fórmula prática

Demonstração

$$\begin{aligned}
\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) &= \sum \left[x_i (y_i - \bar{y}) - \bar{x}(y_i - \bar{y}) \right] \\
&= \sum x_i (y_i - \bar{y}) - \sum \bar{x}(y_i - \bar{y}) \\
&= \sum (x_i y_i - x_i \bar{y}) - \bar{x}\sum (y_i - \bar{y}), \quad \text{sendo } \sum (y_i - \bar{y}) = 0 \\
&= \sum x_i y_i - \sum x_i \bar{y} \\
&= \sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}
\end{aligned}$$

2.1.2 Coeficiente de Correlação Linear de Pearson

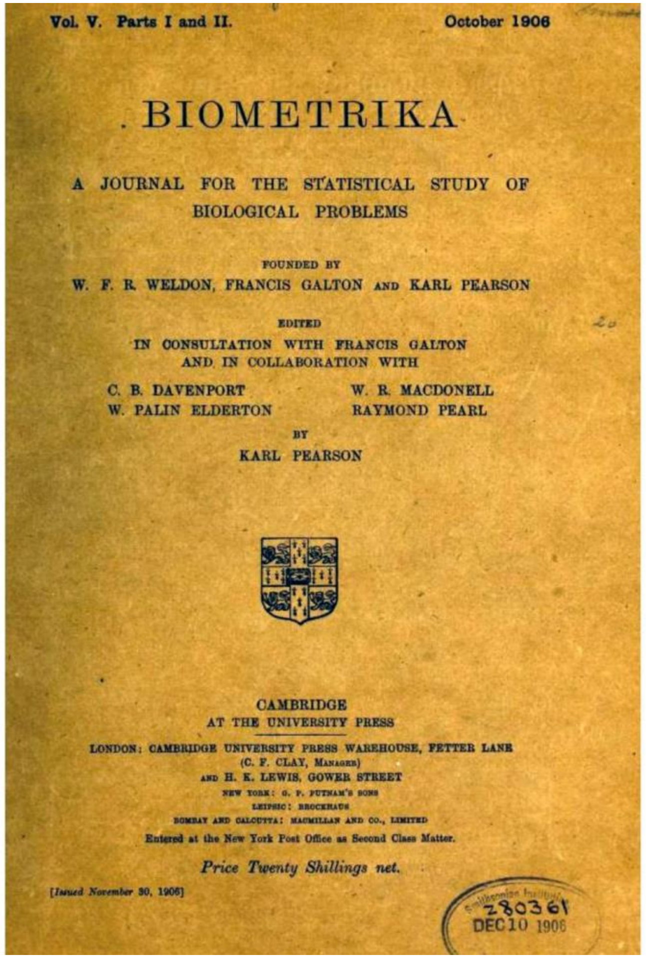


Karl Pearson
(1857-1936)

O nome deste coeficiente é uma homenagem ao trabalho pioneiro do matemático britânico Karl Pearson, que desenvolveu um grande número de métodos estatísticos e em 1901 fundou a revista *Biometrika*.

Trouxe contribuições extremamente importantes para o desenvolvimento da teoria da análise de regressão e de correlação, bem como do teste de qui-quadrado.

Foi um dos fundadores da Estatística moderna.



Vol. V. Parts I and II. October 1906

BIOMETRIKA

A JOURNAL FOR THE STATISTICAL STUDY OF BIOLOGICAL PROBLEMS

FOUNDED BY
W. F. R. WELDON, FRANCIS GALTON AND KARL PEARSON

EDITED
IN CONSULTATION WITH FRANCIS GALTON
AND IN COLLABORATION WITH
C. B. DAVENPORT W. R. MACDONELL
W. PALIN ELDERTON RAYMOND PEARL
BY
KARL PEARSON

CAMBRIDGE
AT THE UNIVERSITY PRESS
LONDON: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS WAREHOUSE, FETTER LANE
(C. F. CLAY, MANAGER)
AND H. K. LEWIS, GOWER STREET
NEW YORK: G. P. PUTNAM'S SONS
LEIPSIC: BROCKHAUS
BOMBAY AND CALCUTTA: MACMILLAN AND CO., LIMITED
Entered at the New York Post Office as Second Class Matter.
Price Twenty Shillings net.
[Issued November 30, 1906]

2.1.2 Coeficiente de Correlação Linear de Pearson

- É uma medida da correlação linear entre duas variáveis
- É preferível à covariância por ser **mais precisa** e ser **independente das unidades de medida** de X e de Y, variando de -1 a 1
- É denotado por **r** ou **r_{xy}** e é definido pela seguinte expressão:

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = \frac{\dfrac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n-1}}{\sqrt{\dfrac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}\sqrt{\dfrac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n-1}}}$$

Fórmula de definição

- Esta expressão **não é muito prática** para cálculo manual.

⇨ É possível simplificar a expressão matemática de r, obtendo outra mais conveniente para o cálculo manual

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = \frac{\dfrac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{n-1}}{\sqrt{\dfrac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1}}\sqrt{\dfrac{\sum(y_i-\bar{y})^2}{n-1}}} = \frac{\dfrac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{n-1}}{\dfrac{\sqrt{\sum(x_i-\bar{x})^2}}{\sqrt{n-1}} \times \dfrac{\sqrt{\sum(y_i-\bar{y})^2}}{\sqrt{n-1}}} = \frac{\dfrac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{n-1}}{\dfrac{\sqrt{\sum(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum(y_i-\bar{y})^2}}{n-1}}$$

$$r = \frac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum(y_i-\bar{y})^2}}$$

SPXY → Soma dos produtos dos desvios de X e Y

SQX → Soma dos quadrados dos desvios de X

SQY → Soma dos quadrados dos desvios de Y

➪ É possível simplificar a expressão matemática de r, obtendo outra mais conveniente para o cálculo manual

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = \frac{\dfrac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{n-1}}{\sqrt{\dfrac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1}}\sqrt{\dfrac{\sum(y_i-\bar{y})^2}{n-1}}} = \frac{\dfrac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{n-1}}{\dfrac{\sqrt{\sum(x_i-\bar{x})^2}}{\sqrt{n-1}} \times \dfrac{\sqrt{\sum(y_i-\bar{y})^2}}{\sqrt{n-1}}} = \frac{\dfrac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{n-1}}{\dfrac{\sqrt{\sum(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum(y_i-\bar{y})^2}}{n-1}}$$

$$r = \frac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum(y_i-\bar{y})^2}} = \boxed{\frac{\sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\left(\sum x_i^2 - n\bar{x}^2\right)\left(\sum y_i^2 - n\bar{y}^2\right)}}} = \boxed{\frac{SPXY}{\sqrt{SQX.SQY}}}$$

$$\left.\begin{aligned} SPXY &= \sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}) = \sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y} \\ SQX &= \sum(x_i-\bar{x})^2 = \sum x_i^2 - n\bar{x}^2 \\ SQY &= \sum(y_i-\bar{y})^2 = \sum y_i^2 - n\bar{y}^2 \end{aligned}\right\} \boxed{\text{Fórmulas práticas}}$$

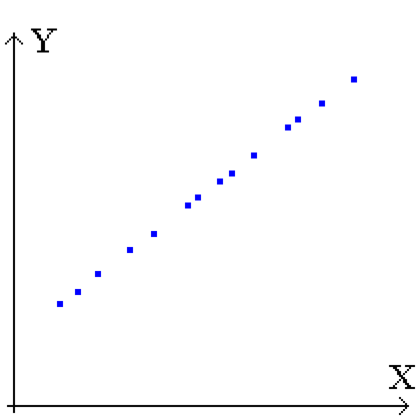
Interpretação do coeficiente de correlação

- Apesar de ser um valor adimensional, ele não é uma taxa e, portanto, o resultado não deve ser expresso em percentagem.
- É uma medida da relação linear entre as duas variáveis e não tem sentido quando a relação é não linear.

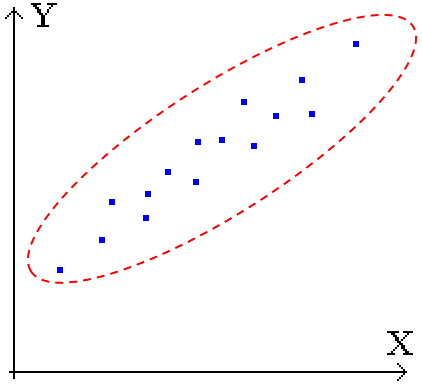
A interpretação dos valores é a seguinte:

- valores próximos de +1 indicam uma correlação positiva e forte entre x e y
- valores próximos de -1 indicam uma correlação negativa e forte entre x e y
- valores próximos de 0 indicam uma correlação fraca entre x e y

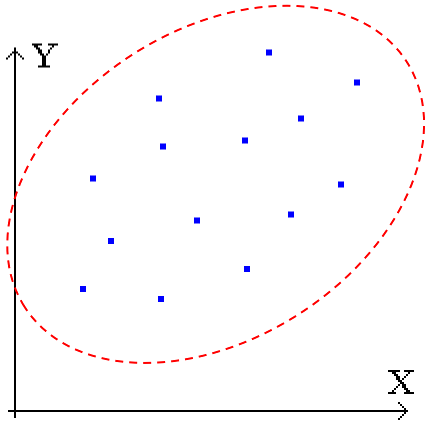
Interpretação do coeficiente de correlação



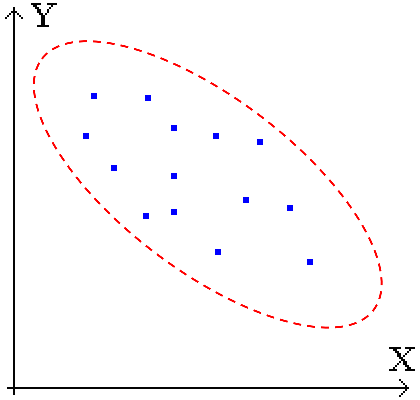
Positiva perfeita
r = 1



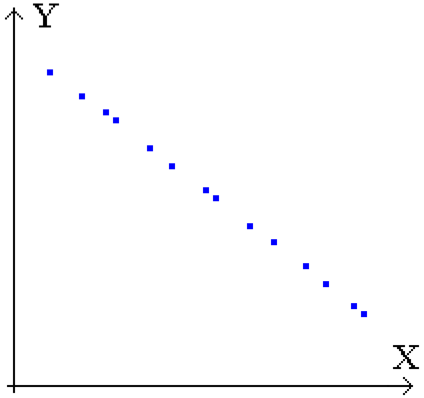
Positiva elevada
r = 0,8



Positiva baixa
r = 0,1



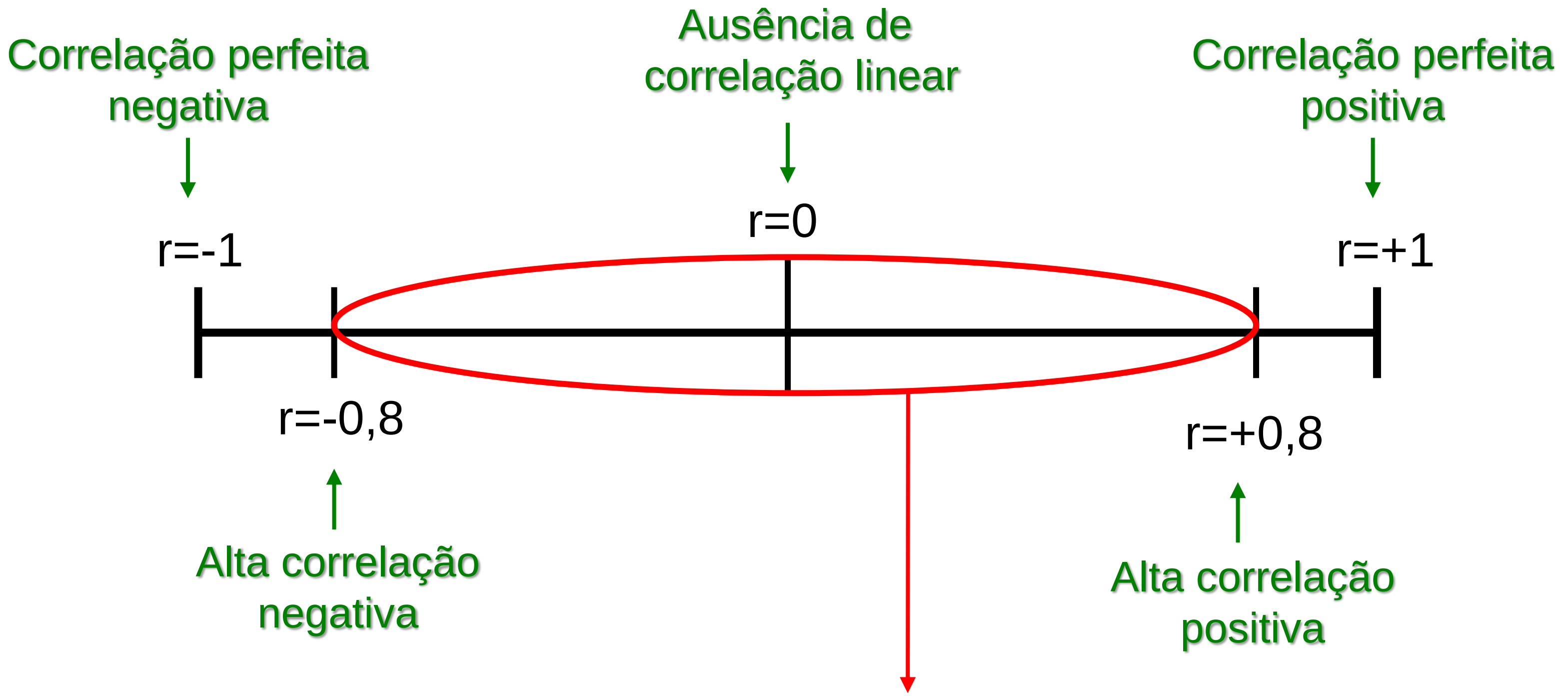
Negativa média
r = -0,5



Negativa perfeita
r = -1

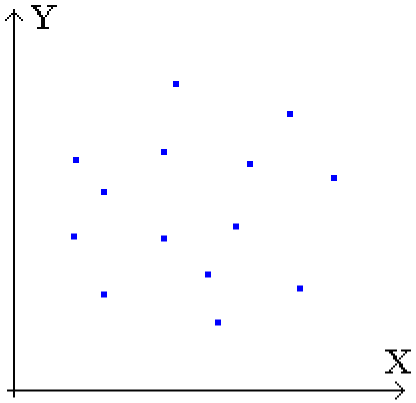
Interpretação do coeficiente de correlação linear

Na prática, considera-se como alta correlação entre as variáveis X e Y, quando $|r| \geq 0{,}8$.

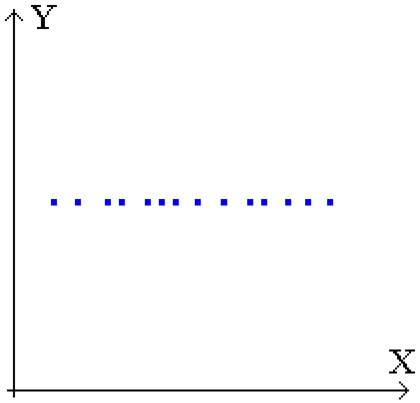


Valores de r dentro da elipse indicam correlação linear de moderada a fraca, na medida em que se aproximam de zero

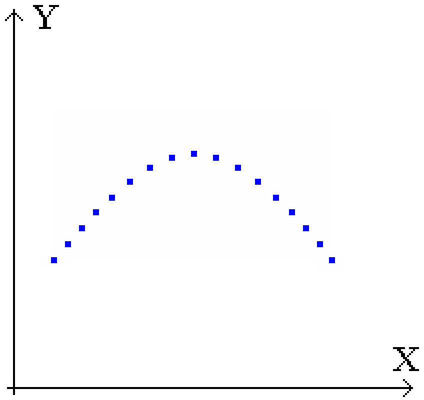
Interpretação do coeficiente de correlação linear



r = 0



r = 0



r = 0

Não tem sentido quando a relação é não linear

Importante:

⇨ Coeficiente de correlação linear igual a zero não indica que as variáveis são independentes, mas que não existe relação linear entre elas.

⇨ O coeficiente de correlação não indica, necessariamente, relação de causa e efeito entre as variáveis consideradas e, sim, que as duas variáveis variam conjuntamente.

Correlação e causalidade

- O coeficiente de correlação **não mede** a relação de **causa e efeito** entre as variáveis, ainda que essa relação possa estar presente.

  Exemplo: Existe forte correlação positiva entre as vendas anuais de chicletes e a taxa de criminalidade nos EUA.

- Mas não podemos concluir que há relação de causa e efeito entre as variáveis e que proibir a venda de chicletes reduziria a taxa de criminalidade.

- O que se observa é que as duas variáveis são dependentes do **tamanho da população**, e é essa relação mútua com a terceira variável (tamanho da população) que produz a correlação forte e positiva entre a venda de chicletes e a incidência de crimes nos EUA.

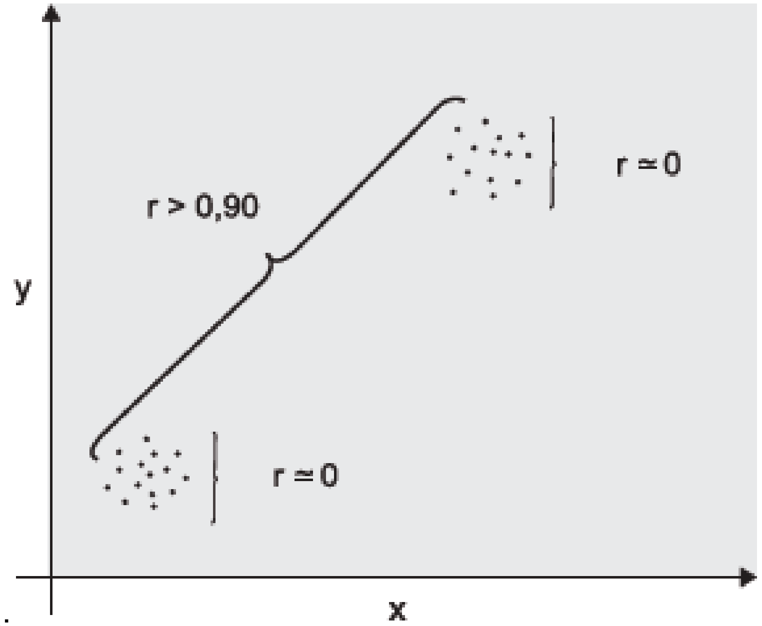
Interpretação do coeficiente de correlação linear

➯ Outro cuidado que se deve tomar na análise de duas variáveis é com a ocorrência de correlações espúrias, ou seja, qualquer correlação aparente entre duas variáveis que não são correlacionadas de fato.

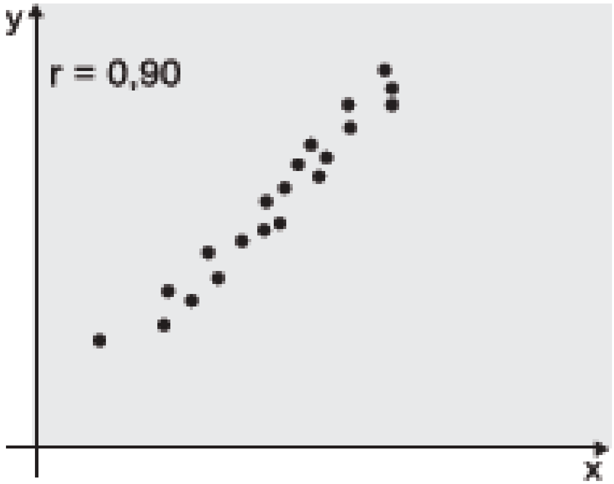
➯ As causas mais frequentes da ocorrência dessas correlações são:

1) a distribuição não equilibrada dos dados;

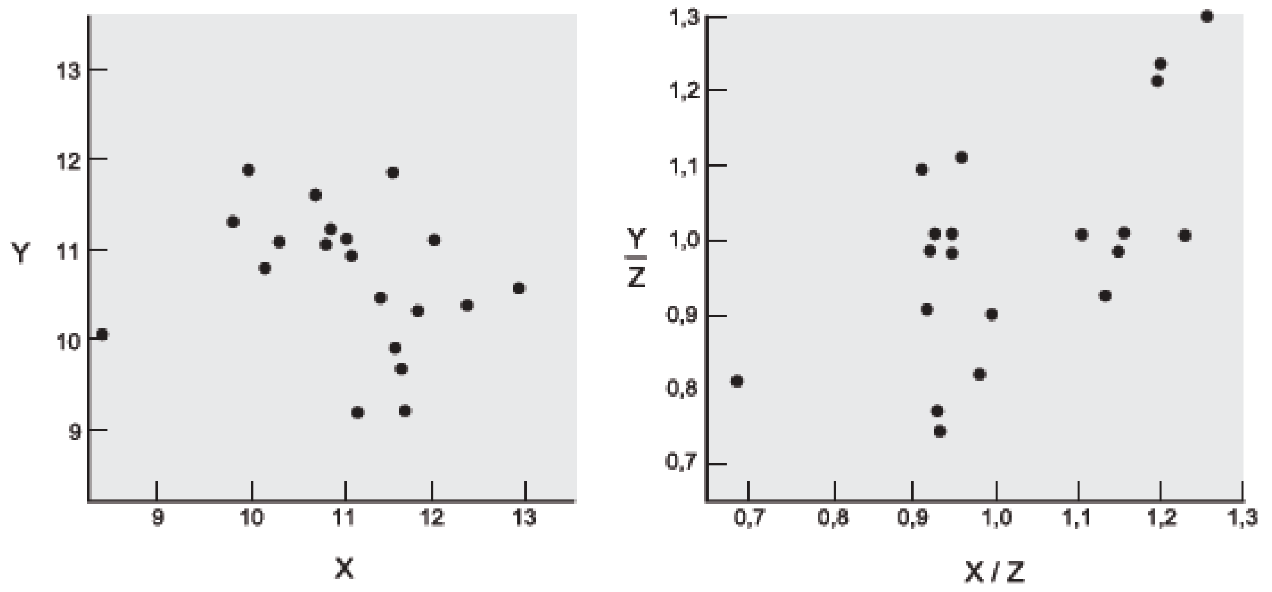
Correlação aparente



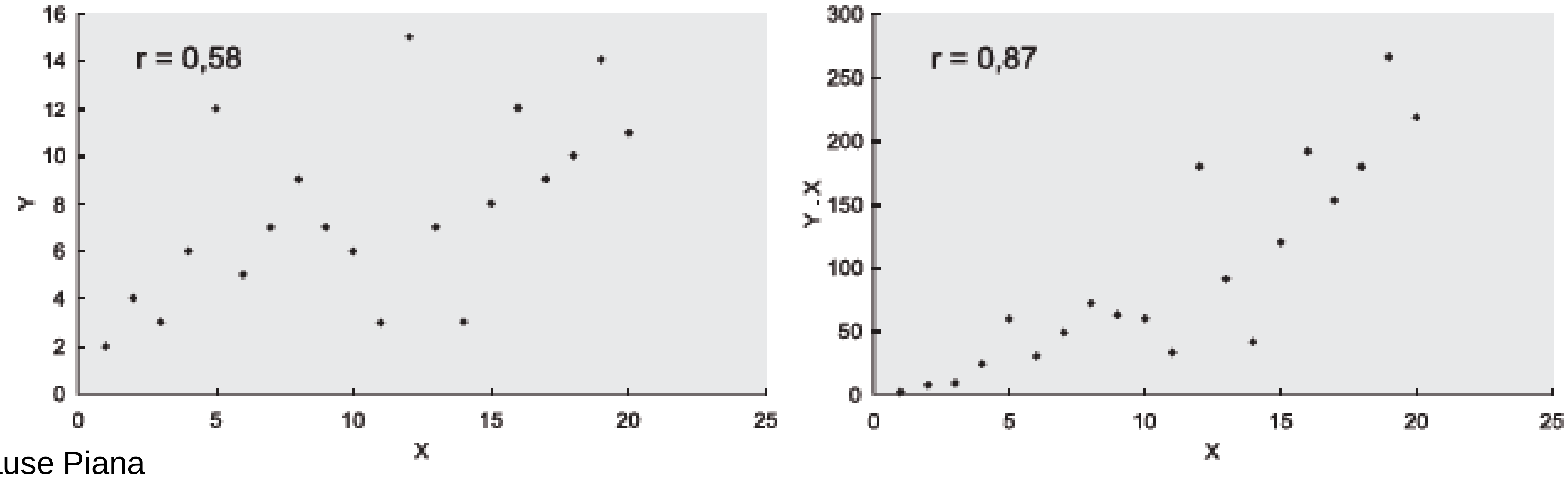
Correlação real



2) a relação entre quocientes de variáveis que apresentam o mesmo denominador



3) a relação de variáveis que foram multiplicadas por uma delas



Exemplo:

Um engenheiro está estudando a bacia do rio São Francisco. Um dos objetivos da pesquisa é verificar se existe correlação entre as variáveis área de drenagem e vazão média de longo termo, observadas em 22 estações fluviométricas do alto rio. Os valores observados foram os seguintes:

Tabela 1. Área de drenagem e vazão média (Q) de 22 estações fluviométricas da bacia do alto rio São Francisco.

Estação	Área	Q (m^3/s)	Estação	Área	Q (m^3/s)
1	83,9	1,32	12	3727,4	65,30
2	188,3	2,29	13	4142,9	75,00
3	279,4	4,24	14	4874,2	77,20
4	481,3	7,34	15	5235,0	77,50
5	675,7	8,17	16	5414,2	86,80
6	769,7	8,49	17	5680,4	85,70
7	875,8	18,90	18	8734,0	128,00
8	964,2	18,30	19	10191,5	152,00
9	1206,9	19,30	20	13881,8	224,00
10	1743,5	34,20	21	14180,1	241,00
11	2242,4	40,90	22	29366,2	455,00

Tabela auxiliar

i	x	y	x^2	y^2	xy
1	83,9	1,3	7039,2	1,74	110,75
2	188,3	2,3	35456,9	5,24	431,21
3	279,4	4,2	78064,4	17,98	1184,66
4	481,3	7,3	231649,7	53,88	3532,74
5	675,7	8,2	456570,5	66,75	5520,47
6	769,7	8,5	592438,1	72,08	6534,75
7	875,8	18,9	767025,6	357,21	16552,62
8	964,2	18,3	929681,6	334,89	17644,86
9	1206,9	19,3	1456607,6	372,49	23293,17
10	1743,5	34,2	3039792,3	1169,64	59627,70
11	2242,4	40,9	5028357,8	1672,81	91714,16
12	3727,4	65,3	13893510,8	4264,09	243399,22
13	4142,9	75,0	17163620,4	5625,00	310717,50
14	4874,2	77,2	23757825,6	5959,84	376288,24
15	5235,0	77,5	27405225,0	6006,25	405712,50
16	5414,2	86,8	29313561,6	7534,24	469952,56
17	5680,4	85,7	32266944,2	7344,49	486810,28
18	8734,0	128,0	76282756,0	16384,00	1117952,00
19	10191,5	152,0	103866672,3	23104,00	1549108,00
20	13881,8	224,0	192704371,2	50176,00	3109523,20
21	14180,1	241,0	201075236,0	58081,00	3417404,10
22	29366,2	455,0	862373702,4	207025,00	13361621,00
$\sum$	**114938,8**	**1831,0**	**1592726109,2**	**395628,62**	**25074635,69**

Cálculos:

$$n=22 \qquad \bar{x} = 5224{,}49 \qquad \bar{y} = 83{,}22$$

$$\sum x_i^2 = 1592726109{,}2 \qquad \sum y_i^2 = 395628{,}62 \qquad \sum x_i y_i = 25074635{,}69$$

$$SPXY = \sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y} = 25074635{,}69 - 22 \times 5224{,}49 \times 83{,}22 = 15509115{,}28$$

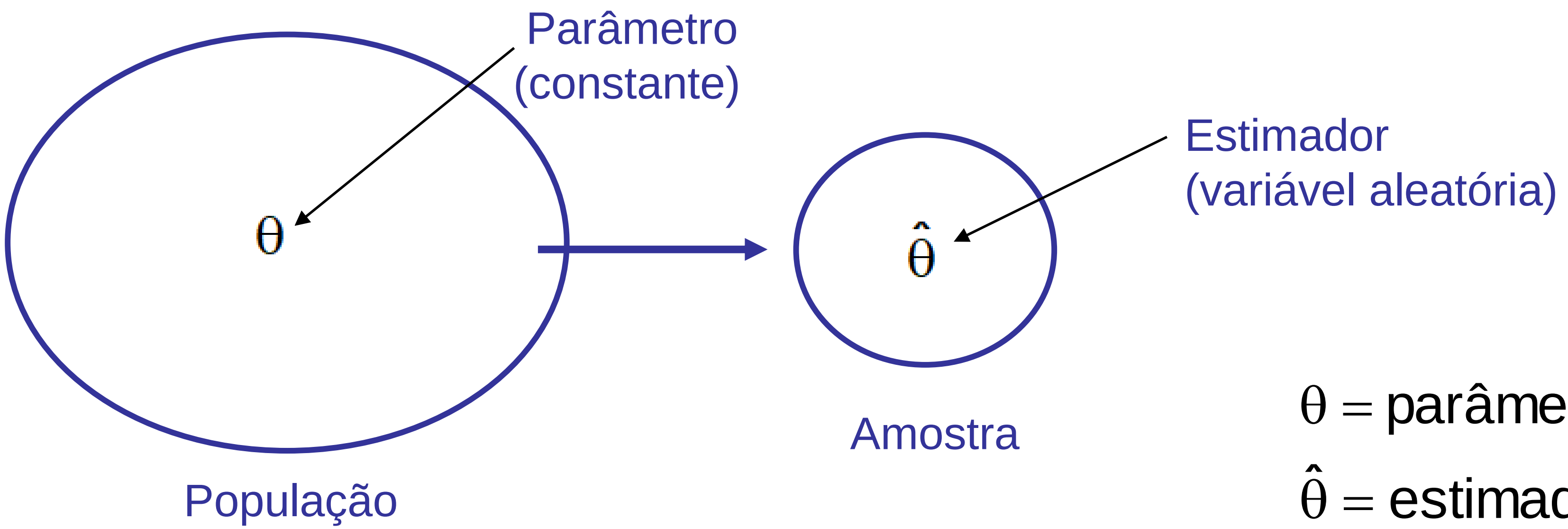
$$SQX = \sum x_i^2 - n\bar{x}^2 = 1592726109{,}2 - 22 \times 5224{,}49^2 = 992229393{,}5$$

$$SQY = \sum y_i^2 - n\bar{y}^2 = 395628{,}62 - 22 \times 83{,}22^2 = 243256{,}13$$

$$r_{XY} = \frac{SPXY}{\sqrt{SQX.SQY}} = \frac{15509115{,}28}{\sqrt{992229393{,}5 \times 243256{,}13}} = 0{,}9983$$

Interpretação: Correlação **forte** e **positiva** entre as variáveis área de drenagem e vazão média, ou seja, existe uma forte tendência de valores altos de vazão média estarem associados a valores altos de área.

2.2 Estimação do coeficiente de correlação



$$\theta = \text{parâmetro}$$

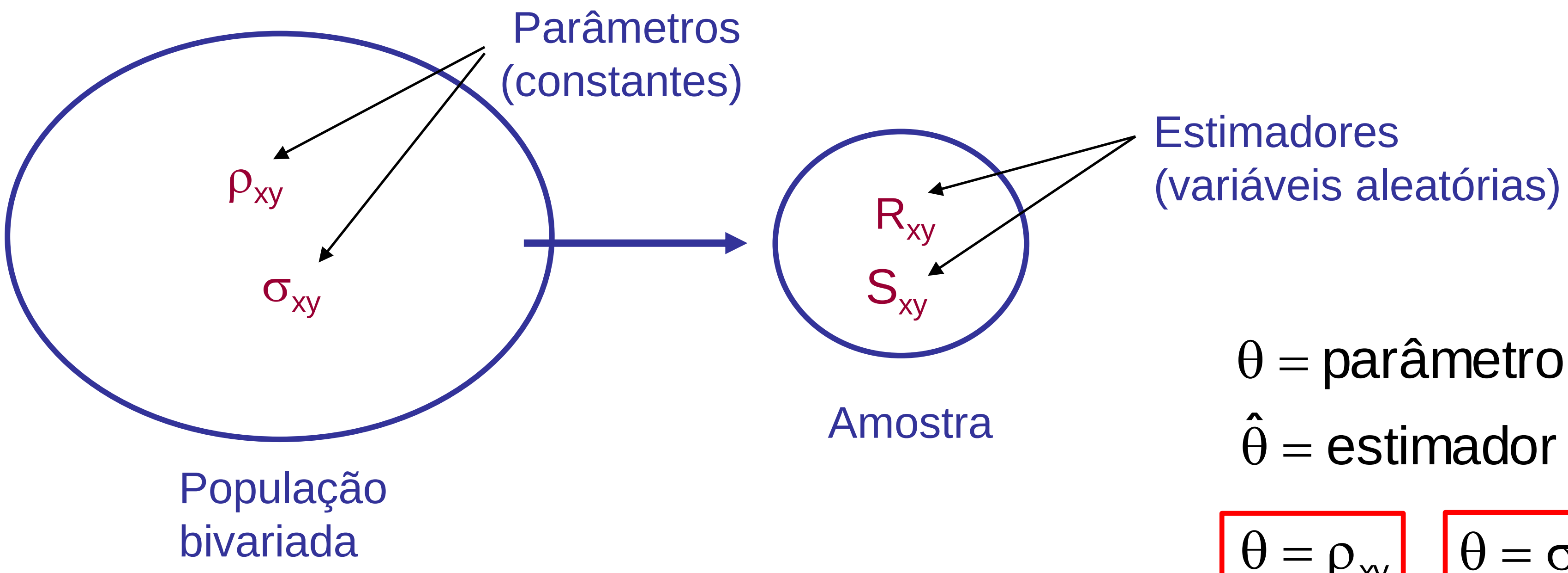
$$\hat{\theta} = \text{estimador}$$

Parâmetro é um valor populacional que desejamos conhecer.

Estimador é o valor que calculamos na amostra para obter informação sobre o parâmetro. Todo estimador é uma variável aleatória, pois pode assumir diferentes valores dependendo da configuração da amostra.

Estimativa é um valor particular que o estimador assume em uma amostra.

2.2 Estimação do coeficiente de correlação



$\theta = \text{parâmetro}$

$\hat{\theta} = \text{estimador}$

$$\boxed{\begin{array}{l}\theta = \rho_{xy} \\ \hat{\theta} = R_{xy}\end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{l}\theta = \sigma_{xy} \\ \hat{\theta} = S_{xy}\end{array}}$$

$\sigma_{xy} \rightarrow$ Covariância populacional

$\rho_{xy} \rightarrow$ Coeficiente de correlação linear populacional

2.2 Estimação do coeficiente de correlação

Parâmetro
(constante)

ρ_{xy}

População
bivariada

Amostra aleatória

$$\{(X_1,Y_1), (X_2,Y_2),\ldots,(X_n,Y_n)\}$$

$$\downarrow$$

R_{xy} ← Variável aleatória

Estimador

$$R = \frac{S_{xy}}{S_x S_y}$$

Estimativas

r_1

r_2

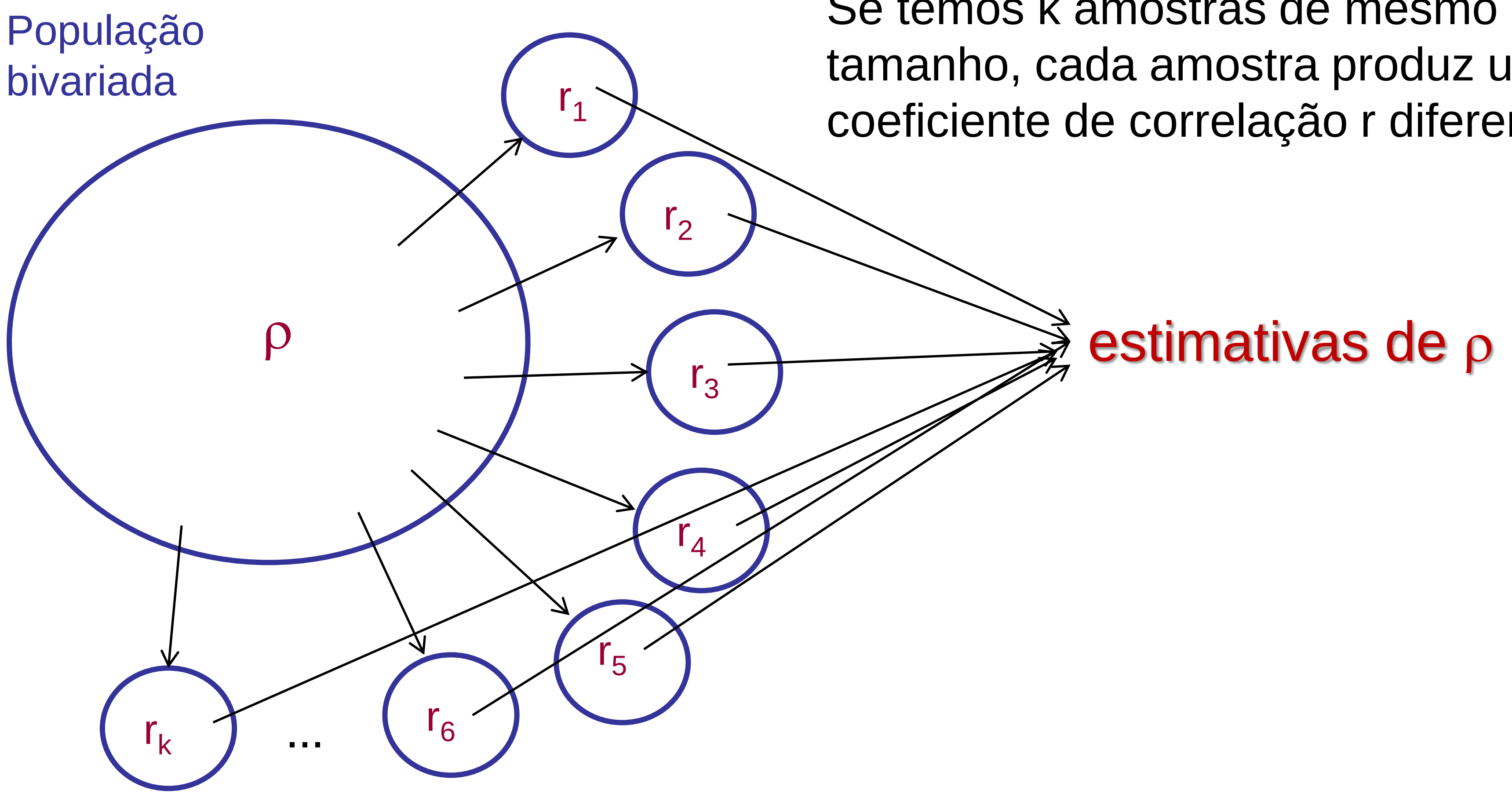
r_3

...

r_k

2.2 Estimação do coeficiente de correlação

Se temos k amostras de mesmo tamanho, cada amostra produz um coeficiente de correlação r diferente.



O coeficiente de correlação r obtido de uma amostra da população é uma estimativa pontual do parâmetro ρ.

Exemplo: Um engenheiro está estudando a bacia do rio São Francisco. Um dos objetivos da pesquisa é verificar se existe correlação entre a área de drenagem e a vazão média de longo termo, observadas em 22 estações fluviométricas do alto rio. Os valores observados foram os seguintes:

Tabela 1. Área de drenagem e vazão média (Q) de 22 estações fluviométricas da bacia do alto rio São Francisco.

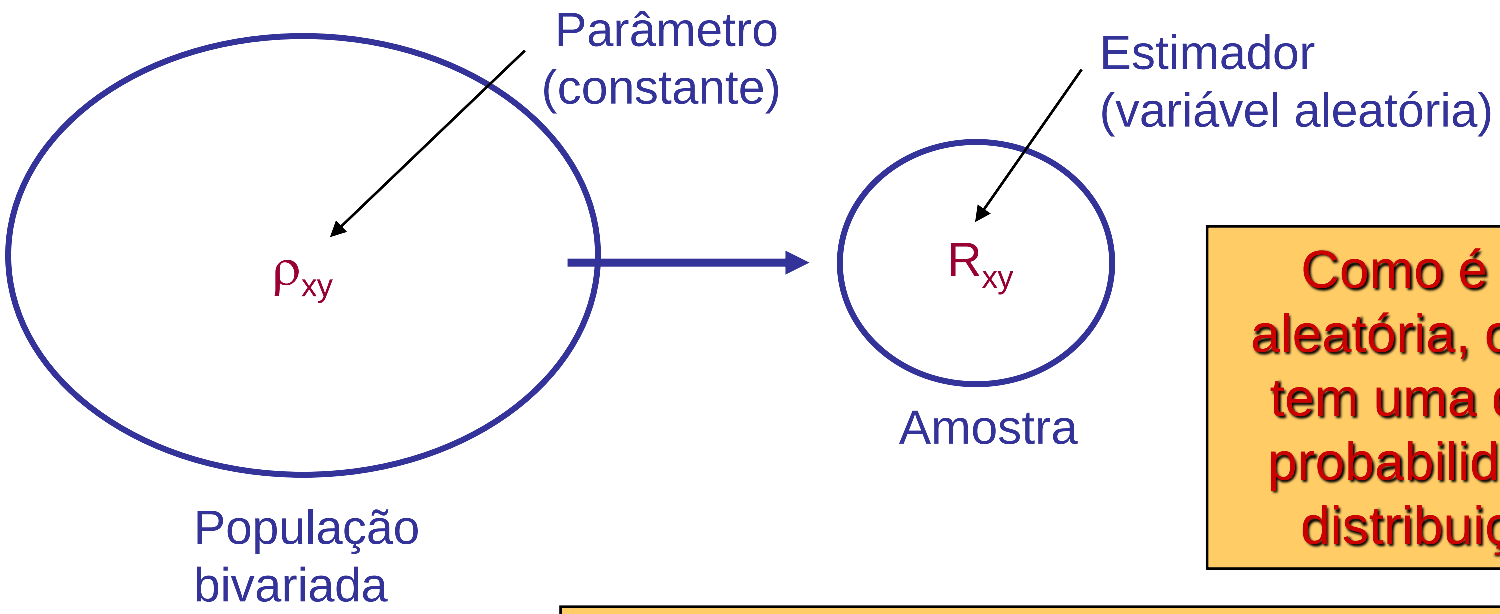
Estação	Área	Q (m^3/s)	Estação	Área	Q (m^3/s)
1	83,9	1,32	12	3727,4	65,30
2	188,3	2,29	13	4142,9	75,00
3	279,4	4,24	14	4874,2	77,20
4	481,3	7,34	15	5235,0	77,50
5	675,7	8,17	16	5414,2	86,80
6	769,7	8,49	17	5680,4	85,70
7	875,8	18,90	18	8734,0	128,00
8	964,2	18,30	19	10191,5	152,00
9	1206,9	19,30	20	13881,8	224,00
10	1743,5	34,20	21	14180,1	241,00
11	2242,4	40,90	22	29366,2	455,00

uma de todas as possíveis amostras de tamanho 22

uma amostra todas as possíveis estimativas estimativas de ρ

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = 0,9983$$

2.2 Estimação do coeficiente de correlação



Como é uma variável aleatória, o estimador R_{xy} tem uma distribuição de probabilidade, chamada distribuição amostral.

Para realizar inferências sobre o parâmetro ρ_{xy} é necessário conhecer a distribuição amostral do estimador R_{xy}

Métodos de inferência

- Testes de hipótese para ρ_{xy} $\rightarrow$ $H_0: \rho_{xy} = 0$
- Intervalo de confiança para ρ_{xy} $\rightarrow$ $LI < \rho_{xy} < LS$

2.3 Inferências sobre o coeficiente de correlação

Caso geral: Dada a amostra aleatória da população estatística bivariada de (X,Y), correspondente a n unidades de observação e representada por $(x_1,y_1), (x_2,y_2),...,(x_n,y_n)$, o coeficiente de correlação ρ_{xy} é usualmente estimado por

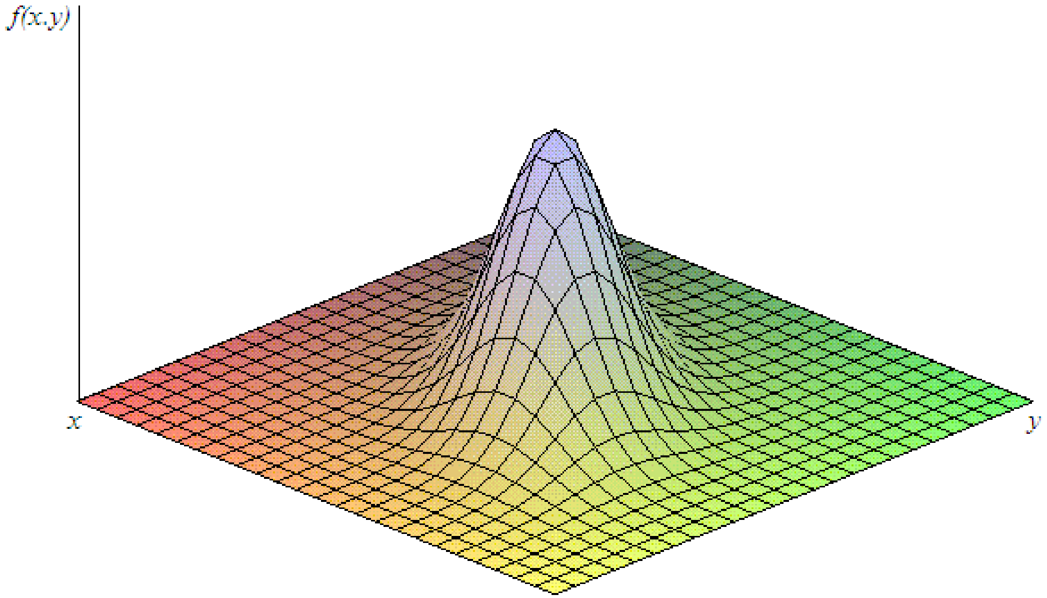
$$R_{xy} = \frac{S_{xy}}{S_x\,S_y} \rightarrow \text{V.A.} \begin{cases} E(R_{xy}) \\ V(R_{xy}) \end{cases}$$

Se a amostra é aleatória, independentemente da distribuição de probabilidade de (X,Y), o coeficiente R_{xy} tem propriedades interessantes como estimador de ρ_{xy}:

1. Imparcialidade, pois $E(R_{xy}) \cong \rho_{xy}$ $\longrightarrow$ $E(\hat{\theta}) = \theta$
2. $-1 \leq R_{xy} \leq 1$
3. R_{xy} é um estimador consistente para ρ_{xy} $\longrightarrow$ $\hat{\theta} \xrightarrow{n \to N} \theta$

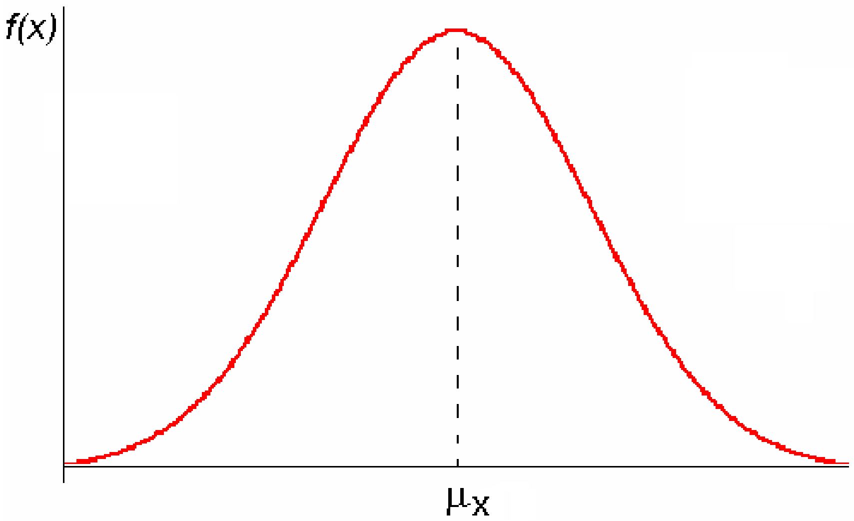
2.3 Inferências sobre o coeficiente de correlação

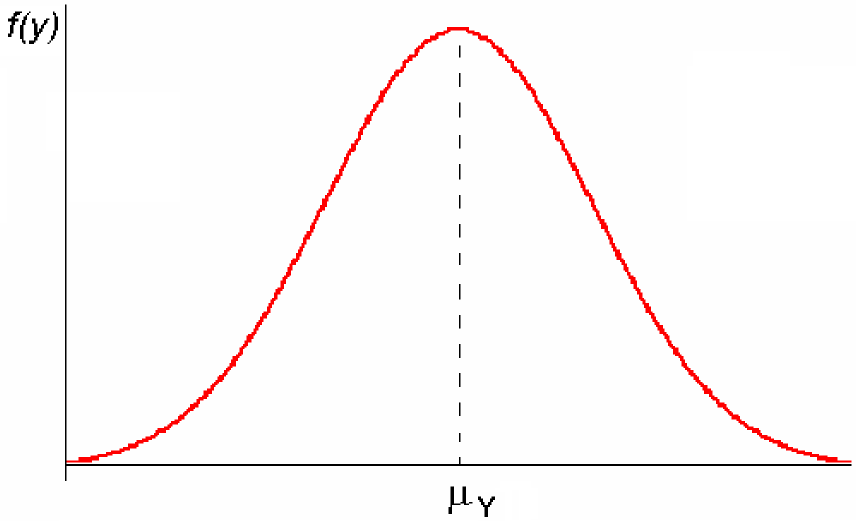
Caso normal: a distribuição conjunta de (X,Y) é a distribuição normal bivariada.



$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_x\sigma_y\left(1-\rho_{xy}^2\right)}}\,e^{\left\{-\frac{1}{2\left(1-\rho_{xy}^2\right)}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sqrt{\sigma_x}}\right)^2+\left(\frac{y-\mu_y}{\sqrt{\sigma_y}}\right)^2-2\rho_{xy}\left(\frac{x-\mu_x}{\sqrt{\sigma_x}}\right)\left(\frac{y-\mu_y}{\sqrt{\sigma_y}}\right)\right]\right\}}$$

Função densidade de probabilidade da normal individual para X e Y





$$f(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_x}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_x}{\sqrt{\sigma_x}}\right)^2}$$

$$f(y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_y}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu_y}{\sqrt{\sigma_y}}\right)^2}$$

Parâmetros da normal: **μ** e **σ**

Função densidade de probabilidade da normal bivariada

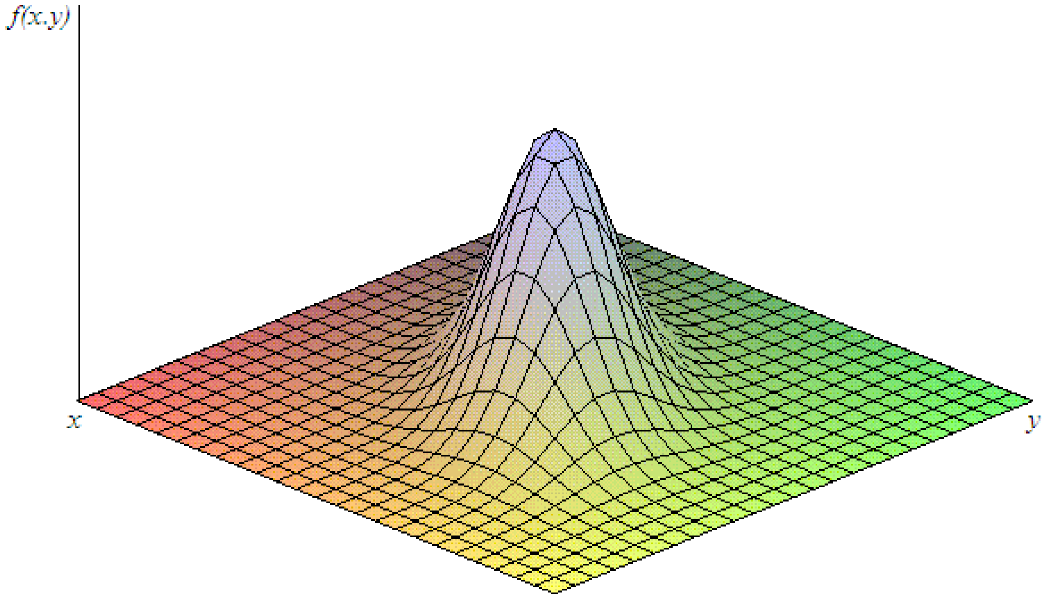
$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_x\sigma_y\left(1-\rho_{xy}^2\right)}} e^{\left\{-\frac{1}{2\left(1-\rho_{xy}^2\right)}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sqrt{\sigma_x}}\right)^2+\left(\frac{y-\mu_y}{\sqrt{\sigma_y}}\right)^2-2\rho_{xy}\left(\frac{x-\mu_x}{\sqrt{\sigma_x}}\right)\left(\frac{y-\mu_y}{\sqrt{\sigma_y}}\right)\right]\right\}}$$

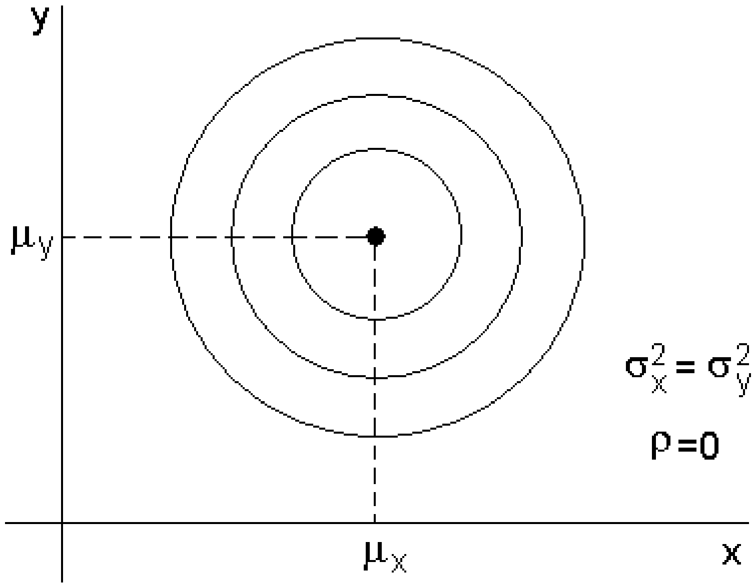
Parâmetros da normal bivariada: **μ_x, σ_x, μ_y, σ_y** e **ρ_{xy}**

2.3 Inferências sobre o coeficiente de correlação

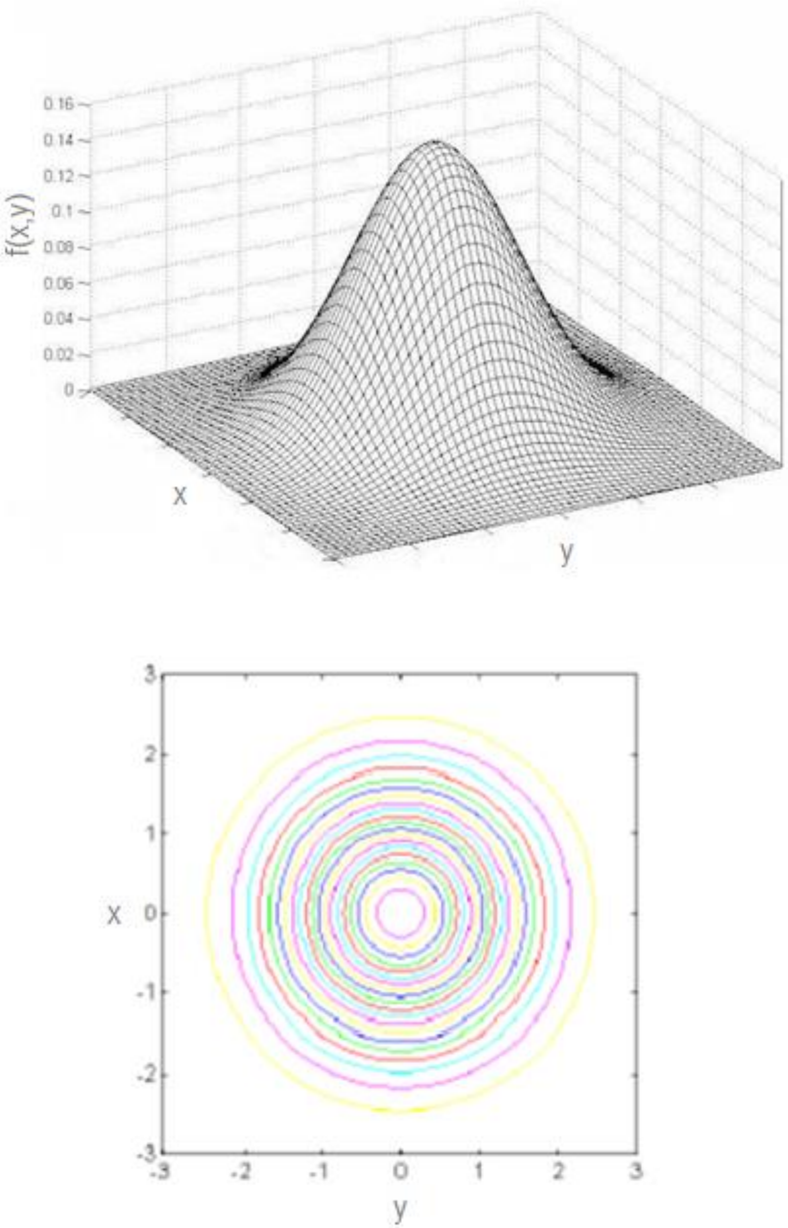
Caso normal: a distribuição conjunta de (X,Y) é a distribuição normal bivariada.

Nesse caso, X e Y são variáveis aleatórias independentes se, e somente se, $\rho_{xy}=0$.

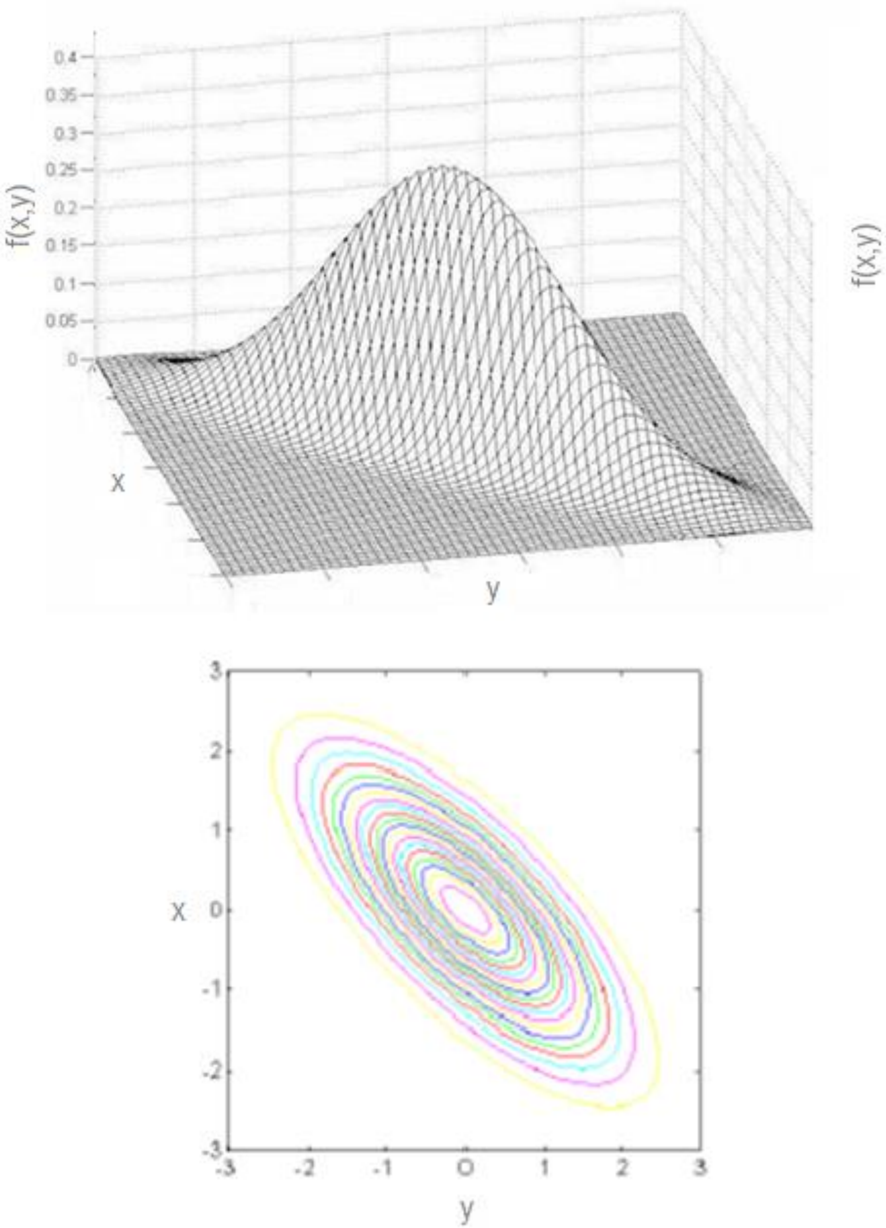




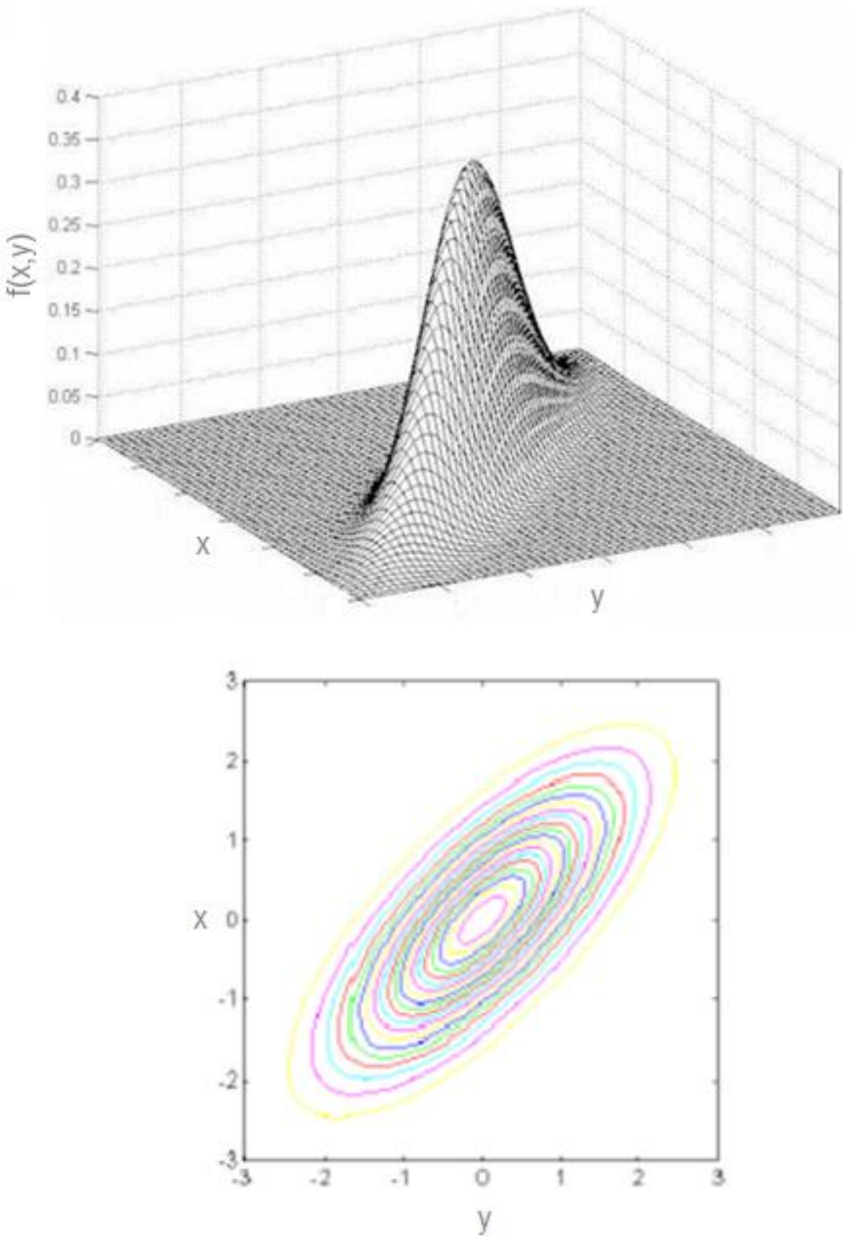
Distribuição bivariada com ρ= 0



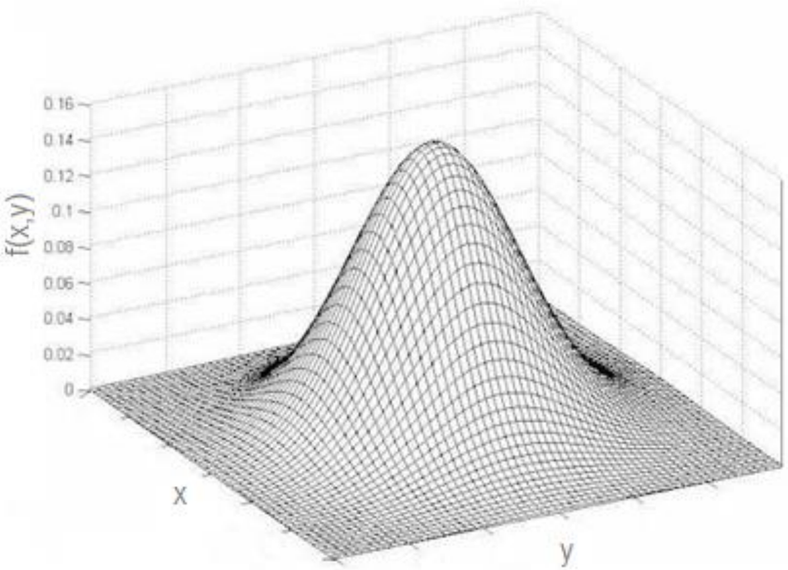
Distribuição bivariada com ρ= -0,9

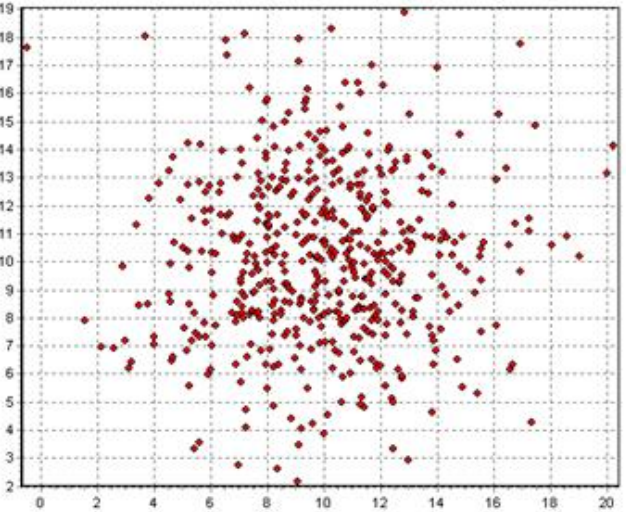


Distribuição bivariada com ρ=0,9



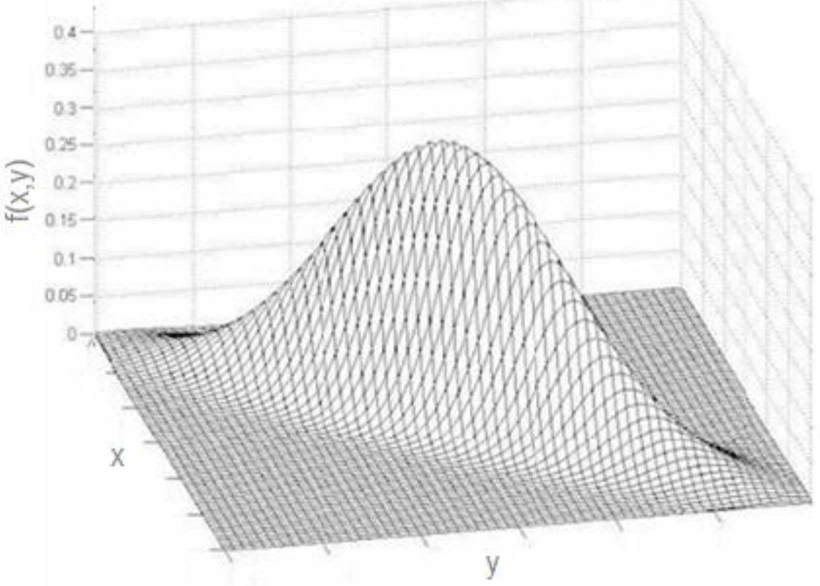
Distribuição bivariada com ρ= 0

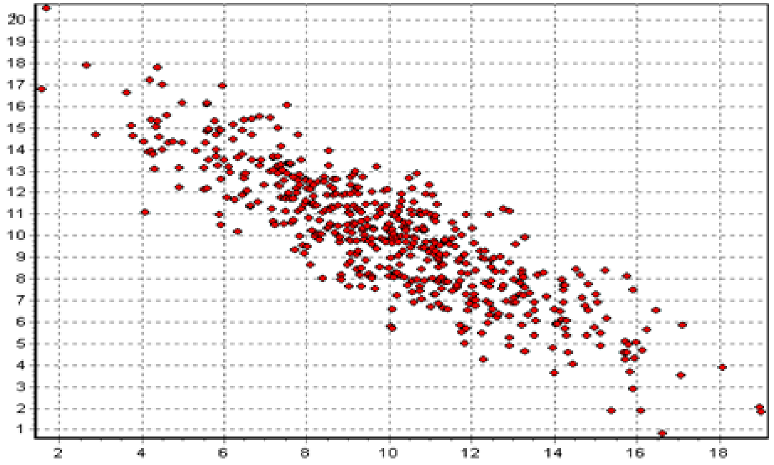




r = 0

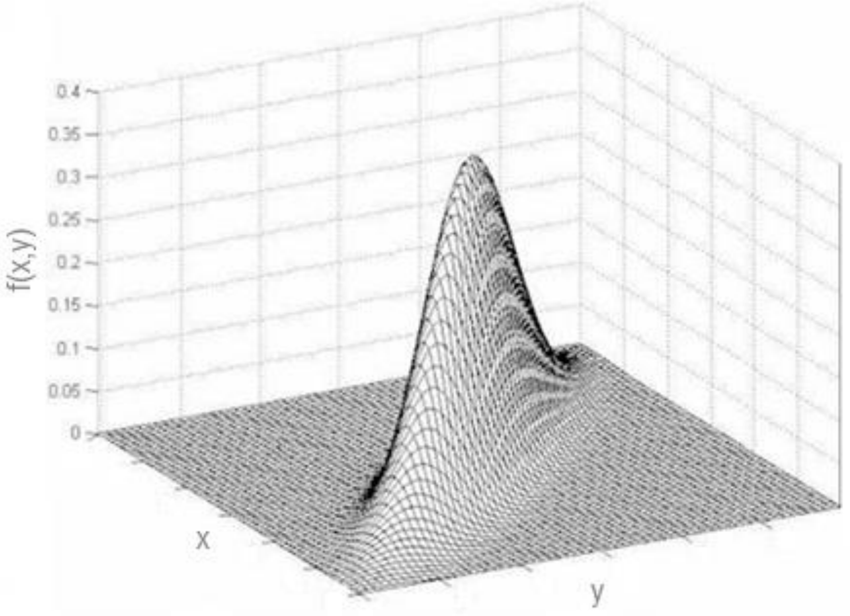
Distribuição bivariada com ρ= -0,9

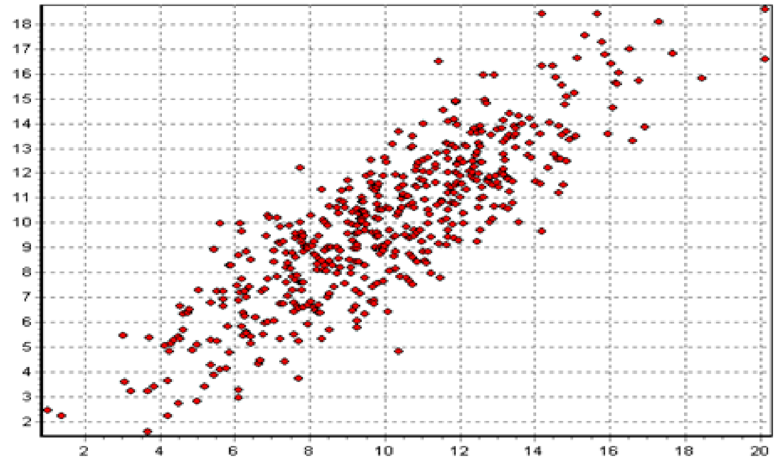




r < 0

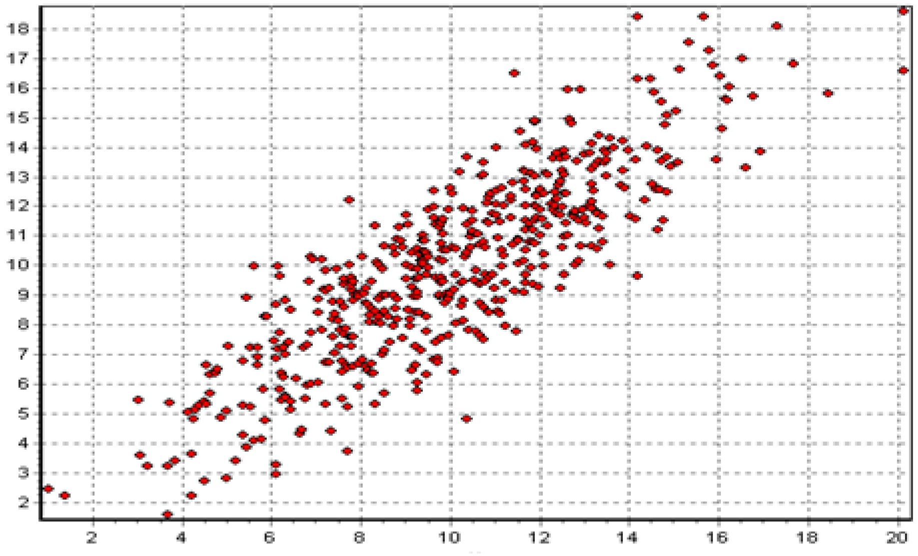
Distribuição bivariada com ρ=0,9



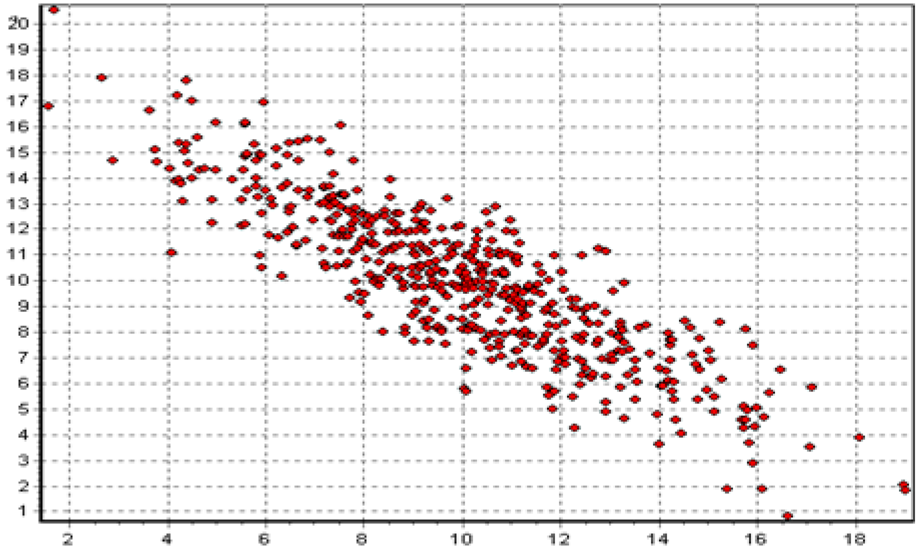


r > 0

Casos em que existe associação linear simples

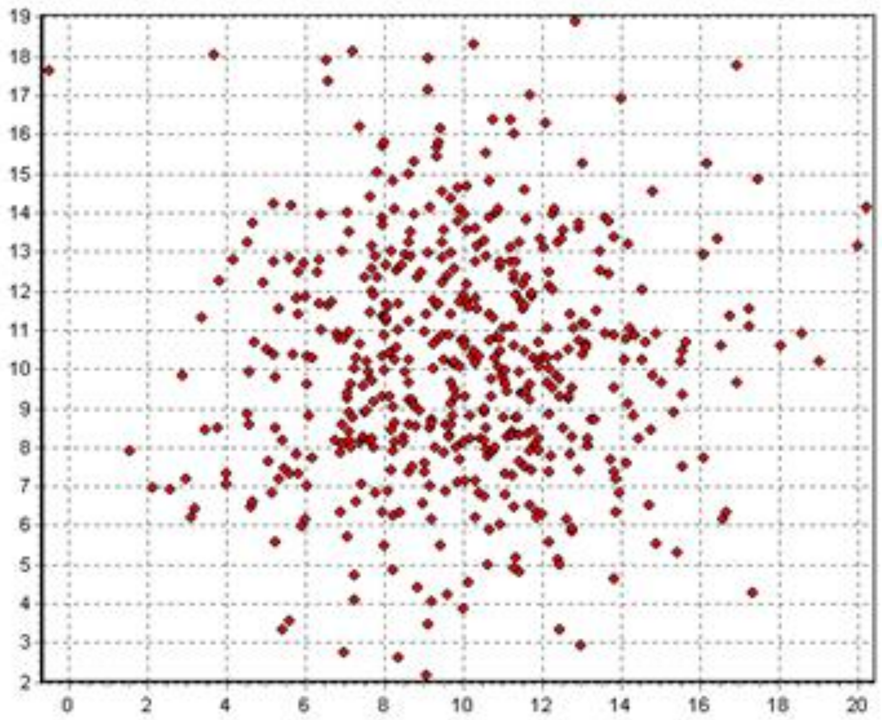


$\rho > 0$

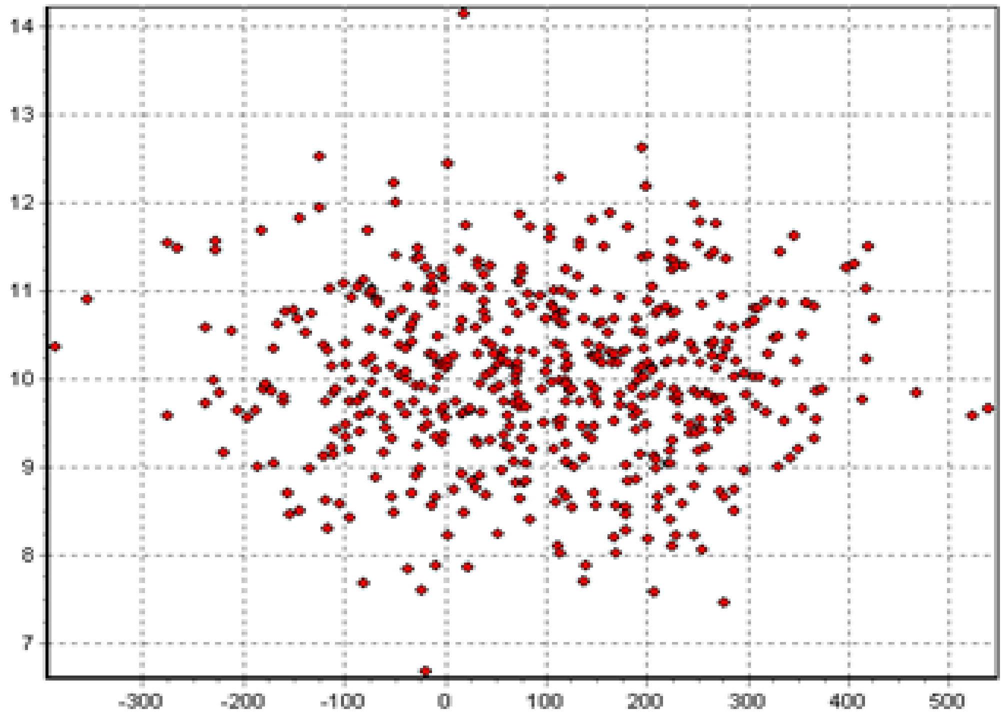


$\rho < 0$

Casos em que não existe associação linear entre as variáveis



$\rho = 0, \ \sigma_x = \sigma_y$



$\rho = 0, \ \sigma_x > \sigma_y$

2.3 Inferências sobre o coeficiente de correlação

Vamos considerar duas situações: $\rho_{xy} = 0$ e $\rho_{xy} \neq 0$.

Situação 1: Caso de independência entre X e Y ⇨ $\rho_{xy} = 0$

A distribuição amostral do coeficiente de correlação R_{xy} foi obtida por Fisher em 1915 e tem forma relativamente simples se $\rho_{xy}=0$.

Nessa situação, tem-se também que a variavel T, definida por

$$T = \frac{\hat{\theta} - \theta}{S(\hat{\theta})} = \frac{R_{xy} - \rho_{xy}}{S(R_{xy})} = \frac{R_{xy}}{\sqrt{\dfrac{1 - R_{xy}^2}{n-2}}},$$

Estimador

Desvio padrão do estimador

tem distribuição t de Student com n-2 graus de liberdade.

Esta variável pode ser utilizada para testar a hipótese de nulidade:

$$H_0 : \rho_{xy} = 0$$

2.3 Inferências sobre o coeficiente de correlação

Situação 2: Caso geral ⇨ $\rho_{xy} \neq 0$

Nesta situação, a forma da distribuição do coeficiente R_{xy} é muito complicada, o que levou Fisher a propor uma aproximação normal.
Assim, para tamanho de amostra razoável (≥25), a variável aleatória

$$W = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+R_{xy}}{1-R_{xy}}\right) \qquad W \sim N\,(\mu_W;\, \sigma_W)$$

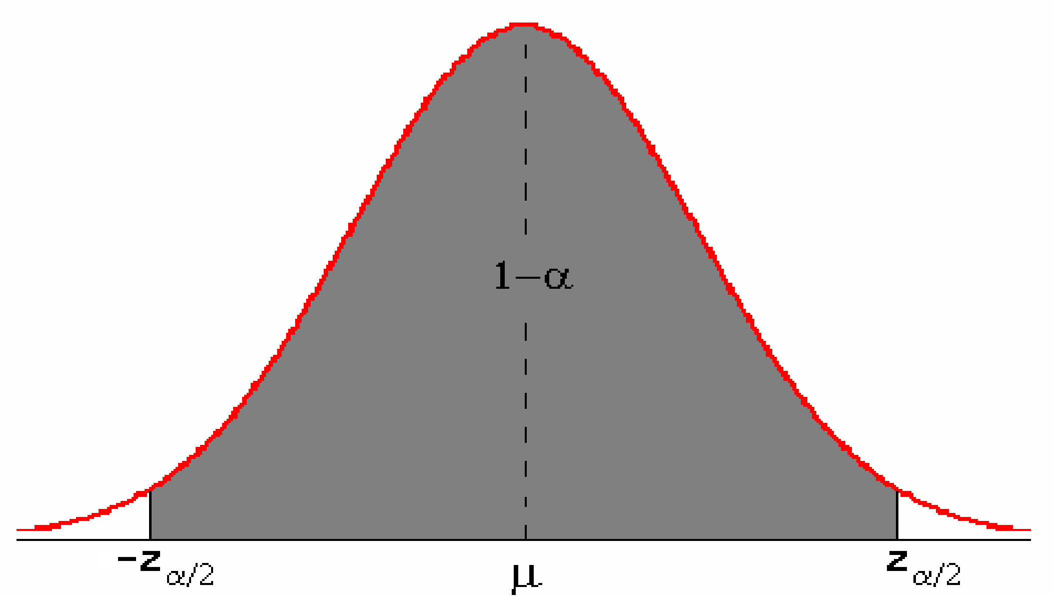
tem distribuição aproximadamente normal, onde:

$$\mu_W = \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{1+\rho_{xy}}{1-\rho_{xy}}\right) + \frac{\rho_{xy}}{n-1}\right] \quad \text{e} \quad \sigma_W = \frac{1}{\sqrt{n-3}}$$

Deste modo, para construir o intervalo de confiança para ρ_{xy}, ao nível de confiança 1- α, podemos usar como pivô a variável Z, que tem distribuição normal padrão.

$$Z = \frac{W - \mu_W}{\sigma_W}$$

Z ~ N (0, 1)



$$P\left(-z_{\alpha/2} \leq Z \leq z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

Inicialmente substituímos Z pela expressão $\frac{W - \mu_W}{\sigma_W}$

$$P\left(-z_{\alpha/2} \leq \frac{W - \mu_W}{\sigma_W} \leq z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

Isolando-se μ_W nesta expressão, obtém-se:

$$P\left(W - z_{\alpha/2}\sigma_W \le \mu_W \le W + z_{\alpha/2}\sigma_W\right) = 1-\alpha$$

$$W = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+R_{xy}}{1-R_{xy}}\right) \qquad \mu_W = \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{1+\rho_{xy}}{1-\rho_{xy}}\right) + \frac{\rho_{xy}}{n-1}\right] \qquad \sigma_W = \frac{1}{\sqrt{n-3}}$$

Fazendo as substituições e considerando $\frac{\rho_{xy}}{n-1}$ desprezível, temos

$$P\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+R_{xy}}{1-R_{xy}}\right) - \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n-3}} \le \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\rho_{xy}}{1-\rho_{xy}}\right) \le \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+R_{xy}}{1-R_{xy}}\right) + \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n-3}}\right) = 1-\alpha$$

Para obter os limites do intervalo de confiança, é necessário resolver as inequações para ρ_{xy}.

$$P\left[\frac{\exp\left\{2\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right) - \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n-3}}\right]\right\}-1}{\exp\left\{2\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right) - \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n-3}}\right]\right\}+1} \le \rho_{xy} \le \frac{\exp\left\{2\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right) + \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n-3}}\right]\right\}-1}{\exp\left\{2\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right) + \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n-3}}\right]\right\}+1}\right] = 1-\alpha$$

Limite inferior

Limite superior

O intervalo de confiança para ρ_{xy} também pode ser escrito da seguinte forma:

$$IC(\rho;1-\alpha):\left[\underbrace{\frac{\exp\left\{2\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right)-\frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n-3}}\right]\right\}-1}{\exp\left\{2\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right)-\frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n-3}}\right]\right\}+1}}_{\text{Limite inferior}};\ \underbrace{\frac{\exp\left\{2\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right)+\frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n-3}}\right]\right\}-1}{\exp\left\{2\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right)+\frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n-3}}\right]\right\}+1}}_{\text{Limite superior}}\right]$$

onde $z_{\alpha/2}$ é o valor de z que delimita a área $\alpha/2$.

Obs.: Essa transformação não é válida para ρ=-1 ou ρ=+1 e para ρ=0. Nesses casos, a distribuição exata t deve ser preferida.

Exemplo: Um engenheiro está estudando a bacia do rio São Francisco. Um dos objetivos da pesquisa é verificar se existe correlação entre a área de drenagem e a vazão média de longo termo, observadas em 22 estações fluviométricas do alto rio. Os valores observados foram os seguintes:

Tabela 1. Área de drenagem e vazão média (Q) de 22 estações fluviométricas da bacia do alto rio São Francisco.

Estação	Área	Q (m^3/s)	Estação	Área	Q (m^3/s)
1	83,9	1,32	12	3727,4	65,30
2	188,3	2,29	13	4142,9	75,00
3	279,4	4,24	14	4874,2	77,20
4	481,3	7,34	15	5235,0	77,50
5	675,7	8,17	16	5414,2	86,80
6	769,7	8,49	17	5680,4	85,70
7	875,8	18,90	18	8734,0	128,00
8	964,2	18,30	19	10191,5	152,00
9	1206,9	19,30	20	13881,8	224,00
10	1743,5	34,20	21	14180,1	241,00
11	2242,4	40,90	22	29366,2	455,00

a) Verifique se a correlação entre as variáveis x e y é significativa, ou seja, teste a hipótese de que $\rho=0$.

b) Construa o intervalo de confiança, ao nível de 95%, para o coeficiente de correlação linear populacional entre as variáveis área e vazão.

Resolução: a) Teste de hipótese

1. Pressuposições:

- Distribuição da variável (X,Y) é normal bivariada;

2. Hipóteses estatísticas:

$$\begin{cases} H_0 : \rho = 0 \\ H_1 : \rho \neq 0 \end{cases}$$

3. Erro de conclusão: $\alpha = 0{,}05$ (probabilidade de erro tipo I)

Erro tipo I = rejeitar H_0 quando ela é verdadeira.

4. Estatística do teste:

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = 0{,}9983$$

$$T = \frac{R_{xy}}{\sqrt{\dfrac{1 - R_{xy}^2}{n-2}}} \rightarrow t = \frac{0{,}9983}{\sqrt{\dfrac{1 - 0{,}9983^2}{22-2}}} = 75{,}99$$

5. Decisão e conclusão:

$\nu = 20 \rightarrow t_{\alpha/2(20)} = 2{,}086$

$t = 75{,}99 > t_{\alpha/2(20)} = 2{,}086 \rightarrow$ Rejeitamos H_0

Concluímos, ao nível de 5% de significância, que o coeficiente de correlação populacional difere de zero. Portanto, existe uma correlação linear positiva entre a área de drenagem e a vazão média do rio São Francisco. Valores altos de área estão associados a valores altos de vazão média.

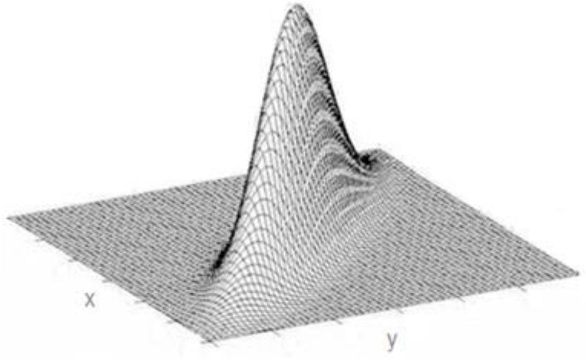
Tabela II. Limites da distribuição t de Student.

Graus de Liberdade (ν)	**Limites bilaterais**: $P(\lvert t \rvert > t_{\alpha/2})$							
	Nível de Significância (α)							
	0,50	0,20	0,10	0,05	0,025	0,02	0,01	0,005
1	1,000	3,078	6,314	12,706	25,542	31,821	63,657	127,320
2	0,816	1,886	2,920	4,303	6,205	6,965	9,925	14,089
3	0,715	1,638	2,353	3,183	4,177	4,541	5,841	7,453
4	0,741	1,533	2,132	2,776	3,495	3,747	4,604	5,598
5	0,727	1,476	2,015	2,571	3,163	3,365	4,032	4,773
6	0,718	1,440	1,943	2,447	2,969	3,143	3,707	4,317
7	0,711	1,415	1,895	2,365	2,841	2,998	3,500	4,029
8	0,706	1,397	1,860	2,306	2,752	2,896	3,355	3,833
9	0,703	1,383	1,833	2,262	2,685	2,821	3,250	3,690
10	0,700	1,372	1,813	2,228	2,634	2,764	3,169	3,581
11	0,697	1,363	1,796	2,201	2,503	2,718	3,106	3,497
12	0,695	1,356	1,782	2,179	2,560	2,681	3,055	3,428
13	0,694	1,350	1,771	2,160	2,533	2,650	3,012	3,373
14	0,692	1,345	1,761	2,145	2,510	2,624	2,977	3,326
15	0,691	1,341	1,753	2,132	2,490	2,602	2,947	3,286
16	0,690	1,337	1,746	2,120	2,473	2,583	2,921	3,252
17	0,689	1,333	1,740	2,110	2,458	2,567	2,898	3,223
18	0,688	1,330	1,734	2,101	2,445	2,552	2,878	3,197
19	0,688	1,328	1,729	2,093	2,433	2,539	2,861	3,174
20	0,687	1,325	1,725	2,086	2,423	2,528	2,845	3,153
21	0,686	1,323	1,721	2,080	2,414	2,518	2,831	3,135
22	0,686	1,321	1,717	2,074	2,406	2,508	2,819	3,119
23	0,685	1,319	1,714	2,069	2,398	2,500	2,807	3,104
24	0,685	1,318	1,711	2,064	2,391	2,492	2,797	3,091
25	0,684	1,316	1,708	2,060	2,385	2,485	2,787	3,078
26	0,684	1,315	1,706	2,056	2,379	2,479	2,779	3,067
27	0,684	1,314	1,703	2,052	2,373	2,473	2,771	3,057
28	0,683	1,313	1,701	2,048	2,369	2,467	2,763	3,047
29	0,683	1,311	1,699	2,045	2,364	2,462	2,756	3,038
30	0,683	1,310	1,697	2,042	2,360	2,457	2,750	3,030
40	0,681	1,303	1,684	2,021	2,329	2,423	2,705	2,971
60	0,679	1,296	1,671	2,000	2,299	2,390	2,660	2,915
120	0,677	1,289	1,658	1,980	2,270	2,358	2,617	2,860
...	0,674	1,282	1,645	1,960	2,241	2,326	2,576	2,807
Graus de Liberdade (ν)	0,25	0,10	0,05	0,025	0,0125	0,01	0,005	0,0025
	Nível de Significância (α)							
	Limites unilaterais: $P(\lvert t \rvert > t_{\alpha})$							

$\alpha = 0{,}05$

$\nu=20 \rightarrow \quad t_{\alpha/2(20)}=2{,}086$

Resolução: b) Intervalo de confiança



1. Pressuposições:

- Distribuição da variável (X,Y) é normal bivariada;
- As variáveis são correlacionadas, ou seja, $\rho \neq 0$.

2. Obtenção da estimativa pontual:

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = 0{,}9983$$

3. Cálculo dos limites do intervalo:

$$n = 22$$

$$z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$IC(\rho; 0{,}95): \left[\frac{\exp\left\{2\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+0{,}9983}{1-0{,}9983}\right) - \frac{1{,}96}{\sqrt{22-3}}\right]\right\} - 1}{\exp\left\{2\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+0{,}9983}{1-0{,}9983}\right) - \frac{1{,}96}{\sqrt{22-3}}\right]\right\} + 1} ; \frac{\exp\left\{2\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+0{,}9983}{1-0{,}9983}\right) + \frac{1{,}96}{\sqrt{22-3}}\right]\right\} - 1}{\exp\left\{2\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+0{,}9983}{1-0{,}9983}\right) + \frac{1{,}96}{\sqrt{22-3}}\right]\right\} + 1} \right]$$

$$IC(\rho; 0{,}95): [0{,}9958; 0{,}9993]$$

4. Conclusão: Concluímos com 95% de confiança que os limites 0,9958 e 0,9993 compreendem o coeficiente de correlação populacional.

Tabela I. Área sob a curva normal padrão de 0 a z, $P(0 \le Z \le z)$.

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0754
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2133	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2258	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2518	0,2549
0,7	0,2580	0,2612	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2996	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000

$$z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

Exercício resolvido

O proprietário de uma grande cadeia de sorveterias gostaria de estudar os efeitos da temperatura atmosférica (x) sobre as vendas (y) durante a temporada do verão. Uma amostra de 21 dias consecutivos foi selecionada, com os seguintes resultados:

i	x	y	i	x	y
1	17,22	2933,6	12	23,89	3705,6
2	21,11	3242,4	13	36,67	6562,0
3	22,78	3474,0	14	37,78	6330,4
4	23,89	3956,5	15	33,33	6118,1
5	26,67	4554,8	16	30,56	5461,9
6	27,78	4342,5	17	28,89	4979,4
7	29,44	5172,4	18	31,11	5519,8
8	31,11	5597,0	19	26,67	4361,8
9	32,22	6060,2	20	27,78	4130,2
10	32,78	5905,8	21	24,44	3821,4
11	33,33	6253,2			

A partir dos dados acima, pede-se:

a) Construir o diagrama de dispersão (X,Y).

b) Traçar uma reta para indicar a média de x e uma reta para indicar a média de y , no diagrama de dispersão, e comentar sobre a dispersão dos pontos.

c) Calcular a covariância amostral (s_{xy}). O que ela indica?

d) Calcular o coeficiente de correlação linear da amostra (r) e interpretar seu significado.

e) Teste a hipótese de que $\rho=0$.

f) Construa o intervalo de confiança, ao nível de 95%, para o coeficiente de correlação linear

a, b) Traçar uma reta para indicar X e uma reta para indicar Y, no diagrama de dispersão, e comentar sobre a dispersão dos pontos;

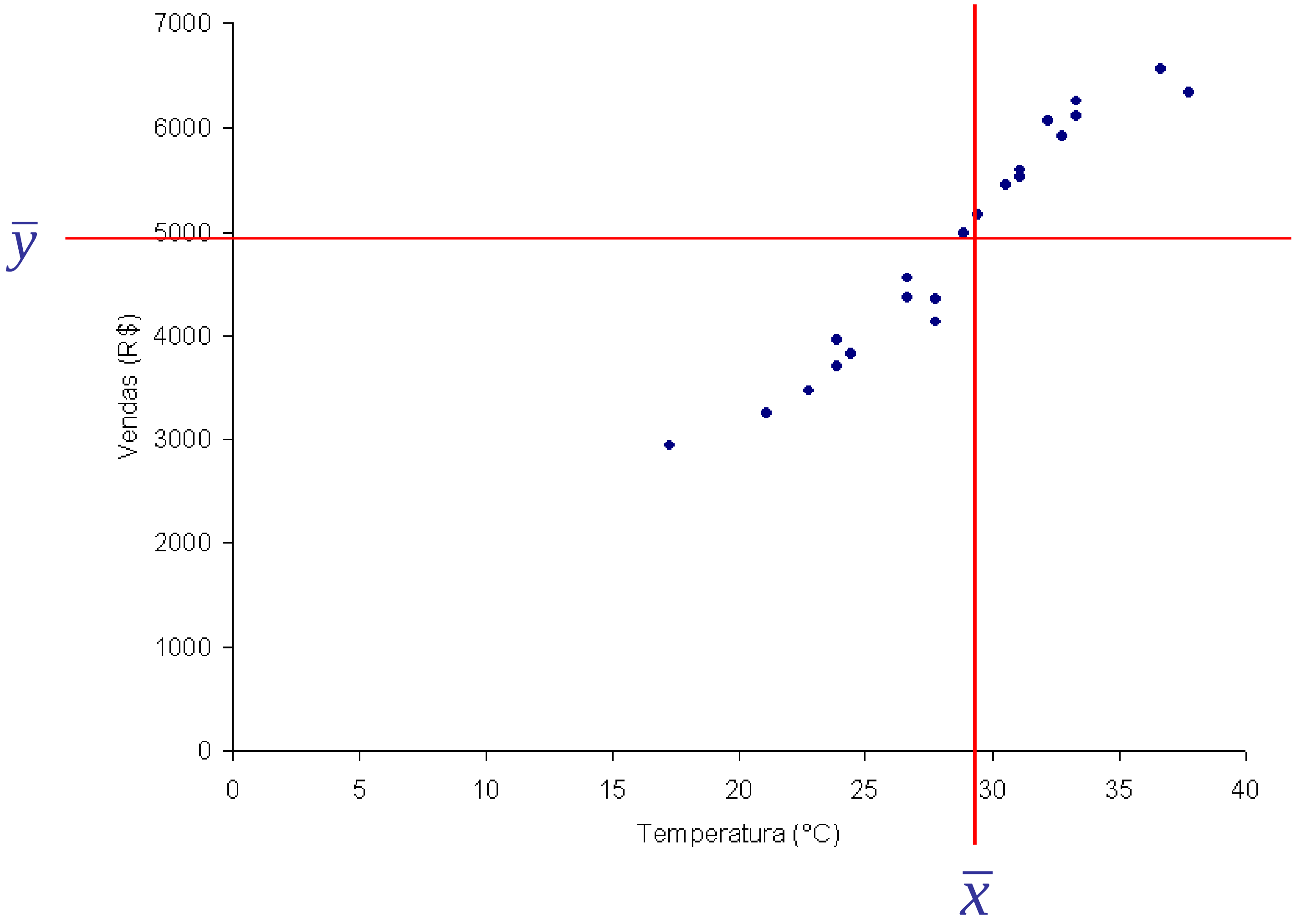


Tabela auxiliar

i	x	y	x^2	y^2	xy
1	17,22	2933,6	296,53	8606008,96	50516,59
2	21,11	3242,4	445,63	10513157,76	68447,06
3	22,78	3474,0	518,93	12068676	79137,72
4	23,89	3956,5	570,73	15653892,25	94520,79
5	26,67	4554,8	711,29	20746203,04	121476,52
6	27,78	4342,5	771,73	18857306,25	120634,65
7	29,44	5172,4	866,71	26753721,76	152275,46
8	31,11	5597,0	967,83	31326409	174122,67
9	32,22	6060,2	1038,13	36726024,04	195259,64
10	32,78	5905,8	1074,53	34878473,64	193592,12
11	33,33	6253,2	1110,89	39102510,24	208419,16
12	23,89	3705,6	570,73	13731471,36	88526,78
13	36,67	6562,0	1344,69	43059844	240628,54
14	37,78	6330,4	1427,33	40073964,16	239162,51
15	33,33	6118,1	1110,89	37431147,61	203916,27
16	30,56	5461,9	933,91	29832351,61	166915,66
17	28,89	4979,4	834,63	24794424,36	143854,87
18	31,11	5519,8	967,83	30468192,04	171720,98
19	26,67	4361,8	711,29	19025299,24	116329,21
20	27,78	4130,2	771,73	17058552,04	114736,96
21	24,44	3821,4	597,31	14603097,96	93395,02
Soma	599,45	102483	17643,28	525310727,3	3037589,2
Media	28,55	4880,14			

c) Calcular a covariância amostral (s_{xy}). O que ela indica?

$$s_{xy} = \frac{\sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{n-1} = \frac{SPXY}{n-1} = 5609{,}38\ ^{o}C.R\$$$

Indica a intensidade da associação entre a temperatura e a venda de sorvetes. O sinal positivo indica que a associação é positiva.

d) Calcular o coeficiente de correlação linear da amostra (r) e interpretar seu significado.

$$r_{xy} = \frac{\sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\left(\sum x_i^2 - n\bar{x}^2\right)\left(\sum y_i^2 - n\bar{y}^2\right)}} = \frac{SPXY}{\sqrt{SQX.SQY}} = 0{,}9695$$

Existe forte correlação linear positiva (r>0,8) entre temperatura e vendas

Significado: valores altos de temperatura estão associados a valores altos de vendas e vice-versa.

e) Teste de hipótese

1. Pressuposições:

- Distribuição da variável (X,Y) é normal bivariada;

2. Hipóteses estatísticas:

$$\begin{cases} H_0: \rho = 0 \\ H_1: \rho \neq 0 \end{cases}$$

3. Erro de conclusão: $\alpha = 0,05$ (probabilidade de erro tipo I)

Erro tipo I = rejeitar H_0 quando ela é verdadeira.

4. Estatística do teste:

$$r_{xy} = \frac{SPXY}{\sqrt{SQX.SQY}} = 0,9695$$

$$T = \frac{R_{xy}}{\sqrt{\frac{1-R_{xy}^2}{n-2}}} \rightarrow t = \frac{0,9695}{\sqrt{\frac{1-0,9695^2}{21-2}}} = 17,23$$

5. Decisão e conclusão:

$\nu=19 \rightarrow t_{\alpha/2(19)} = 2,093$

$t = 17,23 > t_{\alpha/2(19)} = 2,093 \rightarrow$ Rejeitamos H_0

Concluímos, ao nível de 5% de significância, que o coeficiente de correlação populacional difere de zero. Portanto, existe uma correlação linear positiva entre a temperatura e a venda de sorvetes. Valores altos de temperatura estão associados a valores altos de vendas e vice-versa.

Tabela II. Limites da distribuição t de Student.

Graus de Liberdade (ν)	Limites bilaterais: P(| t | > $t_{\alpha/2}$)							
	Nível de Significância (α)							
	0,50	0,20	0,10	0,05	0,025	0,02	0,01	0,005
1	1,000	3,078	6,314	12,706	25,542	31,821	63,657	127,320
2	0,816	1,886	2,920	4,303	6,205	6,965	9,925	14,089
3	0,715	1,638	2,353	3,183	4,177	4,541	5,841	7,453
4	0,741	1,533	2,132	2,776	3,495	3,747	4,604	5,598
5	0,727	1,476	2,015	2,571	3,163	3,365	4,032	4,773
6	0,718	1,440	1,943	2,447	2,969	3,143	3,707	4,317
7	0,711	1,415	1,895	2,365	2,841	2,998	3,500	4,029
8	0,706	1,397	1,860	2,306	2,752	2,896	3,355	3,833
9	0,703	1,383	1,833	2,262	2,685	2,821	3,250	3,690
10	0,700	1,372	1,813	2,228	2,634	2,764	3,169	3,581
11	0,697	1,363	1,796	2,201	2,503	2,718	3,106	3,497
12	0,695	1,356	1,782	2,179	2,560	2,681	3,055	3,428
13	0,694	1,350	1,771	2,160	2,533	2,650	3,012	3,373
14	0,692	1,345	1,761	2,145	2,510	2,624	2,977	3,326
15	0,691	1,341	1,753	2,132	2,490	2,602	2,947	3,286
16	0,690	1,337	1,746	2,120	2,473	2,583	2,921	3,252
17	0,689	1,333	1,740	2,110	2,458	2,567	2,898	3,223
18	0,688	1,330	1,734	2,101	2,445	2,552	2,878	3,197
19	0,688	1,328	1,729	2,093	2,433	2,539	2,861	3,174
20	0,687	1,325	1,725	2,086	2,423	2,528	2,845	3,153
21	0,686	1,323	1,721	2,080	2,414	2,518	2,831	3,135
22	0,686	1,321	1,717	2,074	2,406	2,508	2,819	3,119
23	0,685	1,319	1,714	2,069	2,398	2,500	2,807	3,104
24	0,685	1,318	1,711	2,064	2,391	2,492	2,797	3,091
25	0,684	1,316	1,708	2,060	2,385	2,485	2,787	3,078
26	0,684	1,315	1,706	2,056	2,379	2,479	2,779	3,067
27	0,684	1,314	1,703	2,052	2,373	2,473	2,771	3,057
28	0,683	1,313	1,701	2,048	2,369	2,467	2,763	3,047
29	0,683	1,311	1,699	2,045	2,364	2,462	2,756	3,038
30	0,683	1,310	1,697	2,042	2,360	2,457	2,750	3,030
40	0,681	1,303	1,684	2,021	2,329	2,423	2,705	2,971
60	0,679	1,296	1,671	2,000	2,299	2,390	2,660	2,915
120	0,677	1,289	1,658	1,980	2,270	2,358	2,617	2,860
...	0,674	1,282	1,645	1,960	2,241	2,326	2,576	2,807
Graus de Liberdade (ν)	0,25	0,10	0,05	0,025	0,0125	0,01	0,005	0,0025
	Nível de Significância (α)							
	Limites unilaterais: P(| t | > t_{α})							

$\alpha = 0,05$

$\nu=19 \rightarrow \quad t_{\alpha/2(19)} = 2,093$

f) Intervalo de confiança

1. Pressuposições:

- Distribuição da variável (X,Y) é normal bivariada;
- As variáveis são correlacionadas, ou seja, $\rho \neq 0$.

2. Obtenção da estimativa pontual:

$$r_{xy} = \frac{SPXY}{\sqrt{SQX.SQY}} = 0,9695$$

3. Cálculo dos limites do intervalo :

$$n = 21$$

$$z_{\alpha/2} = z_{0,475} = 1,96$$

$$IC(\rho; 0,95): \left[\frac{\exp\left\{2\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+0,9695}{1-0,9695}\right) - \frac{1,96}{\sqrt{21-3}}\right]\right\} - 1}{\exp\left\{2\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+0,9695}{1-0,9695}\right) - \frac{1,96}{\sqrt{21-3}}\right]\right\} + 1} ; \frac{\exp\left\{2\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+0,9695}{1-0,9695}\right) + \frac{1,96}{\sqrt{21-3}}\right]\right\} - 1}{\exp\left\{2\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+0,9695}{1-0,9695}\right) + \frac{1,96}{\sqrt{21-3}}\right]\right\} + 1} \right]$$

$$IC(\rho; 0,95): [0,9248; 0,9878]$$

4. Conclusão: Concluímos com 95% de confiança que os limites 0,9248 e 0,9878 compreendem o coeficiente de correlação populacional.

Tabela I. Área sob a curva normal padrão de 0 a z, $P(0 \le Z \le z)$.

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0754
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2133	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2258	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2518	0,2549
0,7	0,2580	0,2612	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2996	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000

$$z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

2.4 Coeficiente de correlação de postos de Spearman

Estatística paramétrica x Estatística não paramétrica

- Em geral, os testes paramétricos presumem que as variáveis estudadas são mensuradas nas escalas intervalar ou de razão e são normalmente distribuídas em suas populações, ou amostradas em grande quantidade.
- Em comparação, as alternativas não paramétricas apresentam demandas menos rígidas, mas são testes menos eficientes de significância do que seus correlativos paramétricos.
- Como resultado, presumido que a hipótese nula seja falsa, existe mais chance de rejeitá-la utilizando um teste paramétrico do que um teste não paramétrico.
- Entretanto, os resultados de um teste paramétrico cujas pressuposições não foram satisfeitas podem ficar destituídos de qualquer interpretação significativa. Sob tais condições, os testes não paramétricos podem ser uma melhor opção.

Análise de correlação entre duas variáveis

- Quando os dados de alguma das variáveis em estudo mostram-se com distribuição muito assimétrica ou com valores discrepantes, a análise de correlação por meio do r de Pearson pode ficar comprometida.
- Uma alternativa é aplicar a abordagem não paramétrica do coeficiente de Spearman, que mede a intensidade da relação entre variáveis ordinais. Usa, em vez do valor observado, apenas a ordem das observações. Deste modo, este coeficiente não é sensível a assimetrias na distribuição, nem à presença de valores discrepantes, não exigindo, portanto, que os dados provenham de populações normais.
- Aplica-se igualmente em variáveis intervalares/razão como alternativa ao r de Pearson, quando a pressuposição de normalidade é violada. Nos casos em que os dados não formam uma nuvem "bem comportada", com alguns pontos muito afastados dos restantes, ou em que parece existir uma relação crescente ou decrescente em formato de curva, o coeficiente de Spearman é mais apropriado.

Análise de correlação

Correlação	Método paramétrico	Método não paramétrico
2 variáveis	Coeficiente de correlação linear de Pearson	Coeficiente de correlação de postos de Spearman

Métodos para comparações entre amostras

Amostras	Métodos paramétrico	Métodos não paramétricos
2 grupos independentes	Intervalo de confiança (1 ou 2 grupos) Teste t de Student (1 ou 2 grupos) Comparação entre 2 proporções	Teste de Qui-quadrado Teste U de Mann Whitney Teste exato de Fischer
Mais de 2 grupos independentes	Análise da variância (1 ou mais fatores) Testes de comparações múltiplas	Teste de Qui-quadrado Teste de Kruskall Wallis
2 grupos pareados	Teste t de Student pareado	Teste de MacNemar Teste de Wilcoxon
Mais de 2 grupos pareados	Análise da variância para medidas repetidas	Teste de Friedman

Coeficiente de correlação de postos de Spearman

- É uma medida não paramétrica que atribui postos aos valores das variáveis. Por exemplo, ao menor valor da variável é atribuído o posto 1, ao segundo menor, o posto 2, e assim por diante. Nota-se que o posto é o número de ordem do valor da variável.

- Quando ocorre algum empate (repetição de algum valor) considera-se que isto tenha acontecido por deficiência do instrumento de medida e atribui-se postos sequenciais aos valores repetidos, mas em seguida calcula-se a média dos postos dos valores empatados.

- É denotado r_s e definido pela seguinte expressão:

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum d_i^2}{n(n^2 - 1)}$$

- O r_s é o próprio coeficiente de Pearson (r) calculado sobre os postos. Assim, também varia entre 1 e -1, e tem a mesma interpretação.

Exigências para o uso do coeficiente de correlação de postos

O coeficiente de correlação de postos deve ser empregado quando as seguintes condições forem satisfeitas:

- ⇨ Dados ordinais: ambas as variáveis X e Y tem de ser ordenadas.
- ⇨ Amostragem aleatória: os membros da amostras devem ser extraídos aleatoriamente uma população maior para que o teste de significância possa ser aplicado.

Exemplo:

Um engenheiro está estudando a bacia do rio São Francisco. Um dos objetivos da pesquisa é verificar se existe correlação entre a **área de drenagem** e a **vazão média** de longo termo, observadas em **22 estações** fluviométricas do alto rio. Os valores observados foram os seguintes:

Tabela 1. Área de drenagem e vazão média (Q) de 22 estações fluviométricas da bacia do alto rio São Francisco.

Estação	Área	Q (m^3/s)	Estação	Área	Q (m^3/s)
1	83,9	1,32	12	3727,4	65,30
2	188,3	2,29	13	4142,9	75,00
3	279,4	4,24	14	4874,2	77,20
4	481,3	7,34	15	5235,0	77,50
5	675,7	8,17	16	5414,2	86,80
6	769,7	8,49	17	5680,4	85,70
7	875,8	18,90	18	8734,0	128,00
8	964,2	18,30	19	10191,5	152,00
9	1206,9	19,30	20	13881,8	224,00
10	1743,5	34,20	21	14180,1	241,00
11	2242,4	40,90	22	29366,2	455,00

Os gráficos de caixa indicam que as distribuições dos dados de área de drenagem e de vazão média são assimétricas e possuem valores discrepantes. Por esta razão, será utilizado o coeficiente de correlação de postos de Spearman.

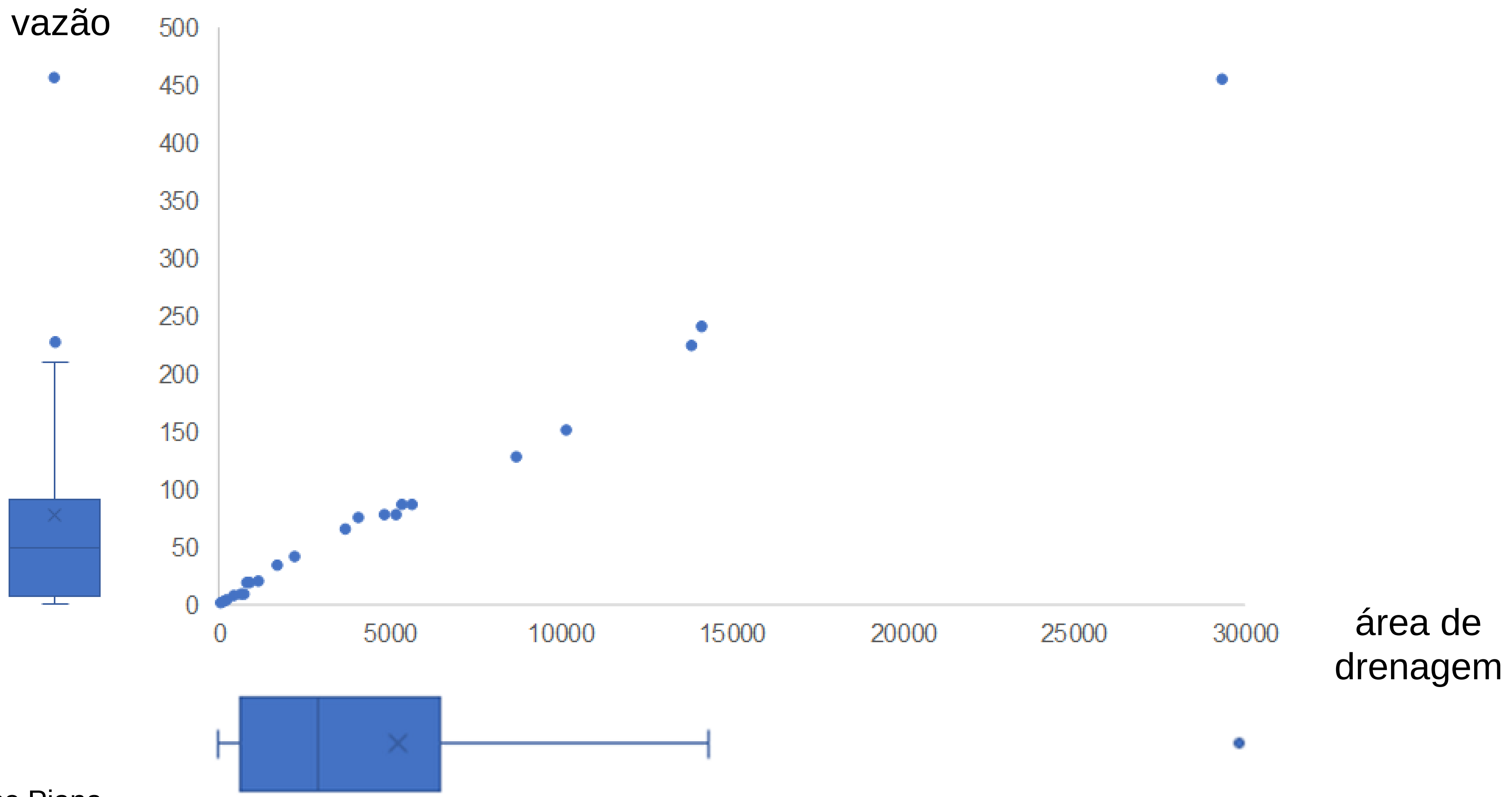


Tabela auxiliar

i	x_i	Posto de x_i	y_i	Posto de y_i	di	d_i^2
1	83,9	1	1,32	1	0	0
2	188,3	2	2,29	2	0	0
3	279,4	3	4,24	3	0	0
4	481,3	4	7,34	4	0	0
5	675,7	5	8,17	5	0	0
6	769,7	6	8,49	6	0	0
7	875,8	7	18,9	8	-1	1
8	964,2	8	18,3	7	1	1
9	1206,9	9	19,3	9	0	0
10	1743,5	10	34,2	10	0	0
11	2242,4	11	40,9	11	0	0
12	3727,4	12	65,3	12	0	0
13	4142,9	13	75	13	0	0
14	4874,2	14	77,2	14	0	0
15	5235	15	77,5	15	0	0
16	5414,2	16	86,8	17	-1	1
17	5680,4	17	85,7	16	1	1
18	8734	18	128	18	0	0
19	10191,5	19	152	19	0	0
20	13881,8	20	224	20	0	0
21	14180,1	21	241	21	0	0
22	29366,2	22	455	22	0	0
	$\sum$	-	-	-	-	4

d_i = posto de x_i – posto de y_i

Cálculo do r_s

$$r_s = 1 - \frac{6\sum d_i^2}{n(n^2-1)}$$

$$r_s = 1 - \frac{6 \times 4}{22(22^2-1)} = 1 - \frac{24}{10626} = 0{,}9977$$

Existe correlação positiva forte (r_s>0,8) entre os postos da área de drenagem e da vazão média.

Significado: valores altos de área de drenagem estão associados a valores altos vazão média e vice-versa.

Teste de hipótese

1. Hipóteses estatísticas: $\begin{cases} H_0 : \rho_s = 0 \\ H_1 : \rho_s \neq 0 \end{cases}$

2. Taxa de erro

3. Coeficiente calculado na amostra

4. Decisão e conclusão:

Buscar na tabela o valor absoluto mínimo (crítico) para o r_s ser significativo, com base no tamanho da amostra (n) e no nível de significância (α).

Comparar o valor calculado com o valor crítico:

- Se o valor calculado (em módulo) for maior ou igual ao valor crítico, rejeita-se H_0.

$|r_s \text{ calculado}| \geq r_s \text{ crítico} \rightarrow$ Rejeita-se H_0

- Se o valor calculado (em módulo) for menor que o valor crítico, não se rejeita H_0.

$|r_s \text{ calculado}| < r_s \text{ crítico} \rightarrow$ Não se Rejeita H_0

Tabela 5. Valores críticos do coeficiente r_s para um teste bilateral.

n	Nível de significância (α)		n	Nível de significância (α)	
	0,05	0,01		0,05	0,01
5	1,000	-	18	0,474	0,600
6	0,886	1,000	19	0,460	0,584
7	0,786	0,929	20	0,477	0,570
8	0,738	0,881	21	0,436	0,556
9	0,700	0,833	22	0,425	0,544
10	0,648	0,794	23	0,416	0,532
11	0,618	0,755	24	0,407	0,521
12	0,587	0,727	25	0,395	0,511
13	0,560	0,703	26	0,390	0,501
14	0,538	0,679	27	0,383	0,492
15	0,521	0,657	28	0,375	0,483
16	0,503	0,635	29	0,369	0,475
17	0,488	0,618	30	0,362	0,467

Fonte: BARBETTA (2014).

Esta tabela se aplica apenas aos casos em que a amostra é pequena ($n \leq 30$).

Para amostras grandes (n>30), deve-se testar a hipótese utilizando a expressão

$$z = r_s \sqrt{n-1}$$

que tende a ter uma distribuição normal e pode ser comparada a valores críticos de z, encontrados na tabela da distribuição normal padrão.

Teste de hipótese

1. Hipóteses estatísticas: $\begin{cases} H_0 : \rho_s = 0 \\ H_1 : \rho_s \neq 0 \end{cases}$

2. Taxa de erro: $\alpha = 0{,}05$

3. Coeficiente calculado na amostra: $r_s = 0{,}9977$

4. Decisão e conclusão:

$\left.\begin{matrix} n = 22 \\ \alpha = 0{,}05 \end{matrix}\right\}$ r_s crítico = 0,425

$|0{,}9989| > 0{,}425 \rightarrow$ Rejeita-se H_0

Concluímos, ao nível de 5% de significância, que o coeficiente de correlação de postos populacional difere de zero. Portanto, existe uma correlação positiva e significativa entre os postos da área de drenagem e da vazão média do rio São Francisco. Valores altos de área estão associados a valores altos de vazão média.

Tabela 5. Valores críticos do coeficiente r_s para um teste bilateral.

n	Nível de significância (α)		n	Nível de significância (α)	
	0,05	0,01		0,05	0,01
5	1,000	-	18	0,474	0,600
6	0,886	1,000	19	0,460	0,584
7	0,786	0,929	20	0,477	0,570
8	0,738	0,881	21	0,436	0,556
9	0,700	0,833	22	0,425	0,544
10	0,648	0,794	23	0,416	0,532
11	0,618	0,755	24	0,407	0,521
12	0,587	0,727	25	0,395	0,511
13	0,560	0,703	26	0,390	0,501
14	0,538	0,679	27	0,383	0,492
15	0,521	0,657	28	0,375	0,483
16	0,503	0,635	29	0,369	0,475
17	0,488	0,618	30	0,362	0,467

Fonte: BARBETTA (2014).

Esta tabela se aplica apenas aos casos em que a amostra é pequena ($n \leq 30$).

$n = 22$

$\alpha = 0,05$

Exercício proposto:

Suponha que seja possível ordenar uma amostra de dez estudantes que estejam cursando o último ano da Universidade segundo a sua situação na turma e obter seus escores de QI. Nesta situação, deseja-se determinar o grau de associação entre a posição na turma de formando e o QI. Os dados observados constam na tabela abaixo:

Entrevistado	Situação na turma (x_i)	QI (y_i)
João	1	140
Eduarda	2	140
Maurício	3	115
Ana Carolina	4	132
Márcia	5	110
Matheus	6	110
Henrique	7	100
Paula	8	104
Jonas	9	90
Leonardo	10	110

a) Calcule o coeficiente de correlação de postos de Spearman entre a posição na turma (y) e o QI (x).

b) Verifique se a correlação entre as variáveis x e y é significativa, ou seja, teste a hipótese de que ρ_S=0.

Resolução: Tabela auxiliar

Entrevistado	Situação na turma (x_i)	QI (y_i)	Posto do QI	Correção dos postos de valores empatados	di	d_i^2
João	1	140	1	1,5	-0,5	0,25
Eduarda	2	140	2	1,5	0,5	0,25
Maurício	3	115	4	4	-1	1
Ana Carolina	4	132	3	3	1	1
Márcia	5	110	5	6	-1	1
Matheus	6	110	6	6	0	0
Henrique	7	100	9	9	-2	4
Paula	8	104	8	8	0	0
Jonas	9	90	10	10	1	1
Leonardo	10	110	7	6	4	16
Σ	-	-	-	-	-	24,5

Cálculo das médias dos postos de valores empatados

$$\frac{1+2}{2} = 1{,}5 \qquad \frac{5+6+7}{3} = 6$$

a) Cálculo e interpretação do r_s

$$r_s = 1 - \frac{6 \times 24{,}5}{10(10^2-1)} = 1 - \frac{147}{990} = 0{,}8515$$

Existe correlação positiva forte (r_s>0,8) entre a situação do formando na turma e o seu QI.

b) Teste de hipótese

1. Hipóteses estatísticas: $\begin{cases} H_0 : \rho_s = 0 \\ H_1 : \rho_s \neq 0 \end{cases}$

2. Taxa de erro: $\alpha = 0{,}05$

3. Coeficiente calculado na amostra:

r_s = 08515

4. Decisão e conclusão:

$\left.\begin{array}{l} \alpha = 0{,}05 \\ n = 10 \end{array}\right\}$ r_s crítico = 0,648

$|0{,}8515| > 0{,}648 \rightarrow$ Rejeita-se H_0

Concluímos, ao nível de 5% de significância, que o coeficiente de correlação de postos populacional difere de zero. Portanto, existe correlação positiva forte entre a situação do formando na turma e o QI.

Tabela 5. Valores críticos do coeficiente r_s para um teste bilateral.

n	Nível de significância (α)		n	Nível de significância (α)	
	0,05	0,01		0,05	0,01
5	1,000	-	18	0,474	0,600
6	0,886	1,000	19	0,460	0,584
7	0,786	0,929	20	0,477	0,570
8	0,738	0,881	21	0,436	0,556
9	0,700	0,833	22	0,425	0,544
10	$\boxed{0,648}$	0,794	23	0,416	0,532
11	0,618	0,755	24	0,407	0,521
12	0,587	0,727	25	0,395	0,511
13	0,560	0,703	26	0,390	0,501
14	0,538	0,679	27	0,383	0,492
15	0,521	0,657	28	0,375	0,483
16	0,503	0,635	29	0,369	0,475
17	0,488	0,618	30	0,362	0,467

Fonte: BARBETTA (2014).

Esta tabela se aplica apenas aos casos em que a amostra é pequena ($n \leq 30$).

$n = 10$
$\alpha = 0,05$

Bibliografia consultada

BARBETTA, P.A. **Estatística Aplicada às Ciências Sociais**. 9ª Ed. Florianópolis: Editora da UFSC, 2014. 320p.

LEVIN, J.; FOX, J.A.; FORDE, D.R. **Estatística para Ciências Humanas**. 11ª Ed. São Paulo: Editora Pearson, 2012. 458p.

MONTGOMERY, D.C.; RUNGER, G.C.; HUBELE. N.F. **Estatística Aplicada à Engenharia**. 2 ed. Rio de Janeiro: Editora LTC. 2004. 335p.

NAGHETTINI, M.; PINTO, E.J. de A. **Hidrologia estatística**. Belo Horizonte: CPRM, 2007. 552 p.

Sistema Galileu de Educação Estatística. Disponível em: http://www.galileu.esalq.usp.br