UNIDADE III - Elementos de probabilidades

3.1. Introdução à teoria das probabilidades
   3.1.1. Introdução
   3.1.2. Conceitos fundamentais
   3.1.3. Conceitos de probabilidade
   3.1.4. Teoremas para o cálculo de probabilidades
   3.1.5. Probabilidade condicional e independência
3.2. Variáveis aleatórias
   3.2.1. Introdução e conceito
   3.2.2. Variáveis aleatórias discretas
   3.2.3. Variáveis aleatórias contínuas
3.3. Distribuições de probabilidade
   3.3.1. Distribuições de probabilidade de variáveis discretas
   3.3.2. Distribuições de probabilidade de variáveis contínuas

Distribuições de probabilidade de variáveis contínuas

- É difícil identificar o tipo de distribuição de probabilidade de uma variável contínua
  - pesquisa bibliográfica
  - observação do campo de variação da variável

Exemplos:

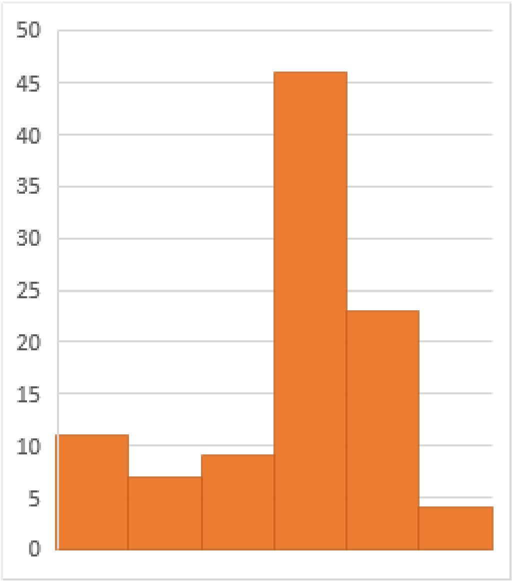
- **Distribuição gama:** descreve variáveis que assumem valores positivos.
- **Distribuição beta:** descreve variáveis que assumem valores no intervalo [0, 1].
- **Distribuição normal:** descreve variáveis que assumem valores no intervalo $(-\infty, +\infty)$.

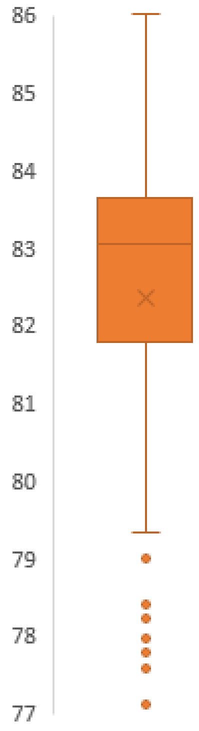
Distribuições de probabilidade de variáveis contínuas

- É difícil identificar o tipo de distribuição de probabilidade de uma variável contínua
  - pesquisa bibliográfica
  - observação do campo de variação da variável
  - análise exploratória dos dados

Exemplo: Dados brutos

79,3	77,8	78,0	78,0	83,4	81,5	81,9	83,5	83,8	83,1
78,2	78,5	78,5	78,4	83,2	82,2	84,5	83,4	84,3	82,8
79,0	79,4	80,7	78,1	82,5	83,1	83,8	83,5	83,1	82,7
78,0	77,1	80,8	77,6	81,4	82,3	83,4	83,9	83,2	83,4
79,0	79,0	79,9	79,0	81,9	82,8	81,8	84,5	83,1	81,2
83,6	82,6	82,4	83,8	83,5	83,3	85,6	83,8	84,1	82,8
83,7	83,1	83,0	83,2	84,4	84,3	81,9	82,7	83,3	82,7
81,9	83,5	83,9	81,1	82,6	82,6	84,3	83,6	83,9	86,0
84,2	83,7	83,1	84,2	83,3	83,0	83,8	84,4	83,4	82,7
83,5	82,3	82,2	83,4	82,9	84,6	83,0	85,4	82,5	85,4





Análise exploratória informa sobre o formato da distribuição dos dados amostrais

Algumas distribuições contínuas

1. Distribuição Normal

  *** Distribuição Normal Padrão**

  * Distribuição Seminormal

2. Distribuição Exponencial

3. Distribuição Uniforme

4. Distribuição Gama

5. Distribuição Beta

6. Distribuição Lognormal

7. Distribuição Weibull

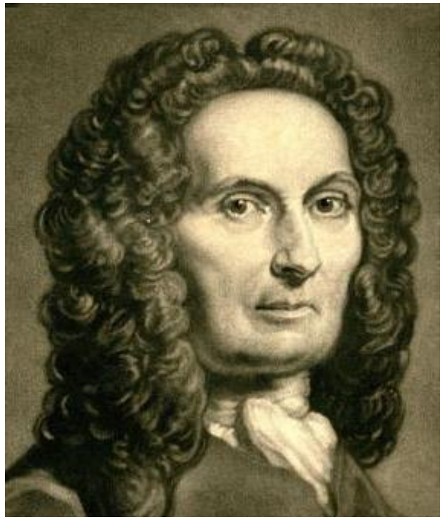
8. Distribuição Gumbel

→ eventos climáticos extremos

3.3.2.1 Distribuição normal

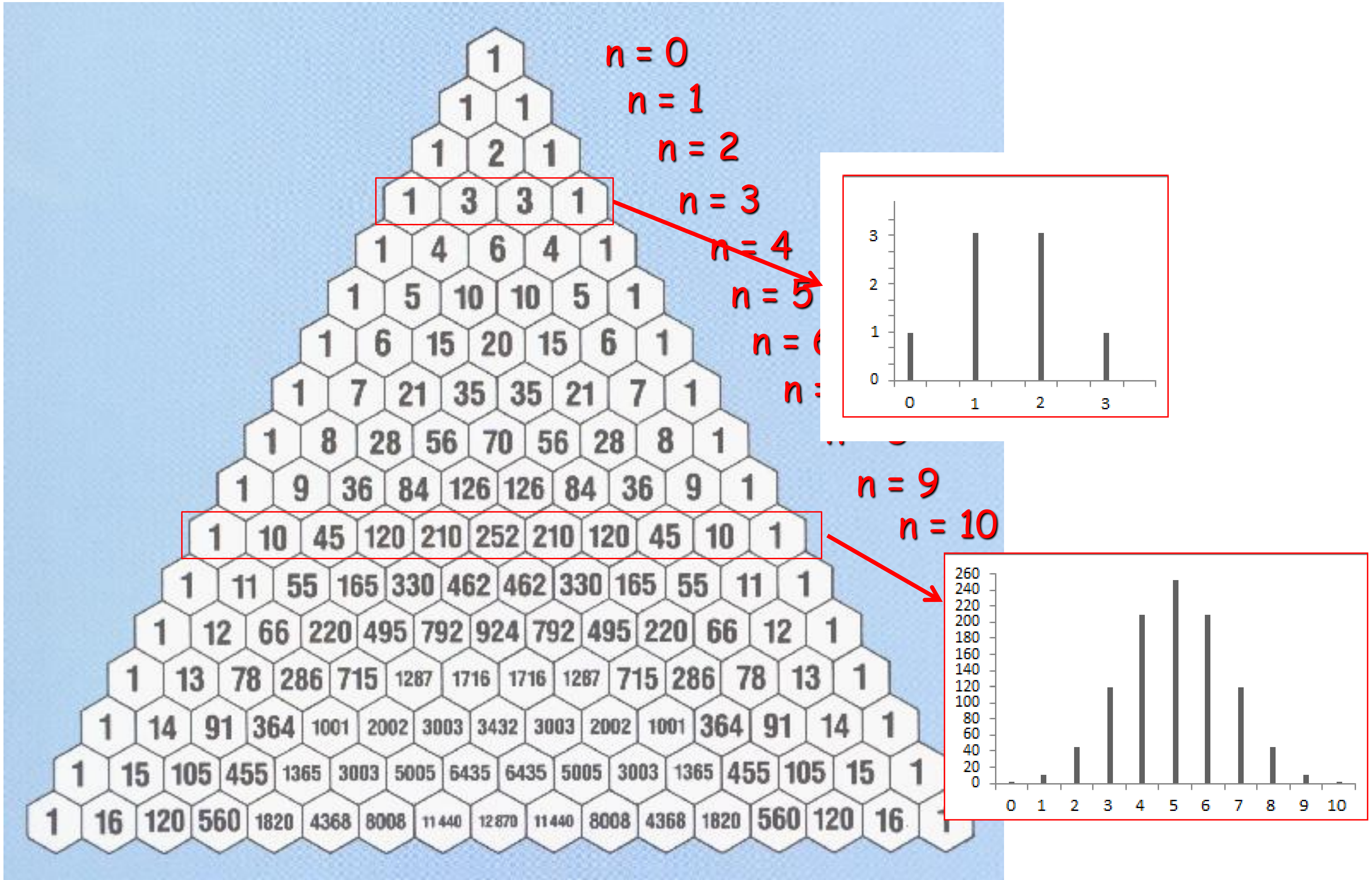
Síntese histórica

A distribuição normal foi primeiramente obtida por Abraham De Moivre, num artigo de 1734, no contexto de aproximação da distribuição binomial quando o número n de experimentos de Bernoulli cresce.
De Moivre se deparou com a curva normal ao buscar uma aproximação para os números que habitam regiões do triângulo de Pascal.



Abraham De Moivre
(1667 - 1754)

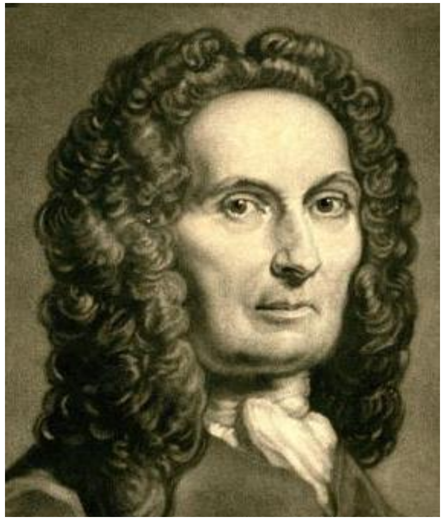
Triângulo de Pascal



3.3.2.1 Distribuição normal

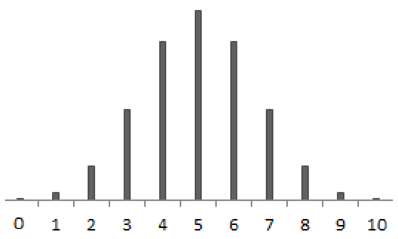
Síntese histórica

A distribuição normal foi primeiramente obtida por **Abraham De Moivre**, num artigo de 1734, no contexto de aproximação da distribuição binomial quando o número n de experimentos de Bernoulli cresce.
De Moivre se deparou com a curva normal ao buscar uma aproximação para os números que habitam regiões do triângulo de Pascal.
Os gráficos abaixo representam as magnitudes de algumas linhas do **triângulo de Pascal**.

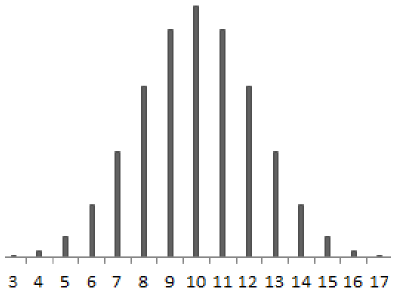


Abraham De Moivre
(1667 - 1754)

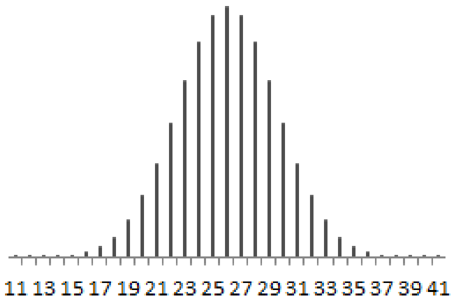
Linha 11
n = 10



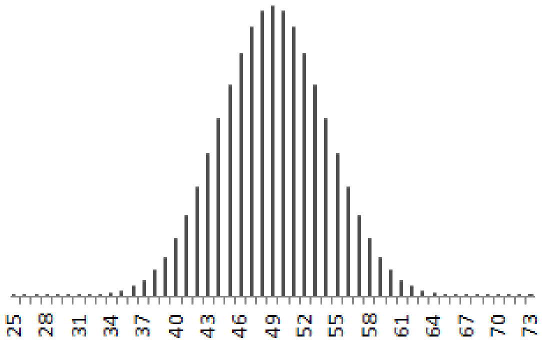
Linha 21
n = 20



Linha 51
n = 50



Linha 101
n = 100



Carl Friedrich Gauss
(1777 –1855)

Em 1809, Gauss assumiu que os erros de medida poderiam ser modelados pela distribuição normal. Ele teve essa percepção ao realizar medições astronômicas, enquanto trabalhava no problema dos movimentos planetários.

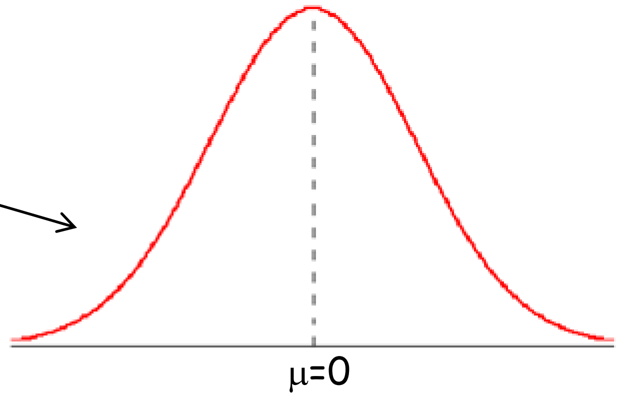
desvio = erro de medida

$$(x_i - \bar{x})$$

média dos erros

$$\frac{\sum (x_i - \bar{x})}{n} = 0$$

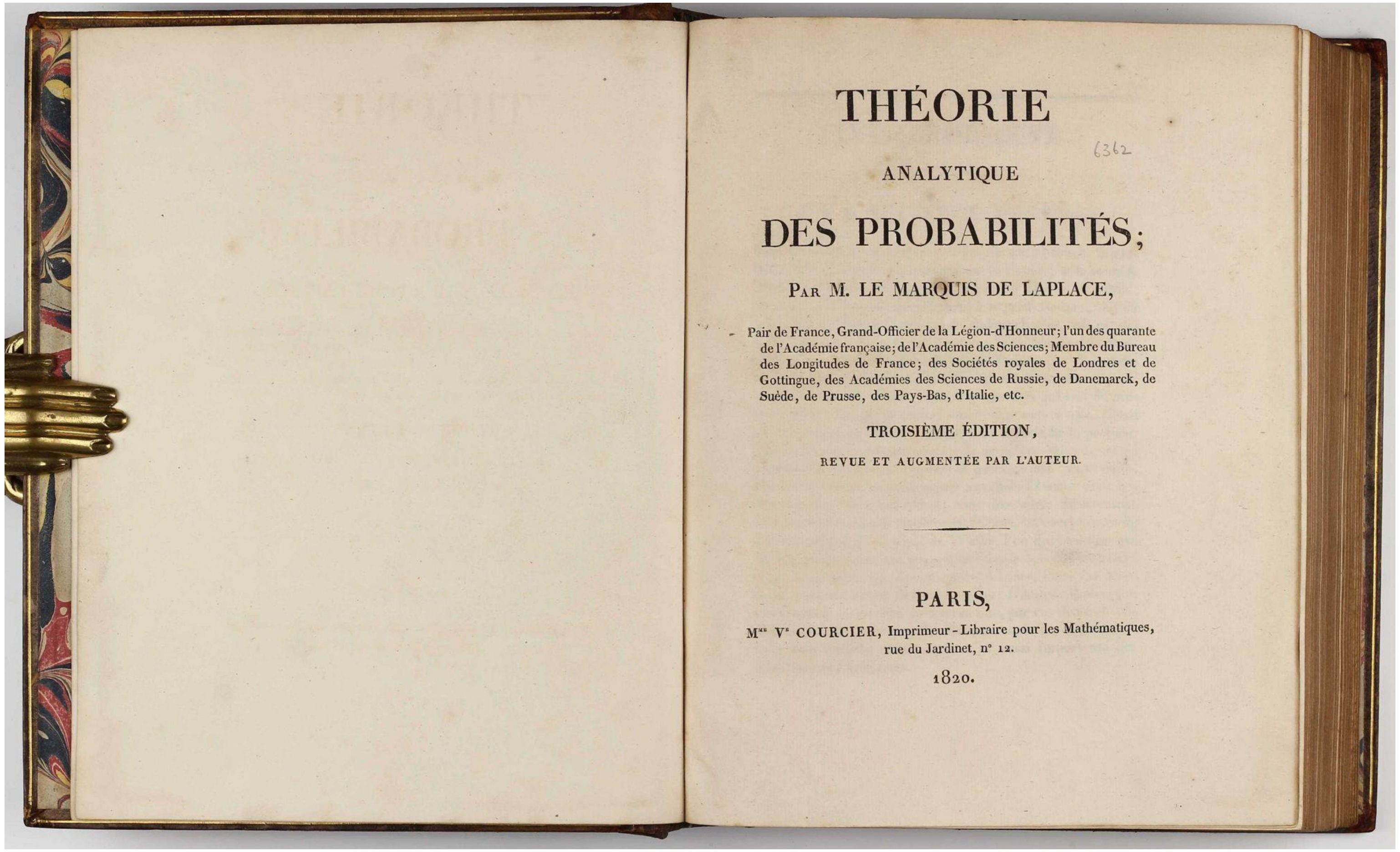
Distribuição dos erros de medida



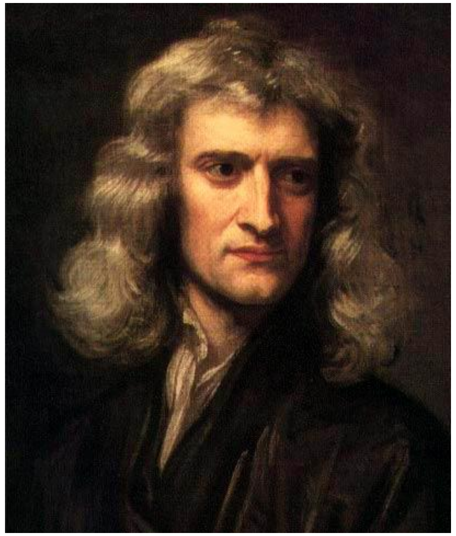
Em 1812, em seu livro "Theórie Analytique des Probabilités", Laplace melhorou o resultado encontrado por De Moivre para o que hoje é denominado Teorema de De Moivre-Laplace. Também foi Laplace quem tirou a distribuição normal da obscuridade e criou um argumento melhor do que o de Gauss para sustentar a noção de que a distribuição normal é, de fato, a lei dos erros.

Pierre-Simon Laplace
(1749 – 1827)

Em 1812, Laplace publicou sua *Théorie analytique des probabilités*, na qual apresentou muitos resultados fundamentais em estatística. A primeira metade deste tratado estava preocupada com métodos e problemas de probabilidade, a segunda metade aplica esses métodos a uma variedade de problemas na teoria do erro, teoria da decisão, probabilidade judicial e credibilidade das testemunhas.



Sobre os erros de medida...



Isaac Newton
(1642 - 1727)

Newton foi o primeiro a empregar a média para obter um único valor a partir de uma série de medições discordantes.
Mas a maior parte dos cientistas daquela época e no século seguinte não calculava a média, em vez disso, escolhia dentre suas medições um único "número áureo" considerado, essencialmente por palpite, o mais confiável dos resultados obtidos.
Isso porque não consideravam a variação como um subproduto inevitável do processo de mensuração, e sim como uma evidência de fracasso.

medições discordantes

$$x_i = \underline{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n}$$

$$\downarrow$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

valor mais razoável para a medida

desvio = erro de medida

$$(x_i - \bar{x})$$

Importância da distribuição normal

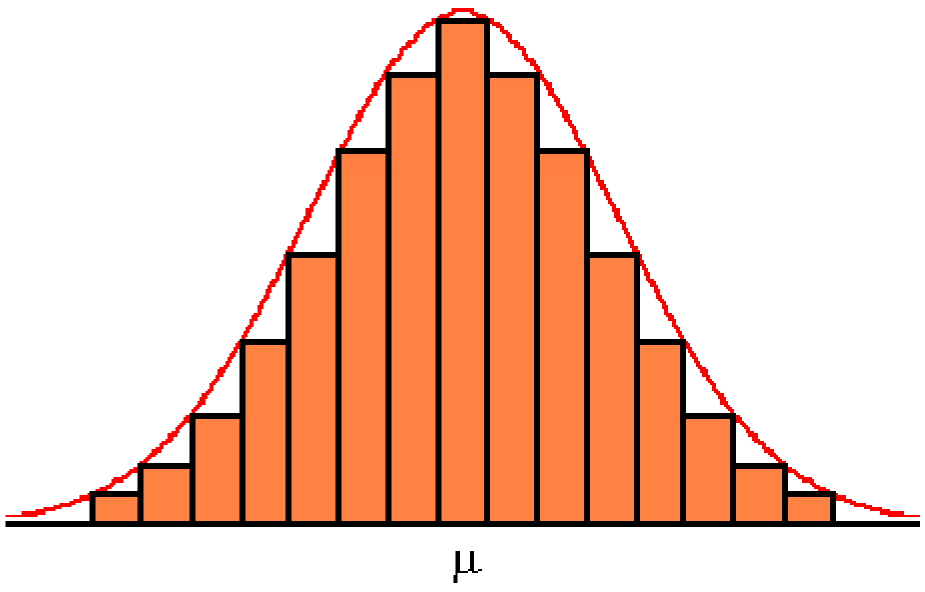
A distribuição normal é importante tanto do ponto de vista teórico como das aplicações. Essa importância se deve a um conjunto de aspectos:

- ⇨ Propriedades matemáticas
- ⇨ É útil para descrever uma grande quantidade de fenômenos naturais, físicos, ambientais, psicométricos etc, além dos erros de medida
- ⇨ Um grande número de variáveis aleatórias têm distribuições que convergem para a distribuição normal
- ⇨ Muitas variáveis não normais podem ser tratadas como normais após transformações simples
- ⇨ Uma grande quantidade de métodos e procedimentos de inferência estatística são derivados tendo-a como pressuposição básica

O conjunto de métodos desenvolvidos para tratar variáveis que têm distribuição normal forma a chamada **Estatística Clássica** ou **Estatística Paramétrica.**

1. Distribuição normal

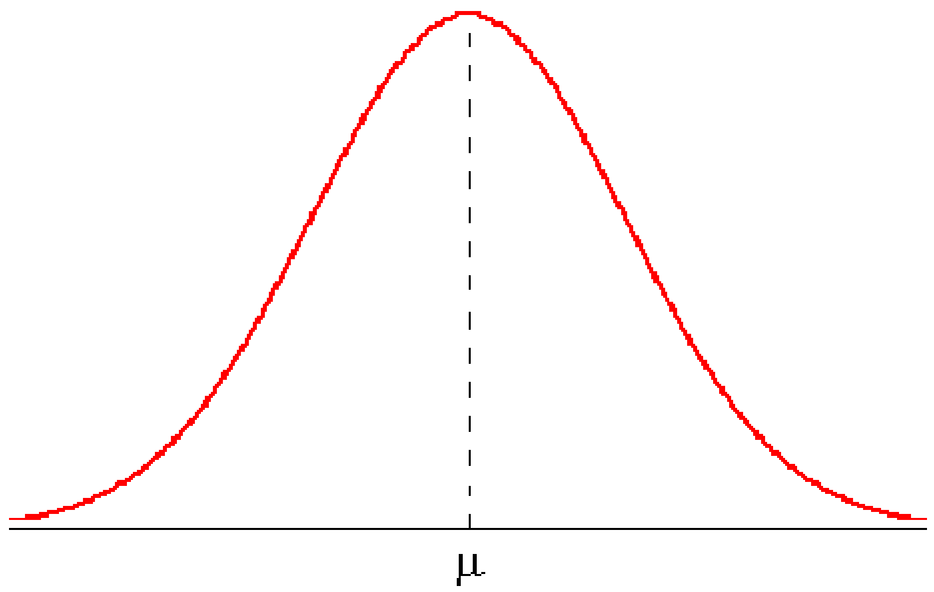
Definição: É uma distribuição teórica de frequências, onde a maioria das observações se situa em torno da **média** (centro) e diminui gradual e simetricamente no sentido dos extremos.



1. Distribuição normal

Definição: É uma distribuição teórica de frequências, onde a maioria das observações se situa em torno da **média** (centro) e diminui gradual e simetricamente no sentido dos extremos.

A distribuição normal é representada graficamente pela curva normal (curva de Gauss) que tem a forma de sino e é **simétrica** em relação ao centro, onde se localiza a média μ.

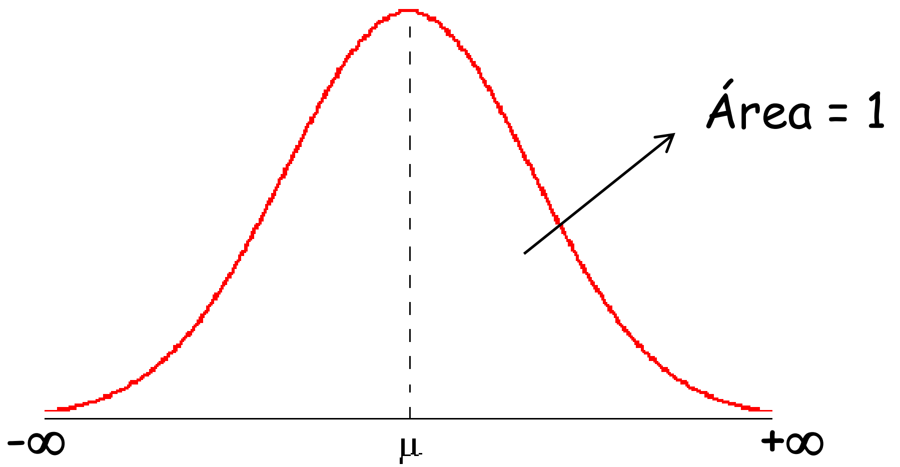


Função densidade de probabilidade

De modo geral, se X é uma variável contínua que tem distribuição de normal, sua função densidade de probabilidade será:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad , \text{para } S_X = (-\infty,+\infty)$$

- A distribuição normal é um membro da **família exponencial**.



Função densidade de probabilidade

De modo geral, se X é uma variável contínua que tem distribuição de normal, sua função densidade de probabilidade será:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \boxed{\text{parâmetros}}$$

, para $S_X = (-\infty, +\infty)$

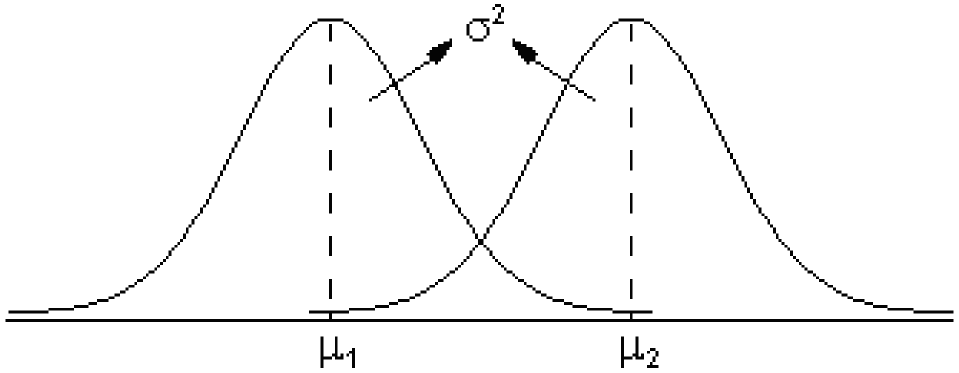
Parâmetros

A distribuição normal tem dois parâmetros:

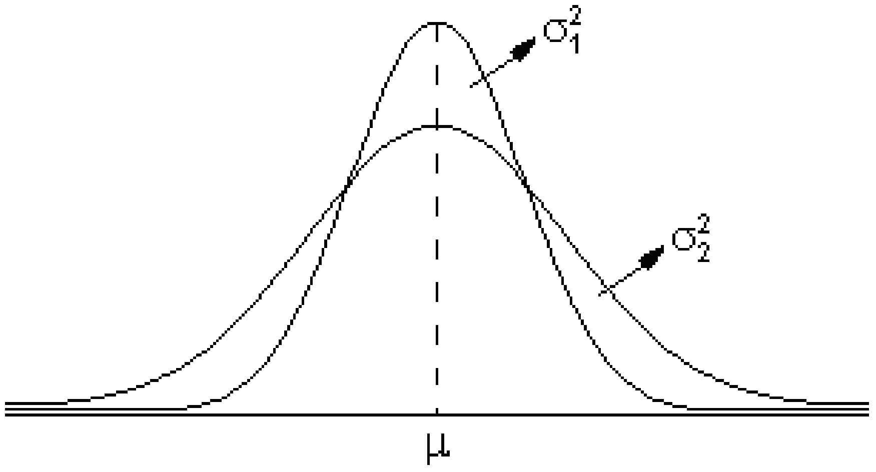
μ = média (determina o centro da distribuição)
σ^2 = variância (determina a dispersão da distribuição)

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

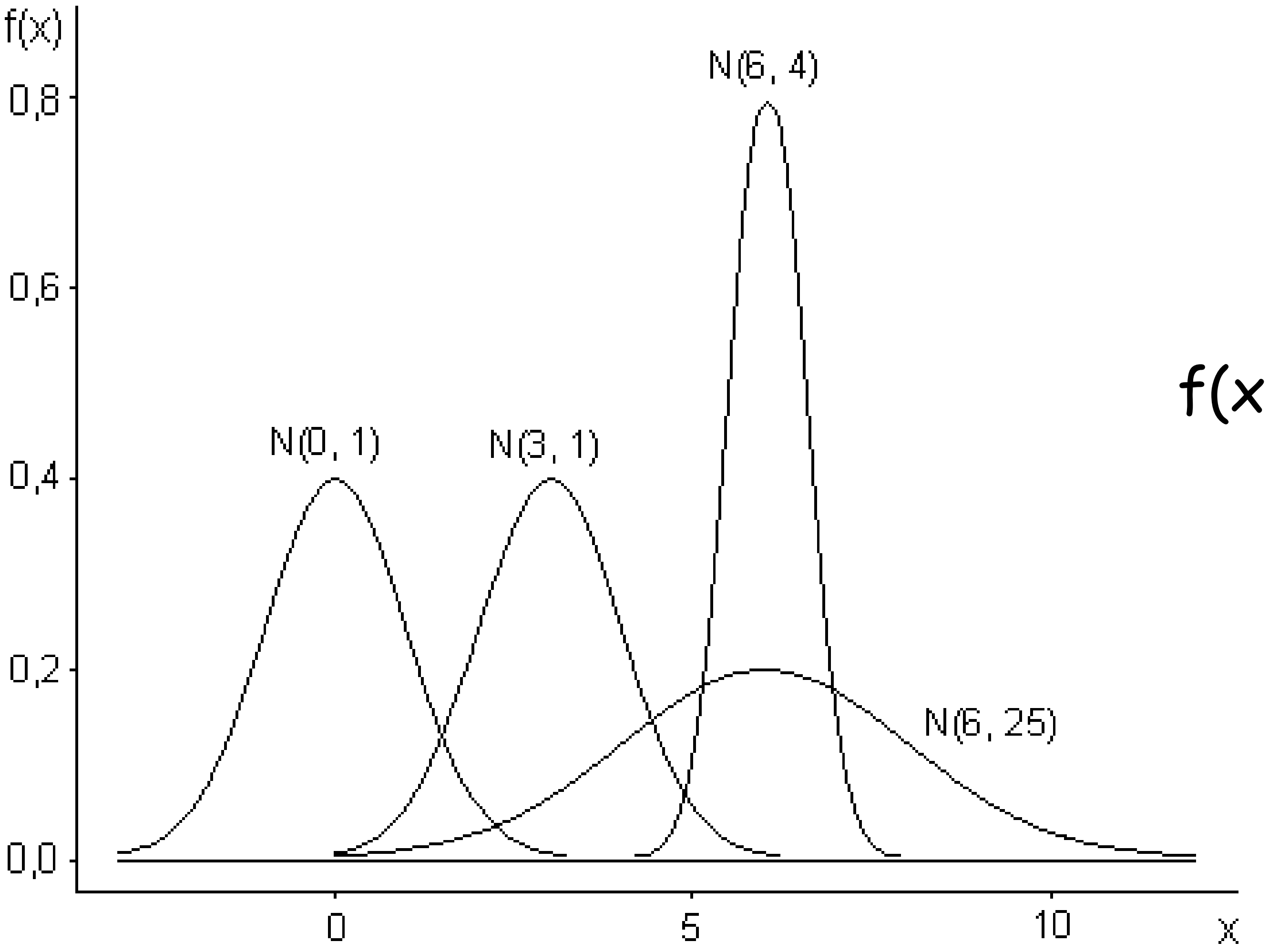
X tem distribuição normal com parâmetros μ e σ^2



Populações normais com médias diferentes e mesma variância



Populações normais com variâncias diferentes e mesma média

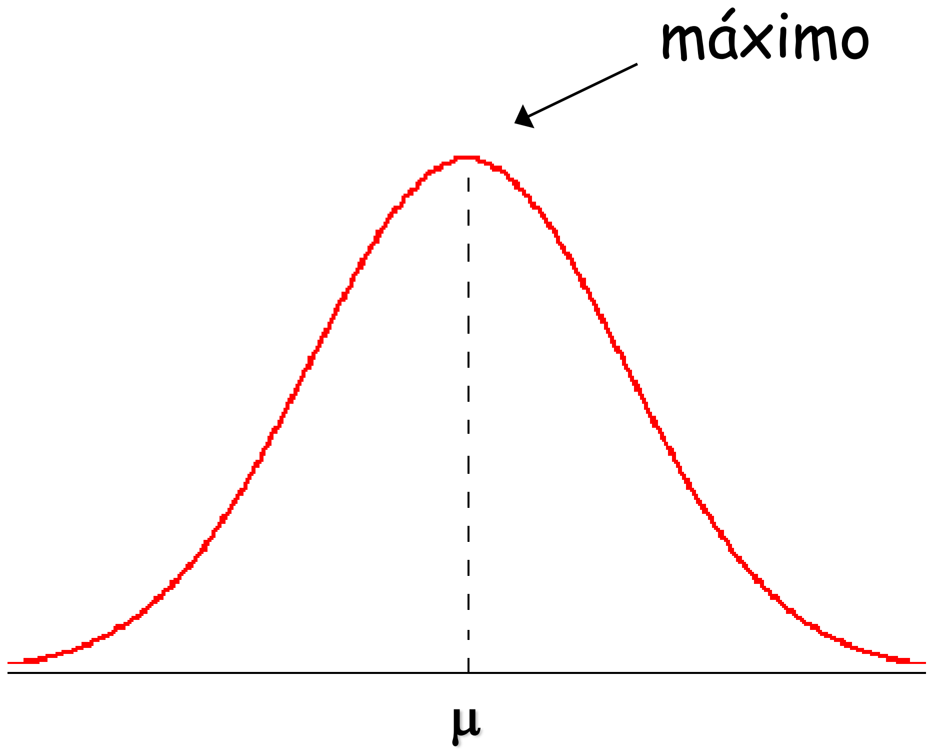


$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}}$$

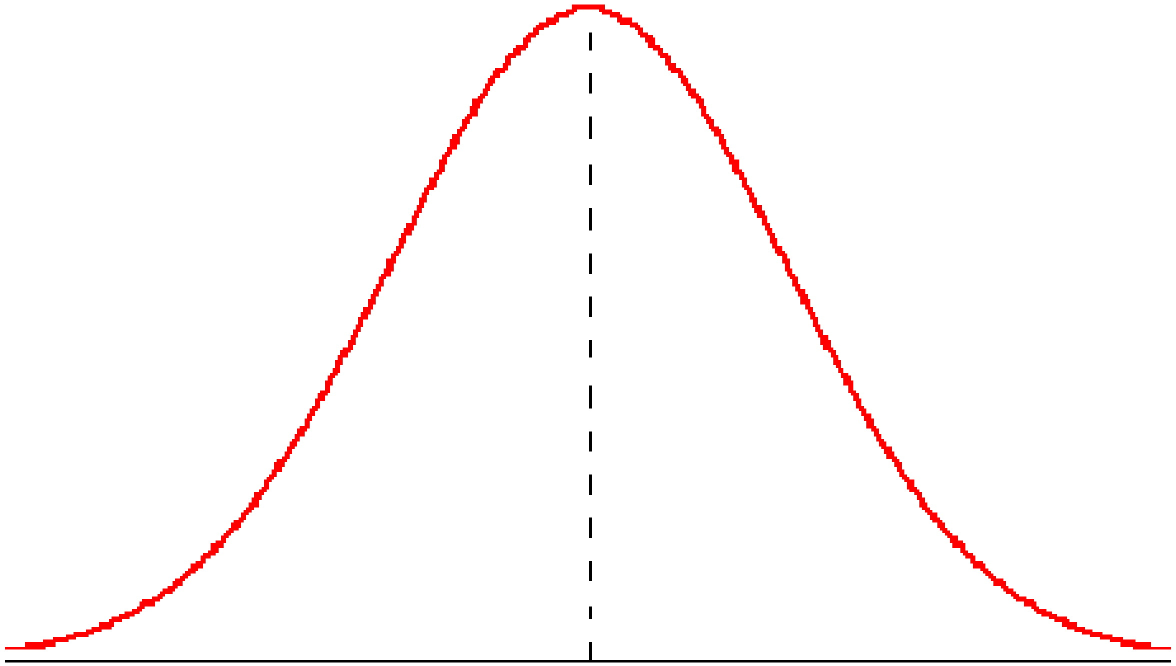
Existe um número infinito de curvas normais

Propriedades da distribuição normal

1. O máximo da função densidade de probabilidade se dá no ponto $\mathbf{x=\mu}$.

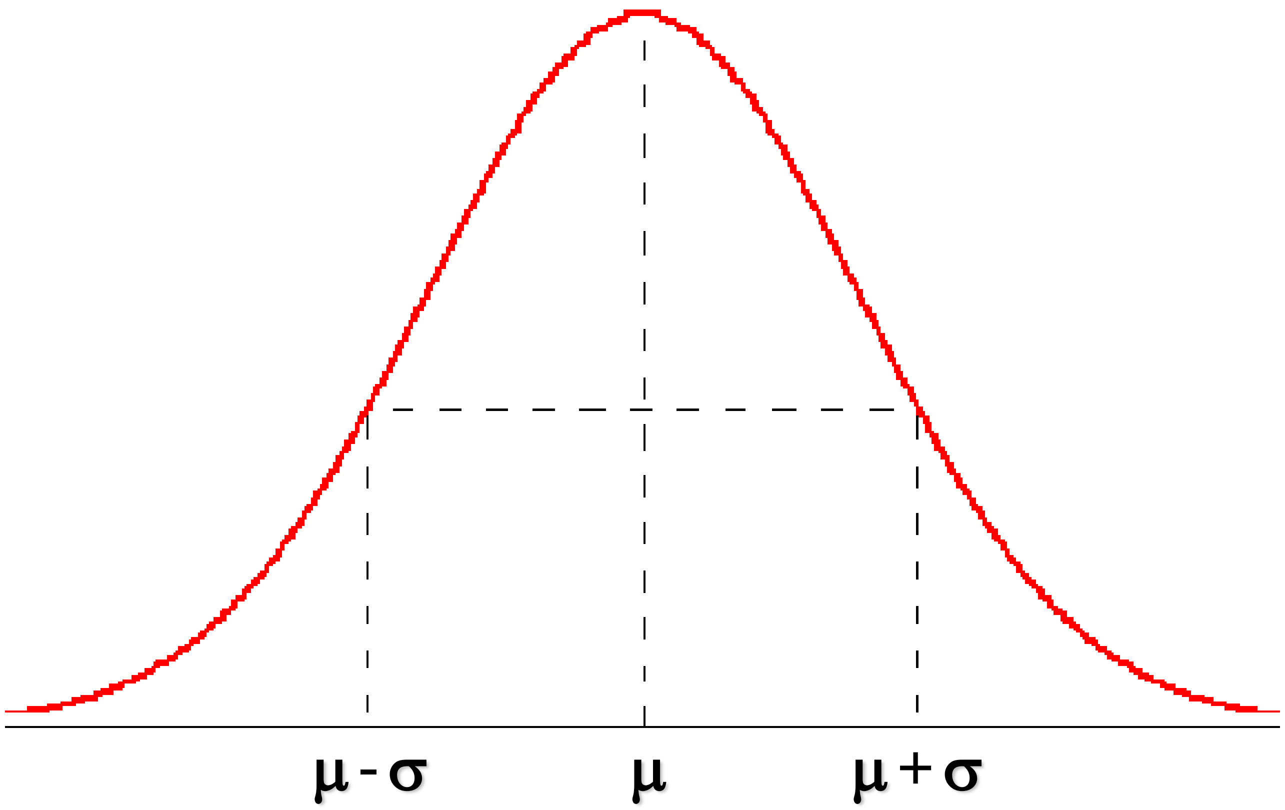


2. A distribuição é simétrica em relação ao centro onde coincidem a média, a moda e a mediana.



Md=μ=Mo

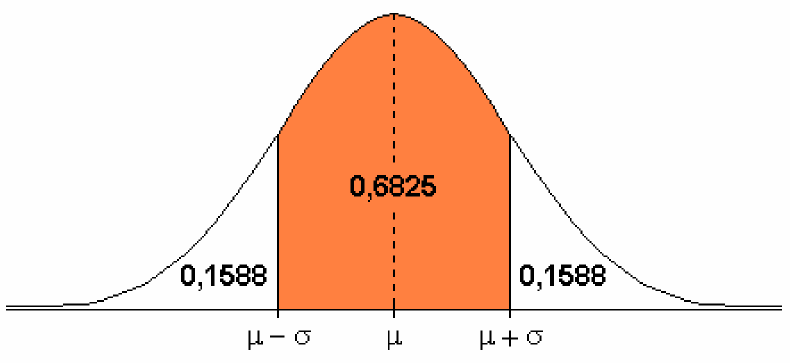
3. Os pontos de inflexão são exatamente $\mu-\sigma$ e $\mu+\sigma$.



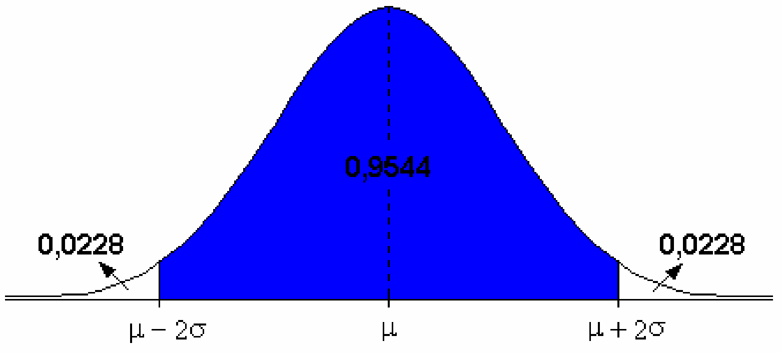
Ponto de inflexão: ponto onde a concavidade à direita tem sinal diferente ao da concavidade à esquerda

4. Verifica-se na distribuição normal que:

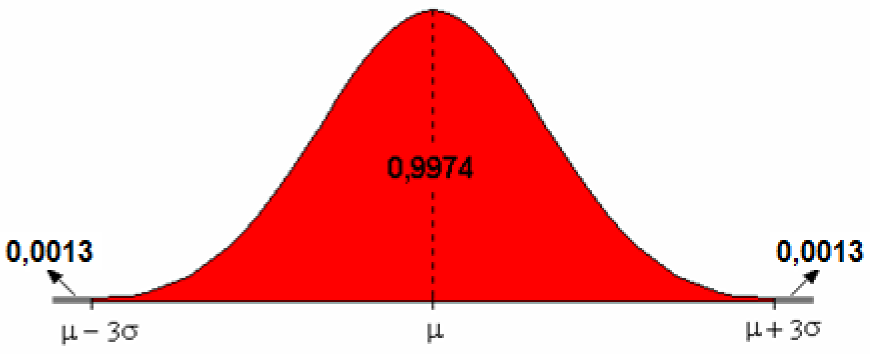
$$P(\mu-\sigma < X < \mu+\sigma) = 0,6825$$



$$P(\mu-2\sigma < X < \mu+2\sigma) = 0,9544$$



$$P(\mu-3\sigma < X < \mu+3\sigma) = 0,9974$$

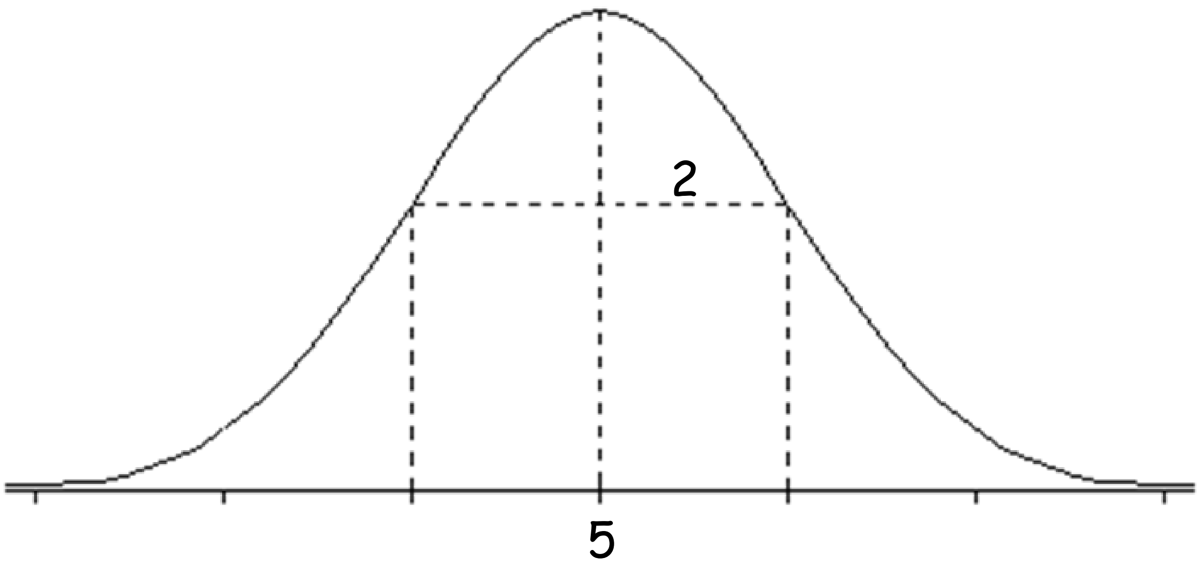


Se X é uma variável que tem distribuição normal com $\mu = 5$ e $\sigma^2 = 4$, calcule:

a) $P(3 < X < 7)$

b) $P(5 < X < 9)$

c) $P(4 < X < 10)$

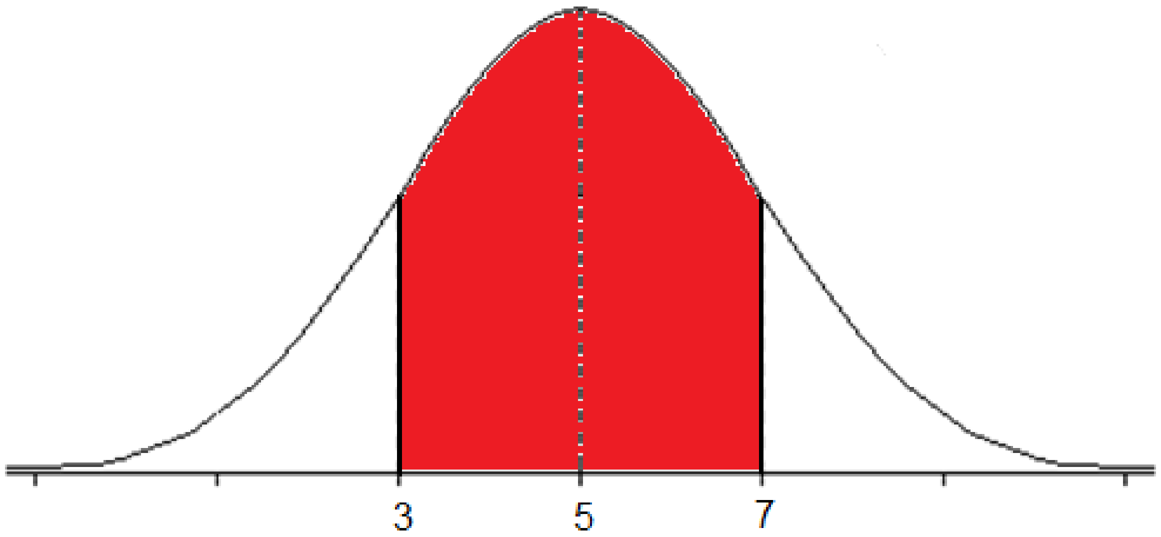


Se X é uma variável que tem distribuição normal com $\mu = 5$ e $\sigma^2 = 4$, calcule:

a) $P(3 < X < 7) = 0,6825$

b) $P(5 < X < 9)$

c) $P(4 < X < 10)$



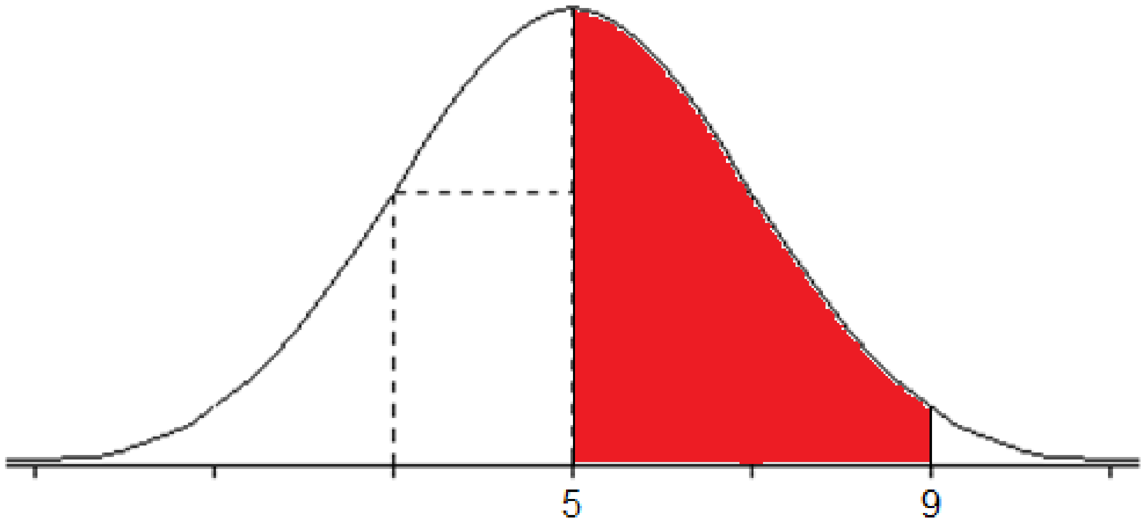
Esta área é obtida com base nas propriedades.

Se X é uma variável que tem distribuição normal com $\mu = 5$ e $\sigma^2 = 4$, calcule:

a) $P(3 < X < 7) = 0{,}6825$

b) $P(5 < X < 9) = 0{,}4772$

c) $P(4 < X < 10)$



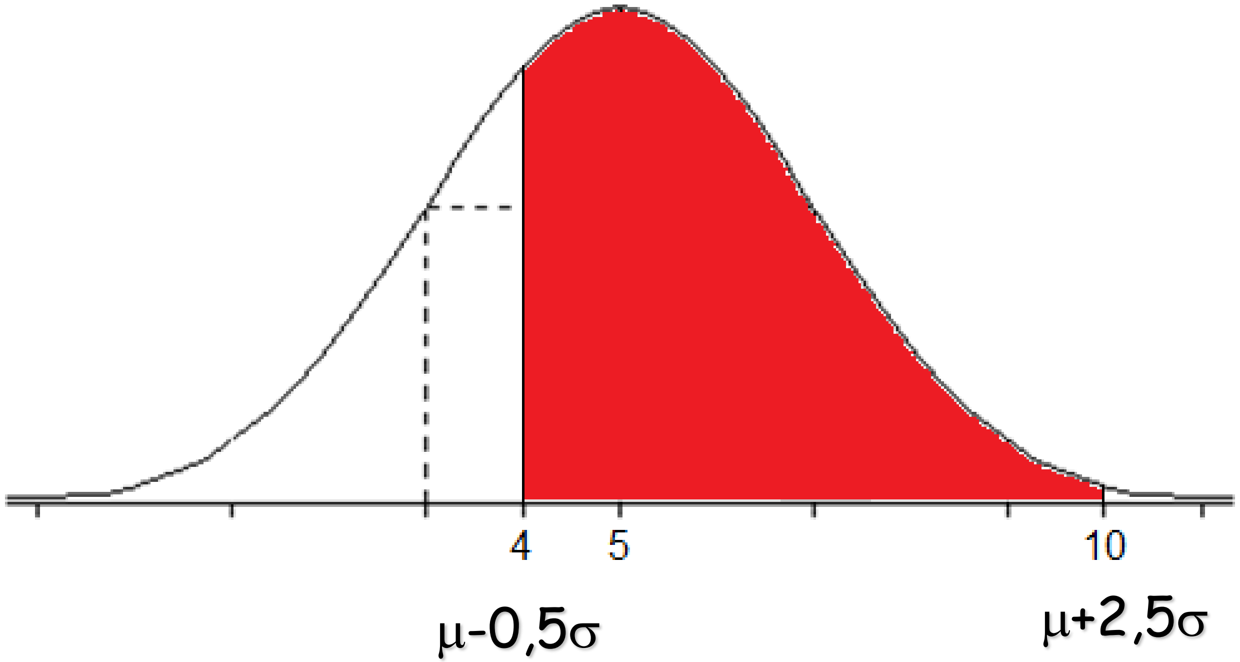
Esta área é obtida com base nas propriedades.

Se X é uma variável que tem distribuição normal com $\mu = 5$ e $\sigma^2 = 4$, calcule:

a) $P(3 < X < 7) = 0{,}6825$

b) $P(5 < X < 9) = 0{,}4772$

c) $P(4 < X < 10)$

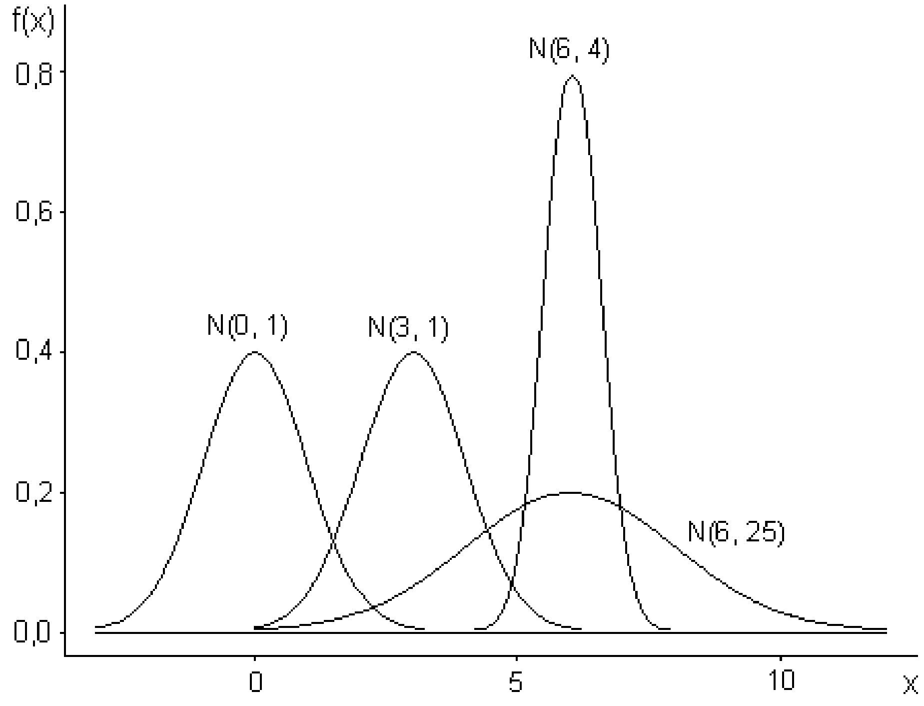


Esta área não pode ser obtida a partir das propriedades.

Cálculo de áreas

⇨ Para cada valor de μ e de σ, existe uma distribuição normal diferente

⇨ O cálculo de áreas sob a curva normal deverá ser feito sempre em função dos valores particulares de μ e σ



$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}}$$

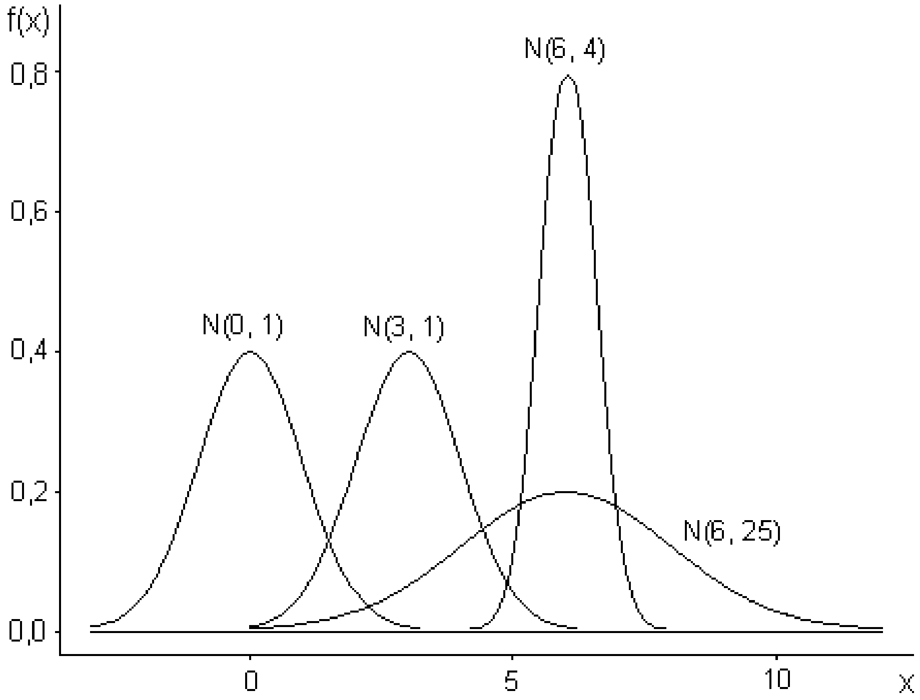
Cálculo da área:

$$\text{área} = \int_4^{10} \left(\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-5)^2}{8}} \right) dx$$

A função densidade de probabilidade f(x) da distribuição normal não tem função primitiva por isso não pode ser integrada analiticamente.

Cálculo de áreas

➡ Para cada valor de μ e de σ, existe uma distribuição normal diferente



➡ O cálculo de áreas sob a curva normal deverá ser feito sempre em função dos valores particulares de μ e σ

➡ Para evitar a trabalhosa tarefa de calcular as áreas foi determinada uma distribuição normal padrão ou reduzida

➡ As áreas sob a curva normal padrão foram calculadas e apresentadas numa tabela

Distribuição normal padrão

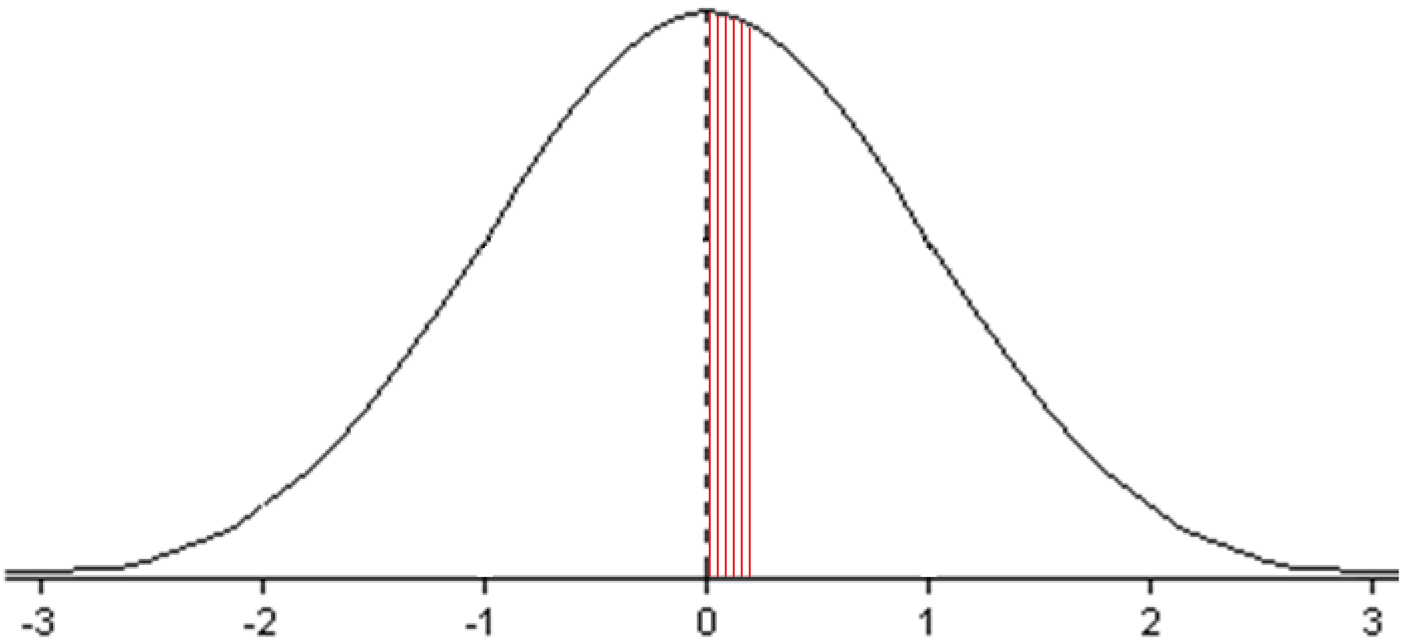
Definição: é a distribuição normal de uma variável Z que tem média igual a zero ($\mu=0$) e desvio padrão igual a um ($\sigma=1$).

Função densidade de probabilidade de uma variável X que tem distribuição normal

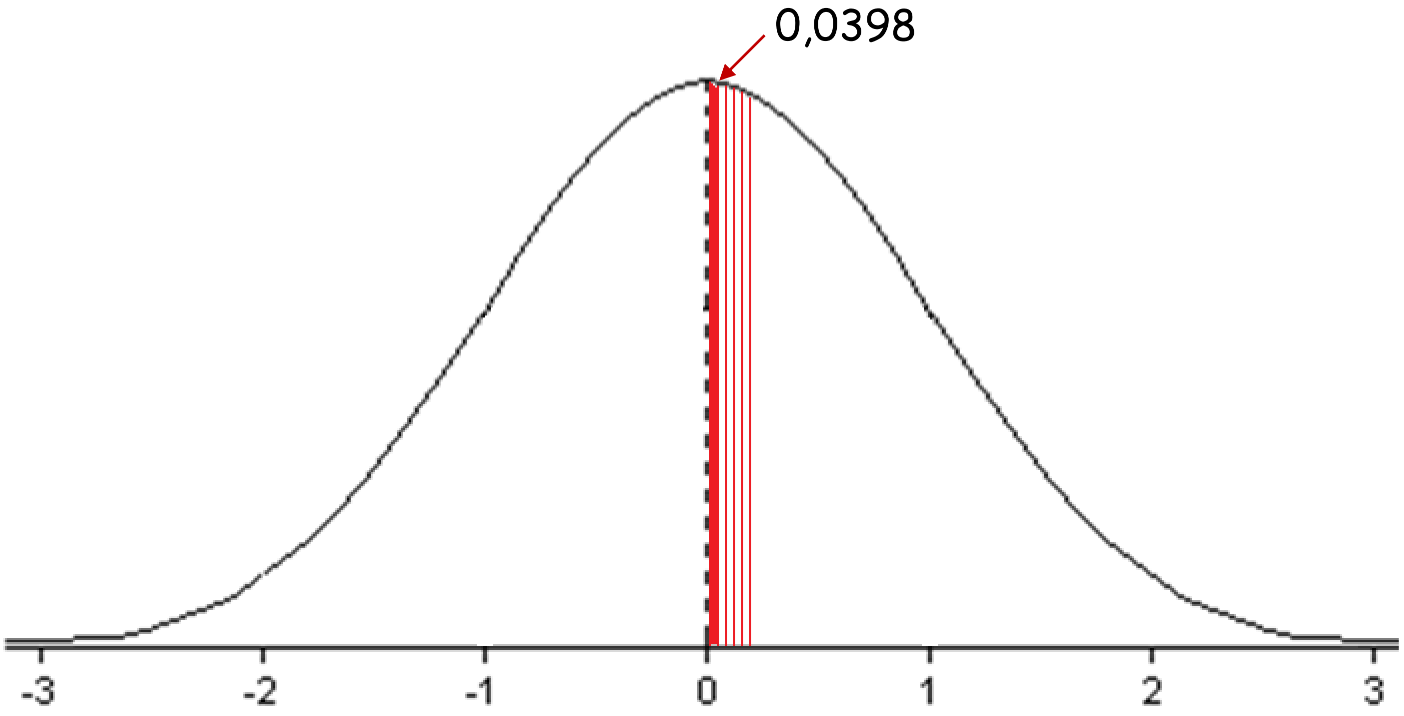
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad , \text{ para } S_X = (-\infty, +\infty)$$

Função densidade de probabilidade da variável Z que tem distribuição normal padrão

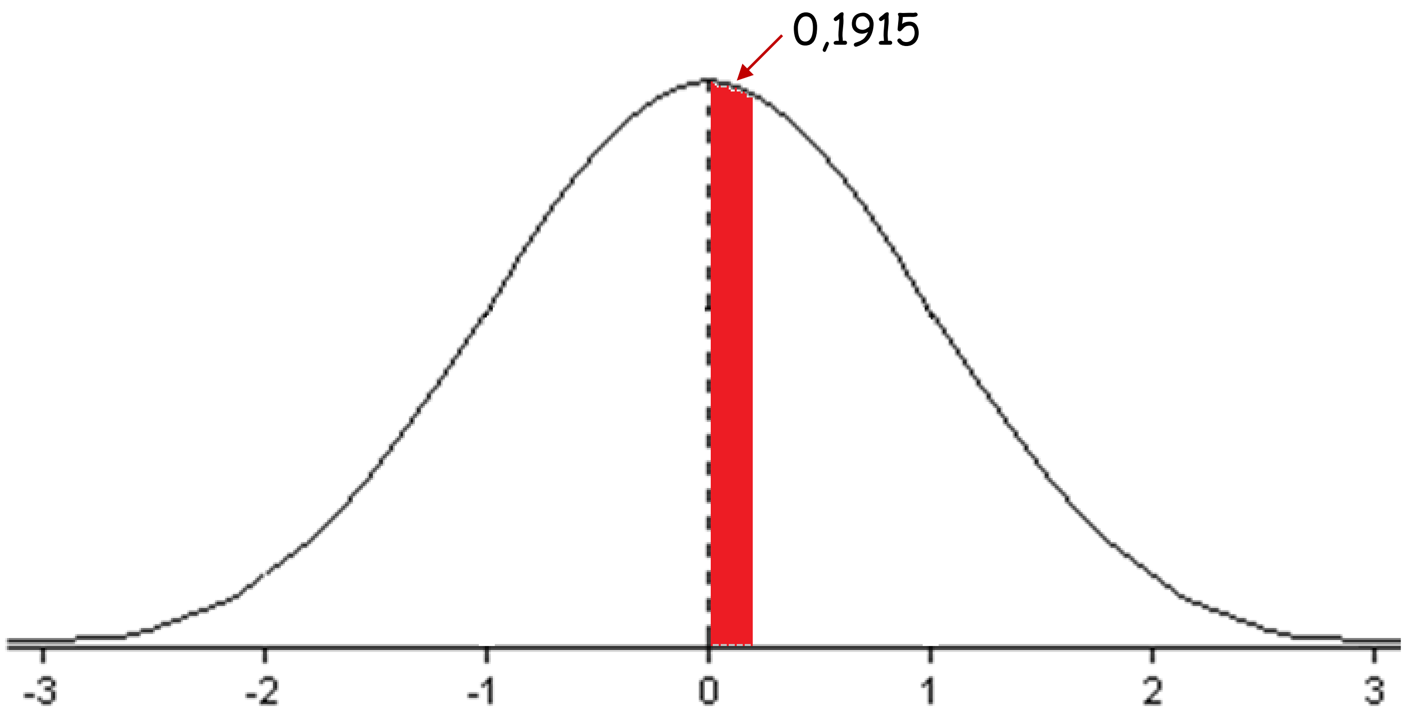
$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \quad , \text{ para } S_Z = (-\infty, +\infty)$$



A curva normal padrão foi dividida em pequenas tiras, cujas áreas foram calculadas e apresentadas numa tabela.



A curva normal padrão foi dividida em pequenas tiras, cujas áreas foram calculadas e apresentadas numa tabela.



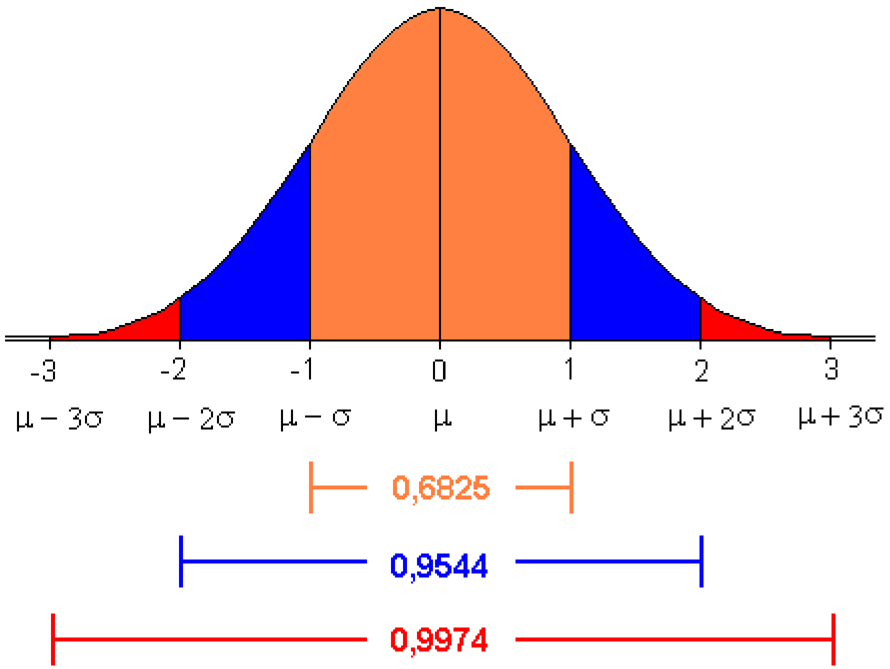
A curva normal padrão foi dividida em pequenas tiras, cujas áreas foram calculadas e apresentadas numa tabela.

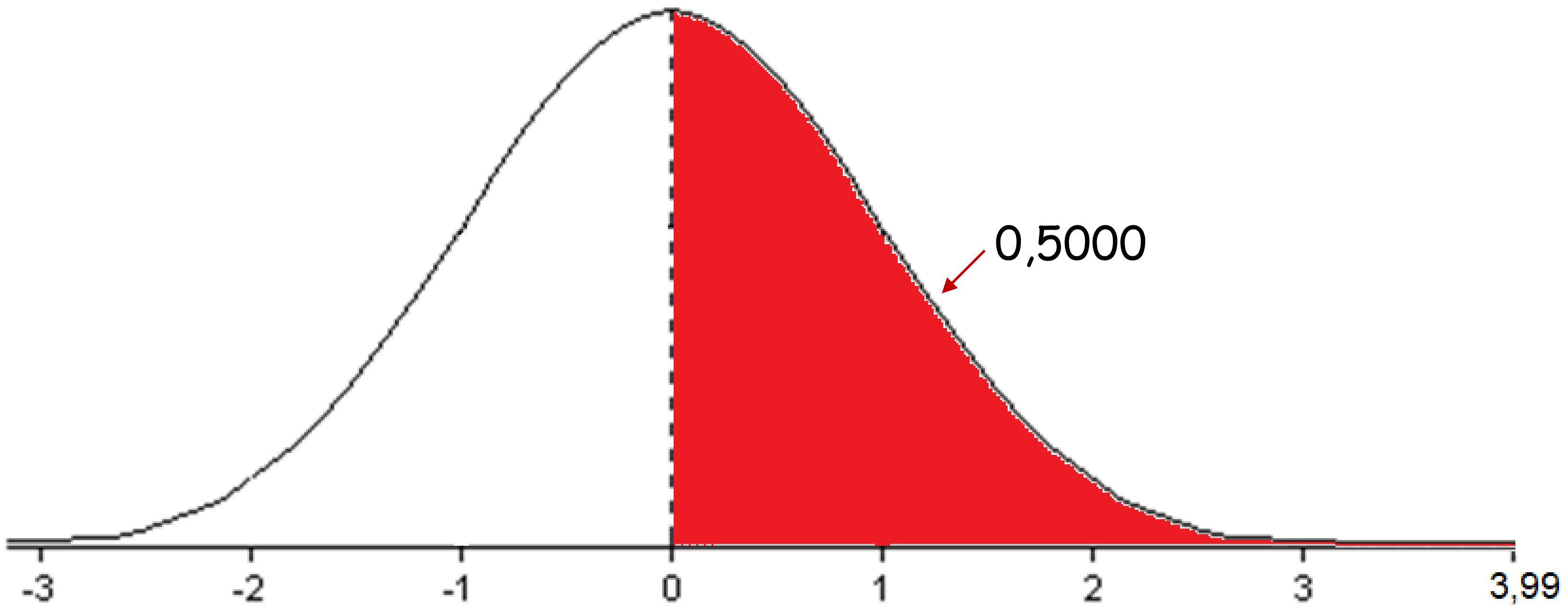
Tabela - Área sob a curva normal padrão de 0 a z, $P(0 \leq Z \leq z)$.

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0754
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2133	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2258	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2518	0,2549
0,7	0,2580	0,2612	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2996	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000

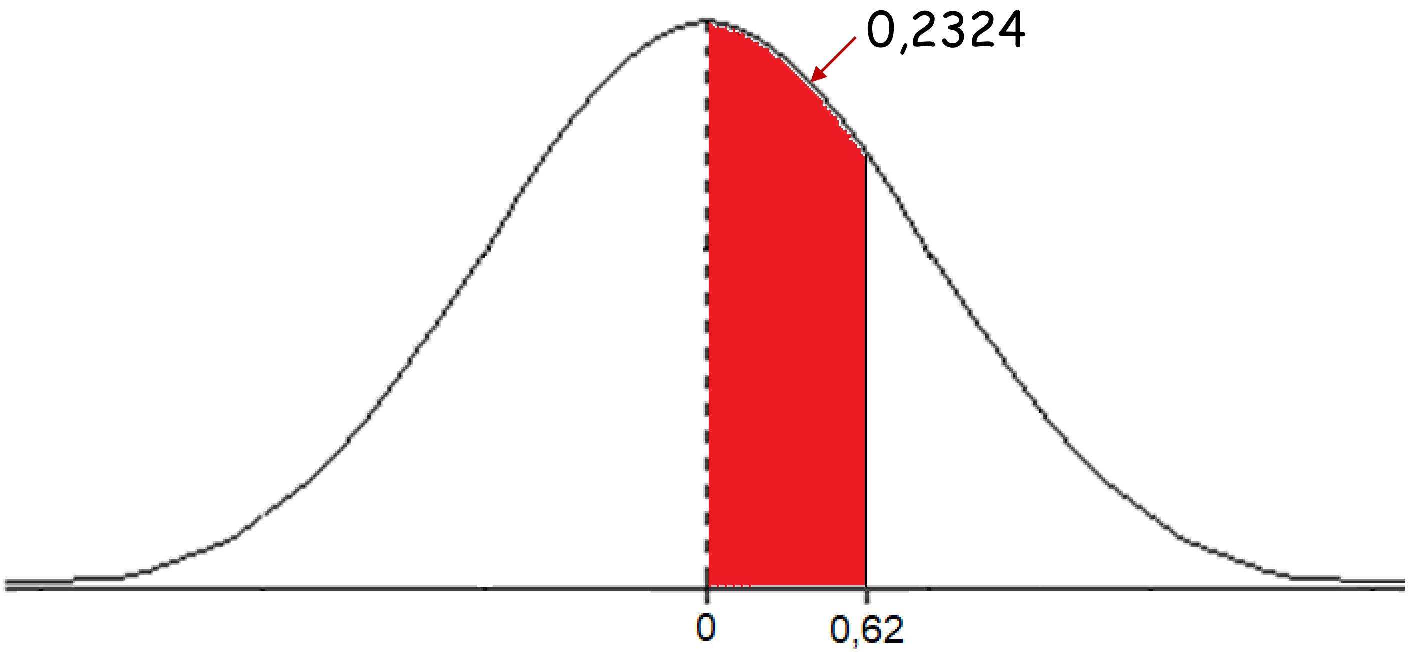
⇨ Os valores negativos não são apresentados na tabela porque a curva é simétrica; assim, as áreas correspondentes a esses valores são exatamente iguais às dos seus simétricos positivos, por exemplo **$P(-1<Z<0) = P(0<Z<1)$**.

⇨ Na tabela da distribuição normal padrão, os valores de Z vão de 0 a 3,99. Este limite é estabelecido com base na quarta propriedade da distribuição normal.





A área até 3,99 já é aproximadamente 0,5.



Na tabela da distribuição normal padrão, podemos encontrar as áreas correspondentes aos intervalos de 0 a z.

Por exemplo z=0,62

Tabela - Área sob a curva normal padrão de 0 a z, $P(0 \leq Z \leq z)$.

z	0	1	2	3	4
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054
0,6	0,2258	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389
0,7	0,2580	0,2612	0,2642	0,2673	0,2704
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2996

segunda casa decimal de z

probabilidade

$P(0 < Z < 0{,}62) = 0{,}2324$

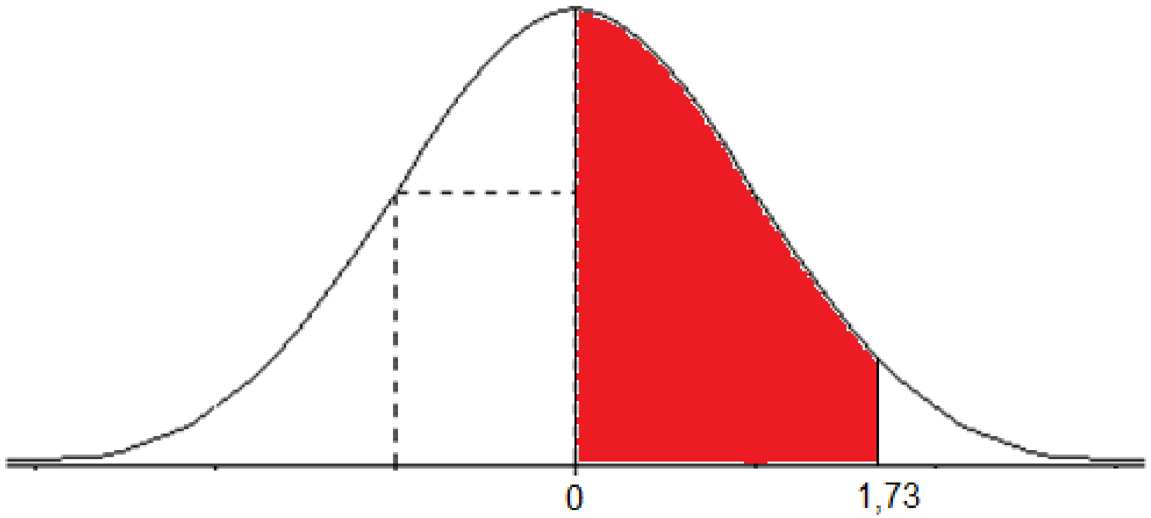
Exercício proposto:

Seja Z uma variável aleatória com distribuição normal padrão. Determine as seguintes probabilidades:

a) $P(0 < Z < 1{,}73) = 0{,}4582$

b) $P(0{,}81 < Z < +\infty)$

c) $P(-1{,}25 \leq Z \leq -0{,}63)$



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0754
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2133	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2258	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2518	0,2549
0,7	0,2580	0,2612	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2996	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952

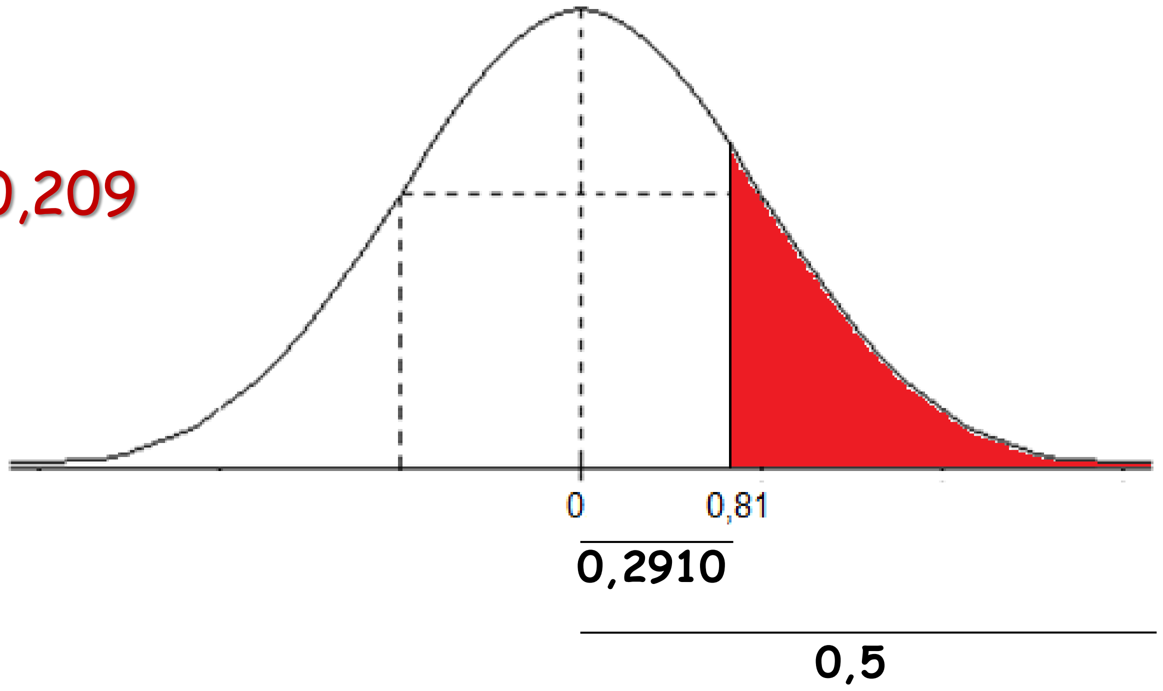
Exercício proposto:

Seja Z uma variável aleatória com distribuição normal padrão. Determine as seguintes probabilidades:

a) $P(0 < Z < 1{,}73) = 0{,}4582$

b) $P(0{,}81 < Z < +\infty) = 0{,}5 - 0{,}291 = 0{,}209$

c) $P(-1{,}25 \leq Z \leq -0{,}63)$



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0754
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2133	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2258	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2518	0,2549
0,7	0,2580	0,2612	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2996	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952

Exercício proposto:

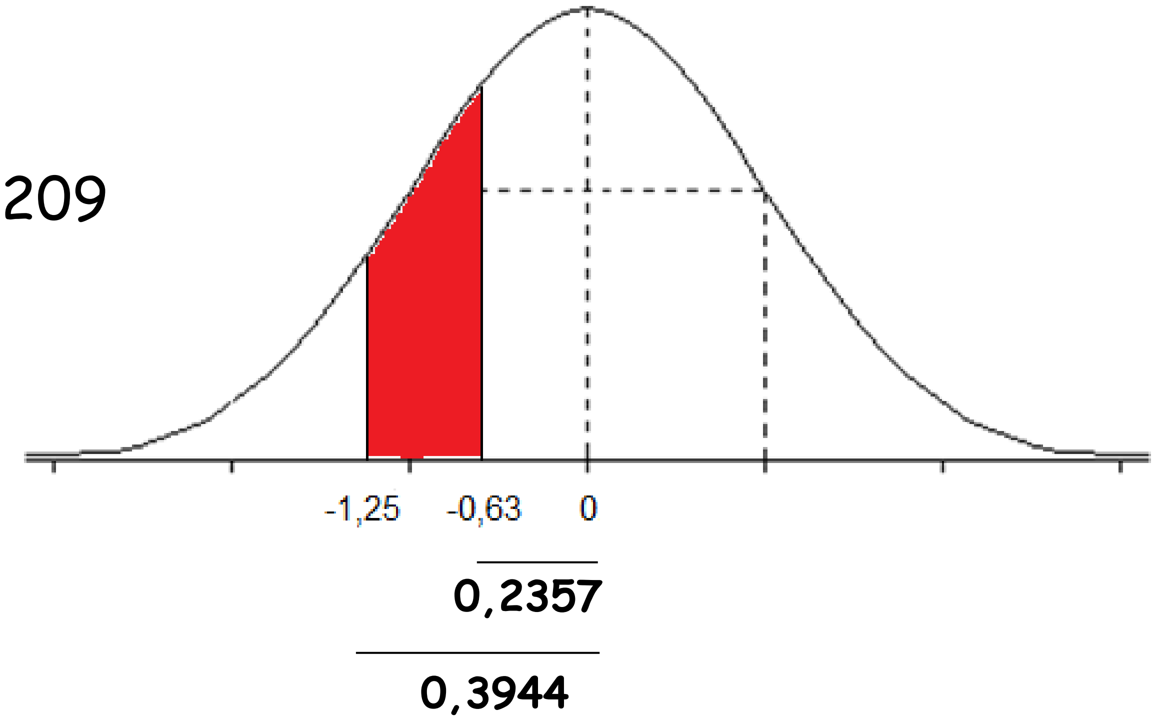
Seja Z uma variável aleatória com distribuição normal padrão. Determine as seguintes probabilidades:

a) $P(0 < Z < 1{,}73)$

b) $P(0{,}81 < Z < +\infty) = 0{,}5 - 0{,}291 = 0{,}209$

c) $P(-1{,}25 \leq Z \leq -0{,}63)$

$0{,}3944 - 0{,}2357 = 0{,}1587$



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0754
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2133	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2258	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2518	0,2549
0,7	0,2580	0,2612	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2996	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952

z	0	1	2	$\boxed{3}$	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0754
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2133	0,2157	0,2190	0,2224
$\boxed{0,6}$	0,2258	0,2291	0,2324	$\boxed{0,2357}$	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2518	0,2549
0,7	0,2580	0,2612	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2996	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952

⇨ Através da distribuição normal padrão é possível estudar qualquer variável X que tenha distribuição normal, com quaisquer valores para μ e σ.

⇨ Para utilizarmos os valores da tabela, devemos **padronizar** ou **reduzir** a variável X, ou seja, transformar X em Z.

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

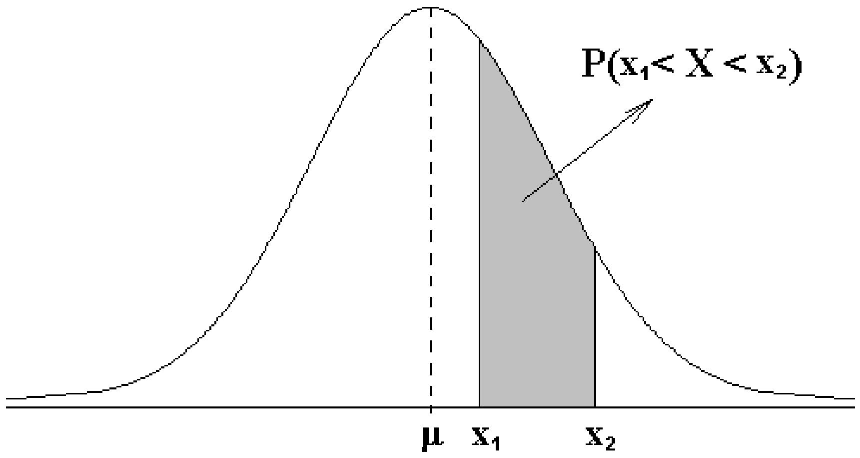
transformar → $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$

$$Z \sim N(0, 1)$$

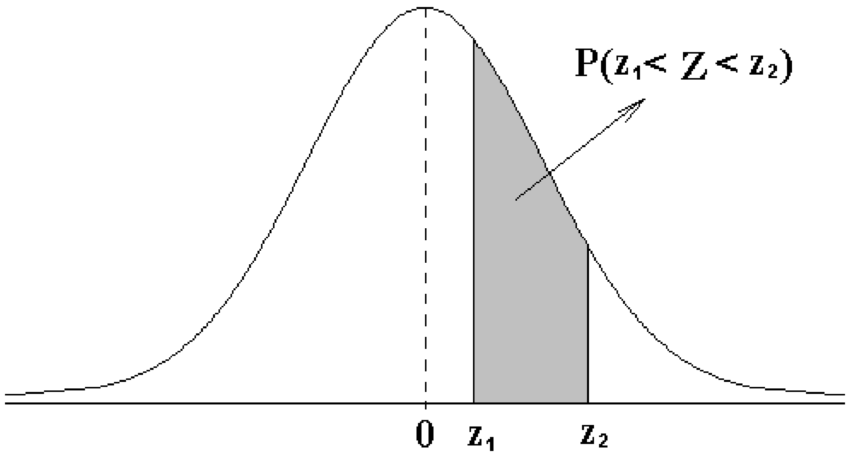
⇨ Após a transformação, procuramos na tabela a área compreendida entre **0** e **z**, que corresponderá a área entre μ e **x**.

A transformação muda as variáveis, mas não altera a área sob a curva.

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$



$Z \sim N(0, 1)$



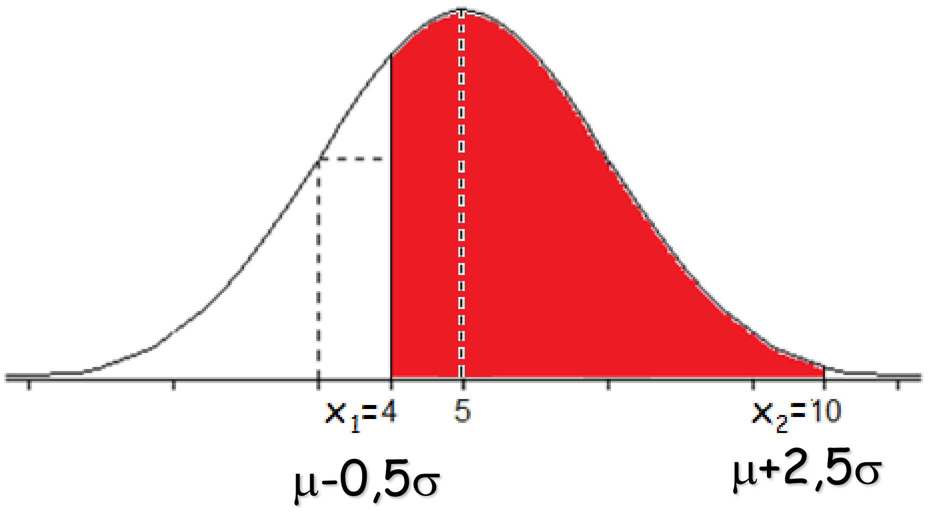
$$P(x_1 < X < x_2) = P(z_1 < Z < z_2)$$

Se X é uma variável que tem distribuição normal com $\mu = 5$ e $\sigma^2 = 4$, calcule:

a) $P(3 < X < 7) = 0{,}6844$

b) $P(5 < X < 9) = 0{,}4772$

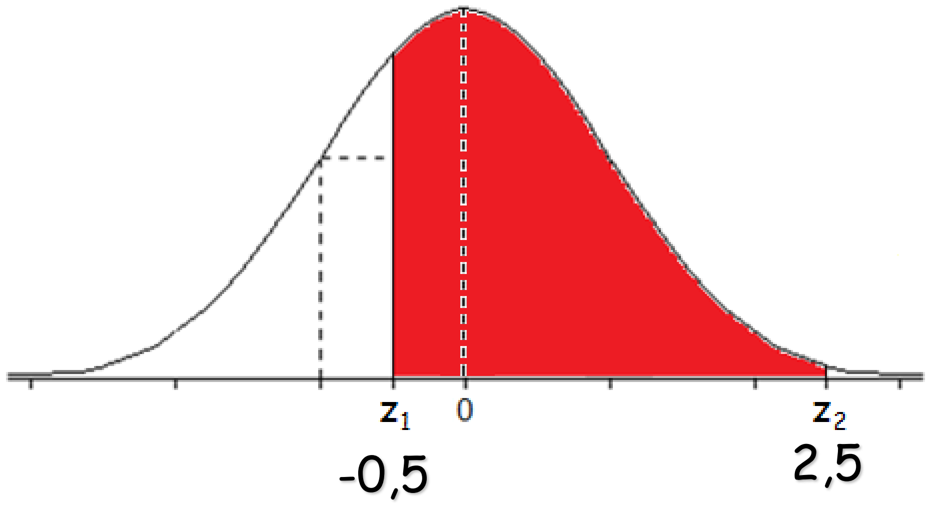
c) $P(4 < X < 10)$



$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$$z_1 = \frac{4-5}{2} = -0{,}5$$

$$z_2 = \frac{10-5}{2} = 2{,}5$$

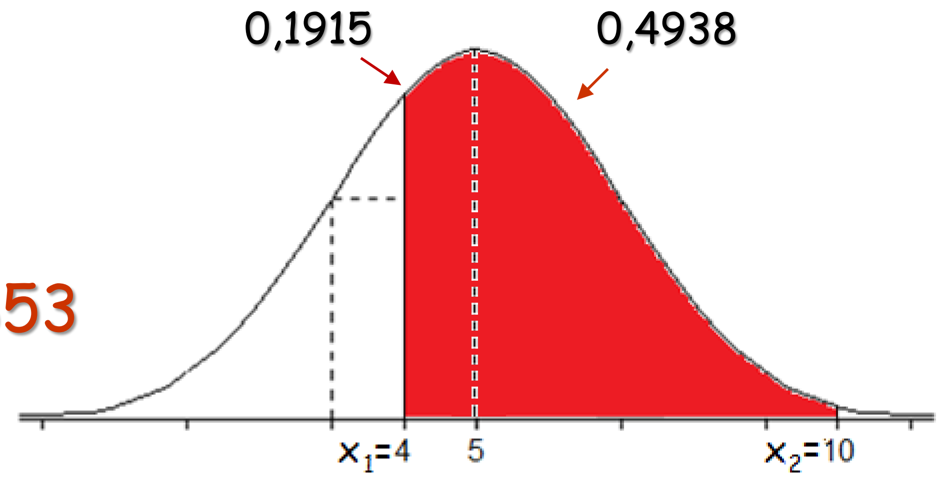


Se X é uma variável que tem distribuição normal com $\mu = 5$ e $\sigma^2 = 4$, calcule:

a) $P(3 < X < 7) = 0{,}6844$

b) $P(5 < X < 9) = 0{,}4772$

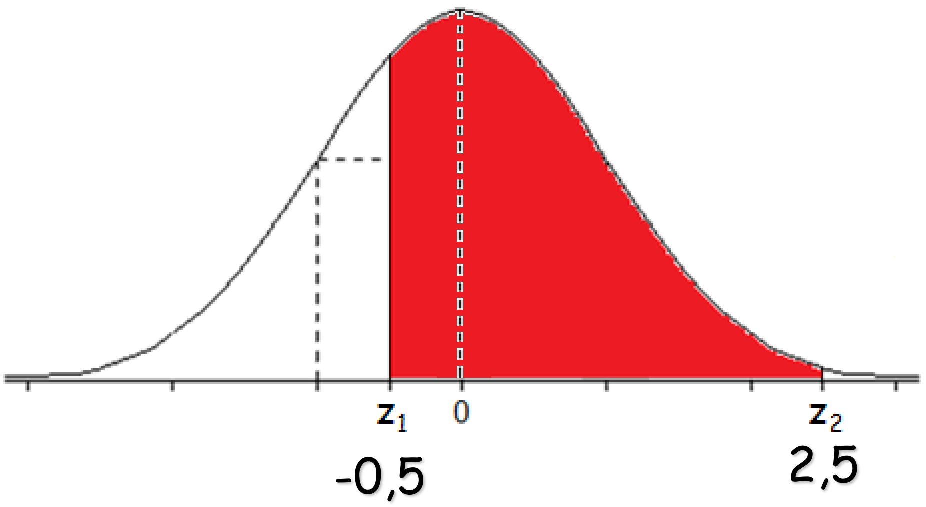
c) $P(4 < X < 10) = 0{,}1915 + 0{,}4938 = 0{,}6853$



$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$$z_1 = \frac{4-5}{2} = -0{,}5 \rightarrow 0{,}1915$$

$$z_2 = \frac{10-5}{2} = 2{,}5 \rightarrow 0{,}4938$$



⇨ Em algumas situações é necessário transformar Z em X

$Z \sim N\,(0, 1)$

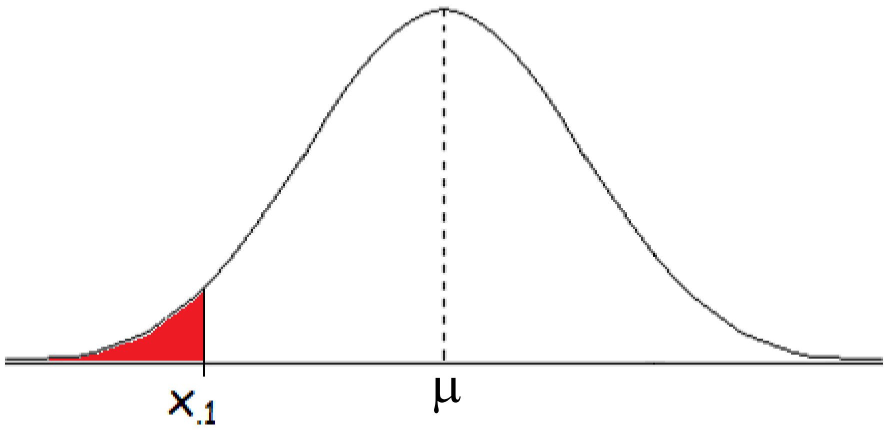
$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

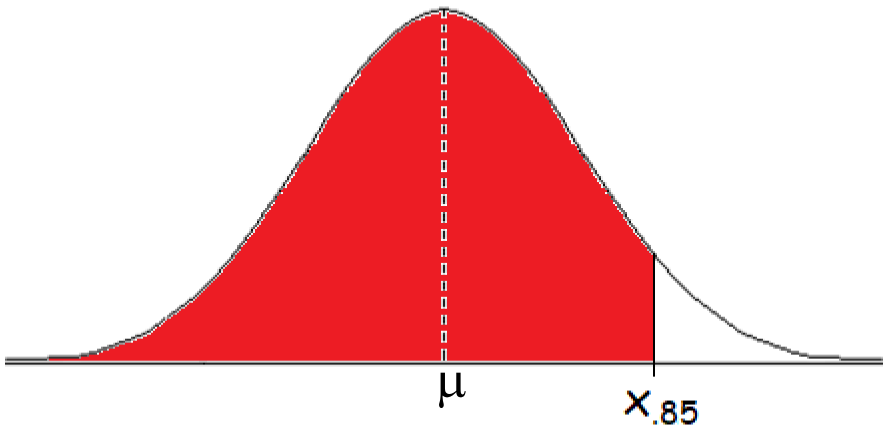
transformar →

$$X = \mu + Z\sigma$$

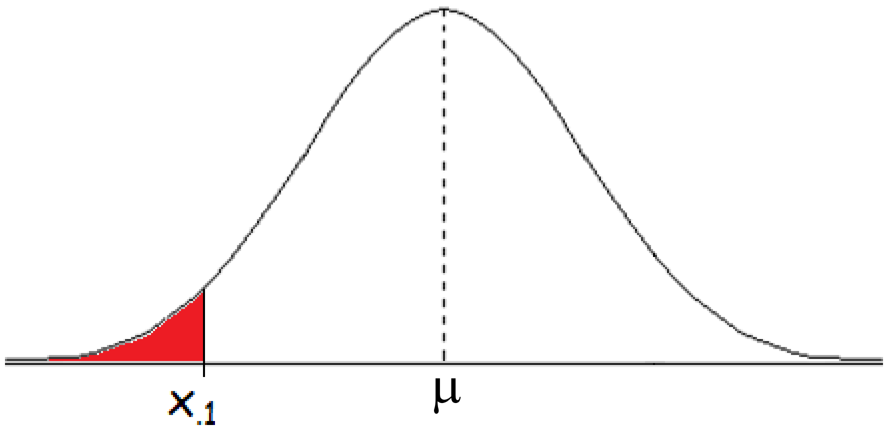
$X \sim N\,(\mu, \sigma^2)$

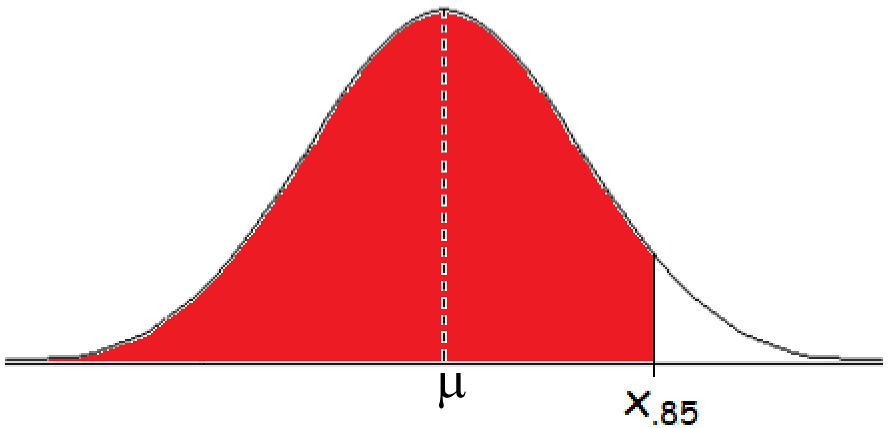
Como determinar um quantil x_p?



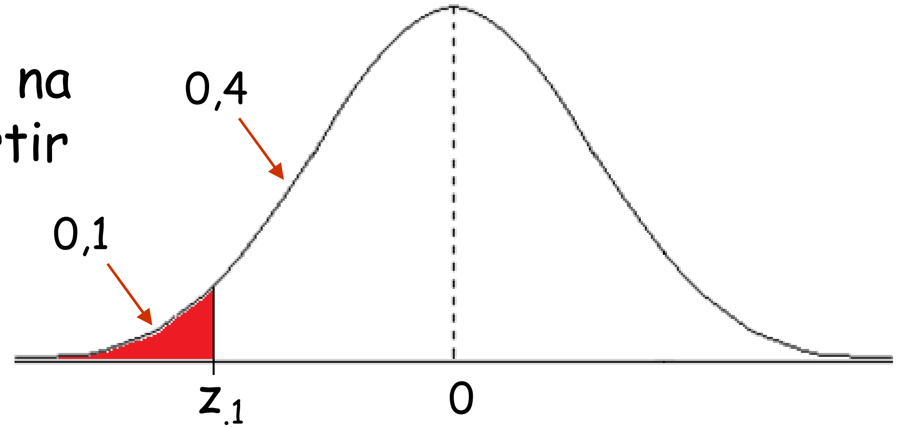


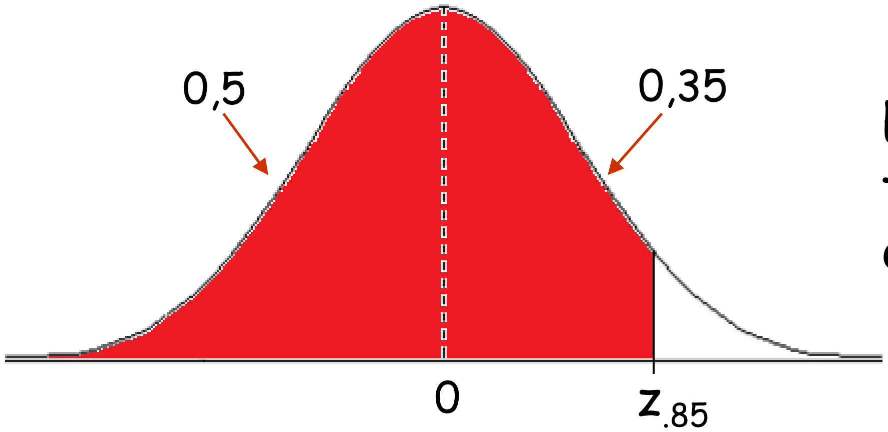
Como determinar um quantil x_p?





Encontrar z na tabela a partir da área 0,4



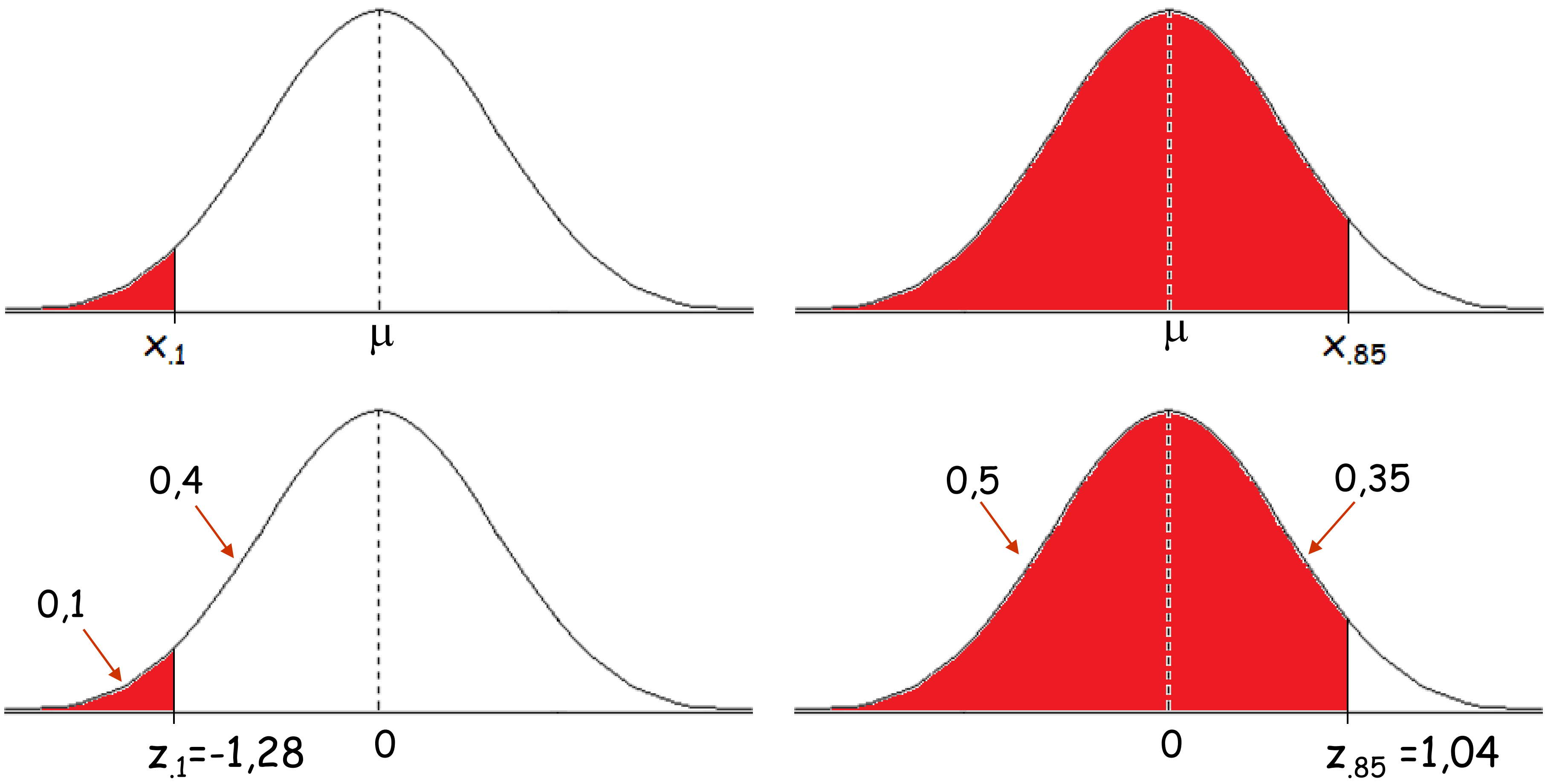


Encontrar z na tabela a partir da área 0,35

z	0	1	2	3	4	5	6	7	$\boxed{8}$	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0754
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2133	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2258	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2518	0,2549
0,7	0,2580	0,2612	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2996	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
$\boxed{1,2}$	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	$\boxed{0,3997}$	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0754
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2133	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2258	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2518	0,2549
0,7	0,2580	0,2612	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2996	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952

Como determinar um quantil x_p?



Transformar z em x $\rightarrow$ $x_p = \mu + z_p \sigma$ $\begin{cases} x_{.1} = \mu - 1{,}28\sigma \\ x_{.85} = \mu + 1{,}04\sigma \end{cases}$

Exercício proposto:

Supondo que em indivíduos sadios ou normais, a taxa de albumina no sangue tenha distribuição normal com média 4,4 g/100cc e desvio padrão 0,6 g/100cc, então, para uma população de indivíduos sadios ou normais, calcule:

a) a probabilidade de se ter uma taxa de albumina menor do que 3 g/100cc;
b) a probabilidade de se ter uma taxa de albumina maior do que 4,9 g/100cc;
c) a probabilidade de se ter uma taxa de albumina entre 3,2 g/100cc e 5,2 g/100cc;
d) a probabilidade de se ter uma taxa de albumina não compreendida entre 2,9 g/100cc e 5 g/100cc;
e) a taxa de albumina que é ultrapassada por 5% da população;
f) a taxa de albumina que é ultrapassada por 2,5% da população;
g) a taxa de albumina que não é ultrapassada por 10% da população;
h) as taxas de albumina, simétricas em relação a taxa média, entre as quais estão compreendidas 99% das taxas da população.

Algumas distribuições contínuas

1. **Distribuição Normal**

   * **Distribuição Normal Padrão**

   * Distribuição Seminormal

2. **Distribuição Exponencial**

3. Distribuição Uniforme

4. Distribuição Gama

5. Distribuição Beta

6. Distribuição Lognormal

7. Distribuição Weibull

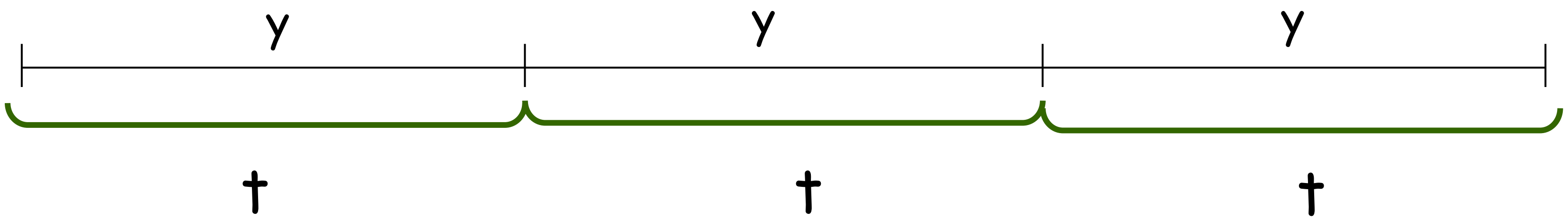
8. Distribuição Gumbel

2. Distribuição exponencial

A distribuição exponencial está relacionada com a distribuição de Poisson. Na distribuição de Poisson, a variável aleatória é definida como o número de sucessos em determinado período de tempo t, sendo a média de sucessos no período definida como λ.

Na distribuição exponencial, a variável aleatória é definida como o tempo entre dois sucessos.

Processo de Poisson $\quad E(Y) = \lambda$



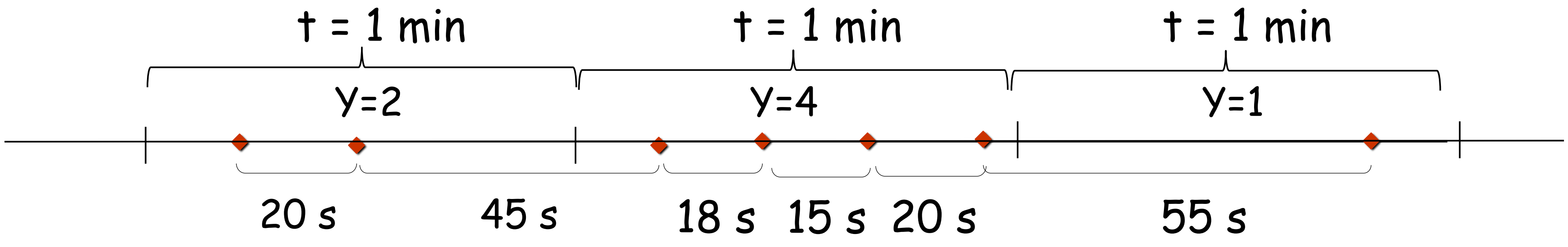
Y = número de sucessos num período t $\rightarrow$ variável discreta

X = tempo decorrido entre sucessos sucessivos $\rightarrow$ variável contínua

Exemplo: Se a média de atendimentos no caixa de uma loja é de 3 clientes por minuto, então, o tempo decorrido entre atendimentos é uma variável com distribuição exponencial.

Y = número de atendimentos $\rightarrow$ distribuição de Poisson

$S_Y = \{0, 1, 2, \ldots\}$ $\qquad$ $E(Y) = \lambda = 3$



X = tempo entre atendimentos (em segundos) $\rightarrow$ distribuição exponencial

$S_X = (0, \infty)$

A distribuição exponencial é extensivamente utilizada para modelar o tempo entre ocorrências de eventos num sistema, onde os eventos ocorrem a uma taxa constante. Desse modo, tem grande aplicabilidade em estudos de sobrevivência, confiabilidade, teoria das filas e simulação.

Função densidade de probabilidade

De modo geral, se X é uma variável aleatória contínua que tem distribuição exponencial, então, sua função densidade de probabilidade será:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \text{ para } S_X=[0, \infty)$$

X só assume valores reais não negativos

onde:

X: tempo decorrido entre dois sucessos

e = 2,718 (base dos logaritmos neperianos)

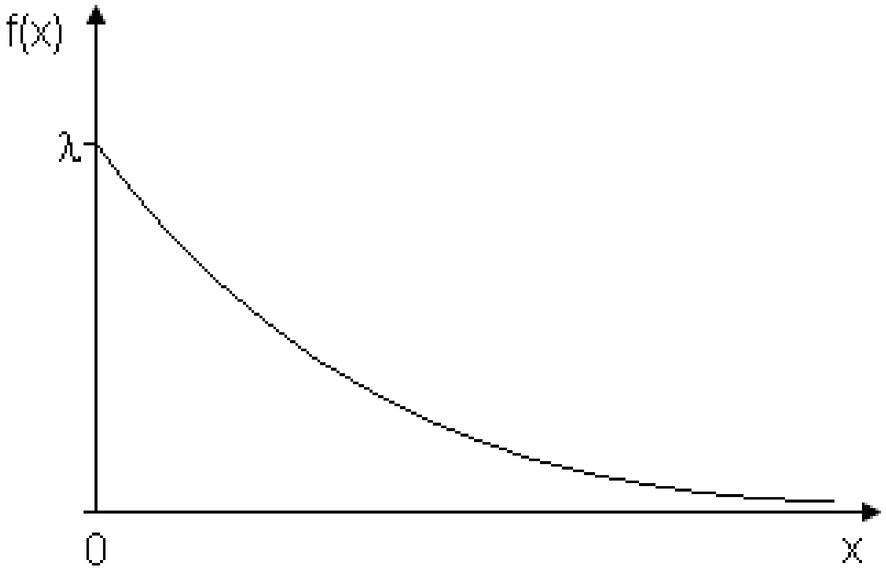
λ: **número médio de sucessos** (sempre maior que zero)

Podemos demonstrar que f(x) é uma função densidade de probabilidade provando que $\int_{S_x} f(x)\,dx = 1$

$$\int_{S_x} f(x)\,dx = \int_0^{\infty} \lambda\, e^{-\lambda x} dx = \left[e^{-\lambda x} \right]_0^{\infty} = e^{-\lambda \infty} - e^{-\lambda 0} = 0 - (-1) = 1$$

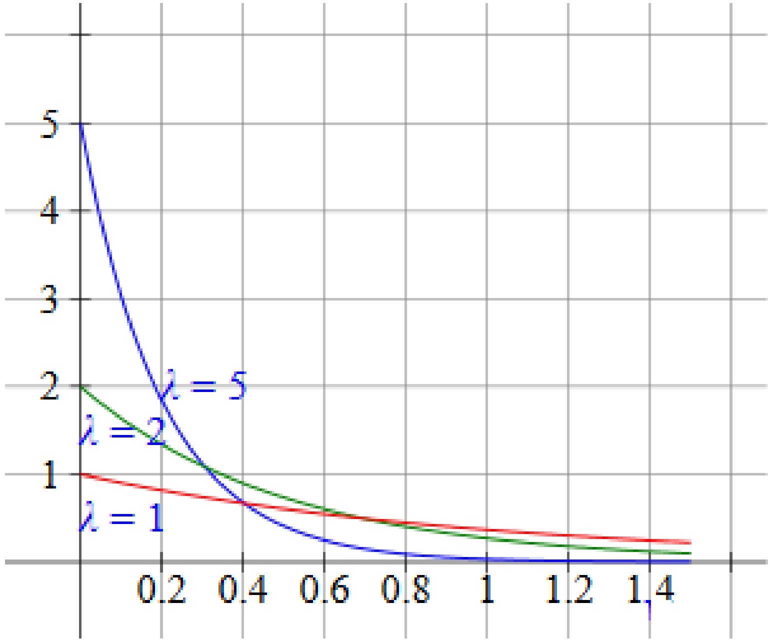
Função densidade de probabilidade

Representação gráfica: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$



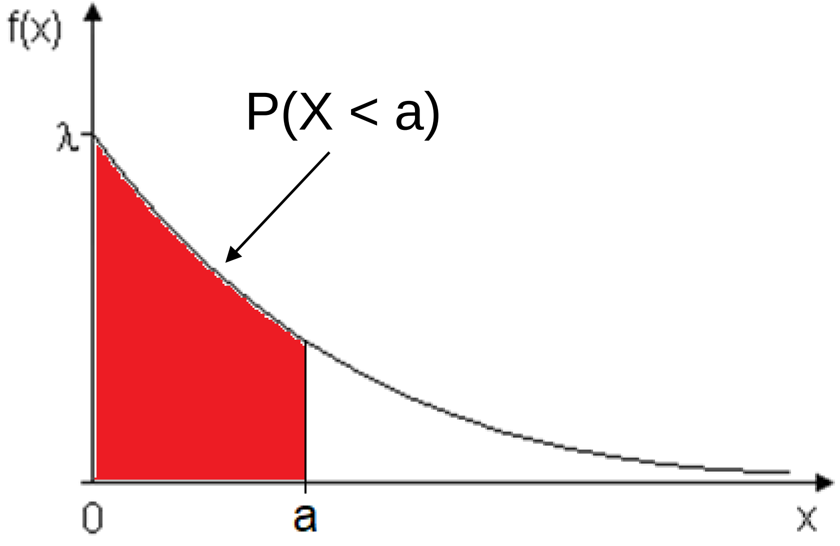
$$f(0) = \lambda e^{-\lambda 0} = \lambda e^{0} = \lambda$$

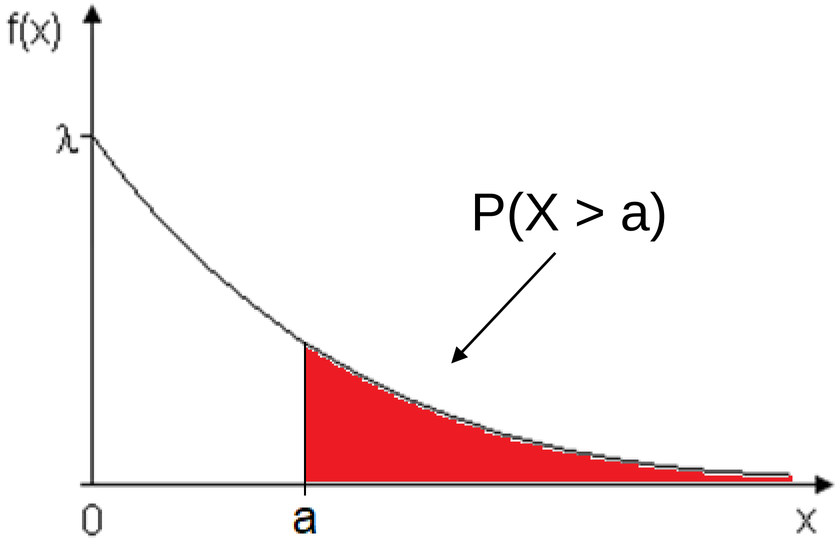
Exemplos:



Função de distribuição ou de probabilidade acumulada

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}$$



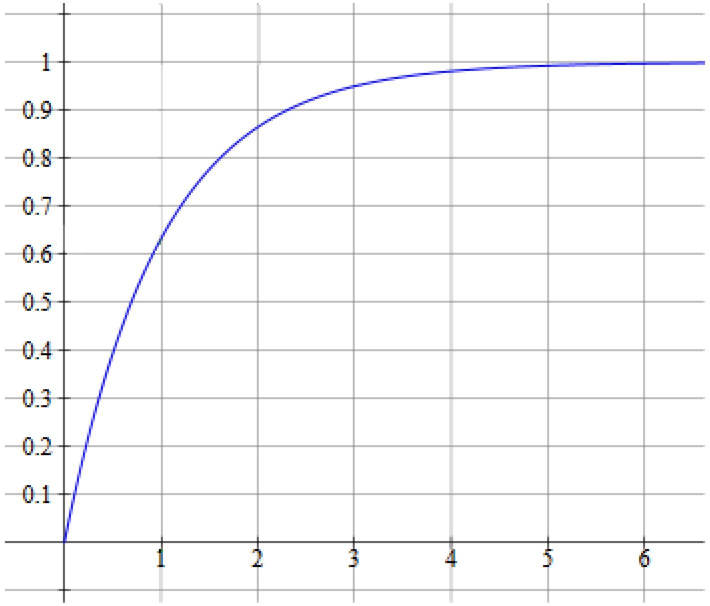


$$P(X > x) = 1 - F(x) = 1 - (1 - e^{-\lambda x}) = e^{-\lambda x}$$

Função de distribuição ou de probabilidade acumulada

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}$$

Representação gráfica:



Parâmetros

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

$\boxed{\text{parâmetro}}$

A distribuição exponencial tem apenas um parâmetro:

λ = número médio de sucessos

$X \sim Exp\ (\lambda)$

X tem distribuição exponencial com parâmetro λ

Medidas descritivas

- **Média ou valor esperado:** $E(X) = \mu = \int_{S_X} x f(x) dx$

$$E(X) = \mu = \int_{S_x} x\, f(x)\, dx$$

$$= \int_0^{\infty} x\lambda\, e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$$

Teorema: $E(X) = \mu = \dfrac{1}{\lambda}$

Medidas descritivas

- **Variância:** $V(X) = \sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$

$$V(X) = \sigma^2 = \left[\int_{S_x} x^2 f(x)dx \right] - \mu^2$$

$$= \left[\int_0^{\infty} x^2 \left(\lambda\, e^{-\lambda x}\right)dx \right] - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

Teorema: $V(X) = \sigma^2 = \dfrac{1}{\lambda^2}$

Exercícios propostos:

1. Os tempos até a falha de um dispositivo eletrônico seguem o modelo exponencial, com uma taxa de falha λ = 0,012 falhas/hora. Indique qual a probabilidade de um dispositivo escolhido ao acaso sobreviver a 50 horas? E a 100 horas? Qual o tempo esperado até que ocorra falha?

2. Suponha que um componente eletrônico tenha um tempo de vida X (em unidades de 1000 horas) que segue uma distribuição exponencial de parâmetro $\lambda = 1$. Suponha também que o custo de fabricação do item seja 2 reais e que o preço de venda seja 5 reais. O fabricante garante devolução total se $X<0,9$. Qual o lucro esperado por item?

Resolução:

2. Suponha que um componente eletrônico tenha um tempo de vida X (em unidades de 1000 horas) que segue uma distribuição exponencial de parâmetro $\lambda = 1$. Suponha também que o custo de fabricação do item seja 2 reais e que o preço de venda seja 5 reais. O fabricante garante devolução total se $X < 0{,}9$. Qual o lucro esperado por item?

X = tempo de vida (1000 h)

Y = lucro por item (reais)

Se $X < 0{,}9$, então $Y = -2$ reais

Se $X > 0{,}9$, então $Y = 3$ reais

$$F(x) = P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$\text{Sendo } \lambda = 1, \quad F(0{,}9) = P(X \leq 0{,}9) = 1 - e^{-0{,}9} = 0{,}5934$$

X	x<0,9	x>0,9	
$Y = y$	-2	3	Σ
$P(Y = y)$	0,5934	0,4066	1

$E(Y) = -2 \times 0{,}5934 + 3 \times 0{,}4066 = 0{,}03$ reais

Formas limites da distribuição binomial

- Em determinadas circunstâncias, uma distribuição de probabilidade pode tender para outra.

- Os casos mais importantes de aproximações entre distribuições são:

1. Hipergeométrica $\rightarrow$ Binomial

2. Binomial $\rightarrow$ Poisson

3. Binomial $\rightarrow$ Normal

1. Hipergeométrica → Binomial   Hip (n, N, N_1) → Bin (n, π)

Quando N (tamanho da população) é muito grande (ou tende para $+\infty$), a distribuição **hipergeométrica** se aproxima da distribuição **binomial**.

Binomial

$$V(X) = n\pi(1 - \pi)$$

Hipergeométrica

fator de correção

$$V(X) = n\,\frac{N_1}{N}\,\frac{N_2}{N}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

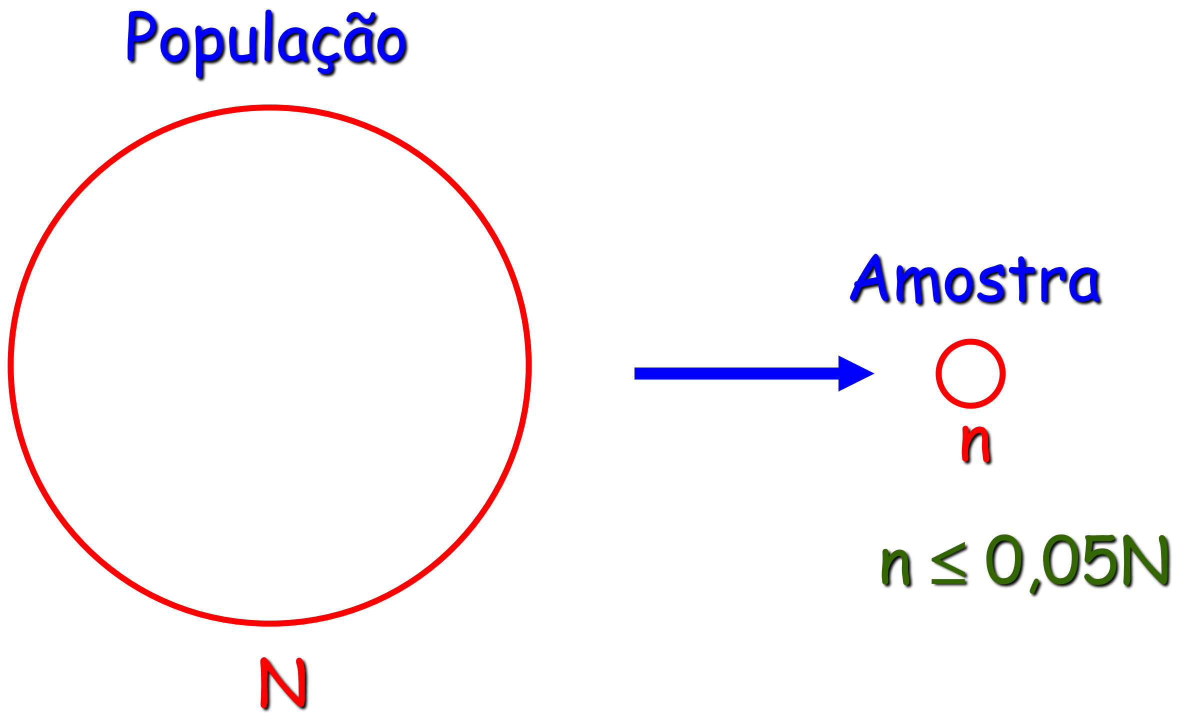
Quando N tende para infinito, o fator de correção se aproxima de 1.

tende a zero

$$\frac{N-n}{N-1} \cong \frac{N-n}{N} = \frac{N}{N} - \frac{n}{N} = 1 - \frac{n}{N} \cong 1$$

tende a $+\infty$

Esta aproximação é considerada satisfatória quando o número de elementos retirados (n) não excede 5% da população (N), isto é, $n \leq 0{,}05N$.



Quando o tamanho da amostra representa menos de 5% do tamanho da população, a população é tão grande em relação a amostra que pode ser considerada infinita.

2. Binomial → Poisson

$Bin(n, \pi) \rightarrow Poi(\lambda)$

$E(X) = n\pi$

Quando n (número de repetições do experimento) é muito grande (ou tende para $+\infty$) e π (probabilidade de sucesso) é muito pequena (ou tende para 0) a distribuição **binomial** se aproxima da distribuição de **Poisson**.

Esta aproximação é considerada satisfatória quando

$$n\pi < 10 \quad e \quad n \geq 100$$

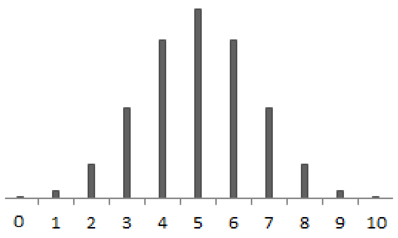
E(X)

3. Binomial → Normal   Bin $(n, \pi) \rightarrow$ Nor (μ, σ^2)

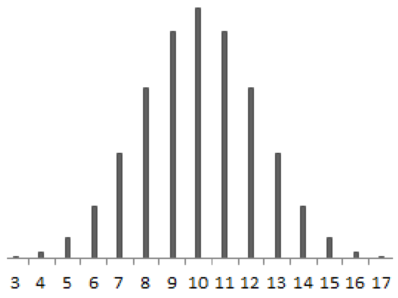
Quando n (número de repetições do experimento) é grande (ou tende para $+\infty$) e π (probabilidade de sucesso) se aproxima de 0,5, a distribuição **binomial** se aproxima da distribuição **normal**.

Se **$\pi=(1-\pi)=0,5$**, a distribuição binomial será simétrica.

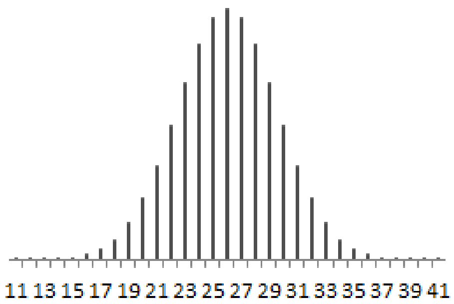
A distribuição binomial se aproxima da normal à medida que o n cresce.



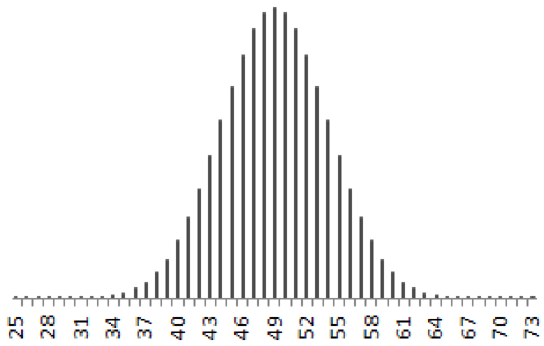
n = 10



n = 20



n = 50

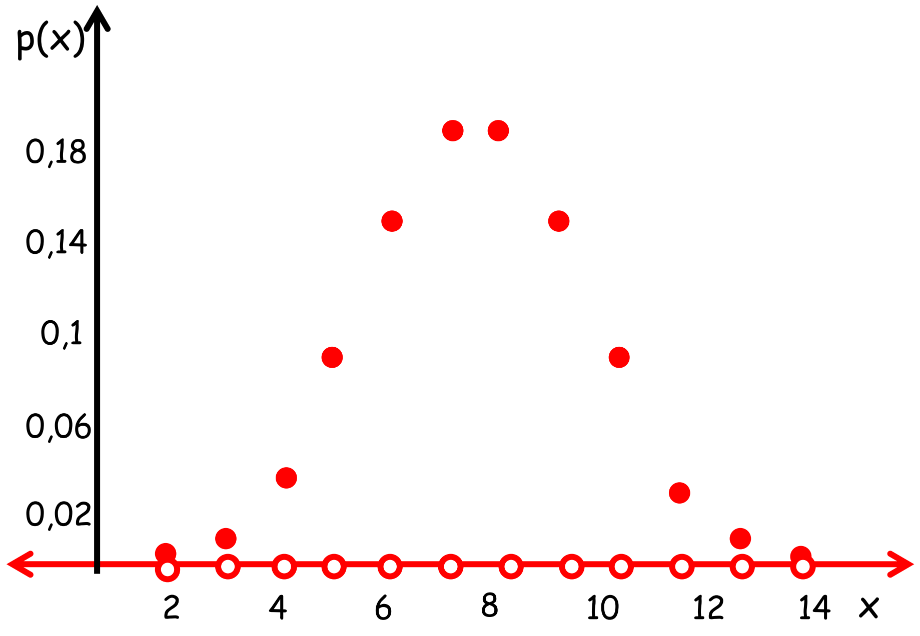


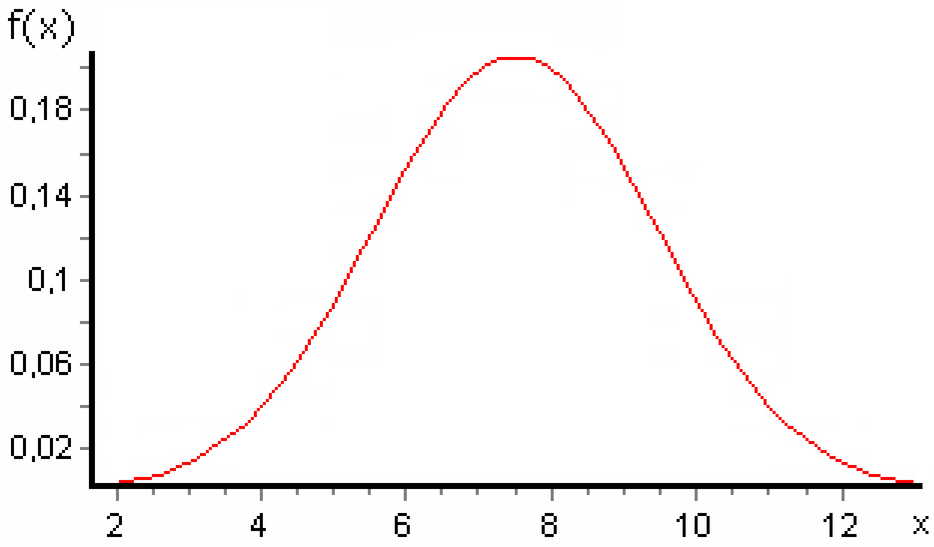
n = 100

$X \sim Bin\ (n=15,\ \pi=0{,}5)$

Uma binomial com parâmetros $n=15$ e $\pi=0{,}5$ se aproxima de uma normal com parâmetros $\mu=7{,}5$ e $\sigma^2=3{,}75$

$X \sim Nor\ (\mu=7{,}5,\ \sigma^2=3{,}75)$





Exercícios propostos:

1. Um auditor foi contratado para examinar uma coleção de 6.000 faturas, das quais 128 contêm erros. Se foi selecionada uma amostra de 120 faturas, qual é a probabilidade de esta amostra conter exatamente duas faturas com erros?

2. Sendo de 1% o percentual de canhotos numa população, qual é a probabilidade de haver apenas um canhoto numa classe de 30 alunos?

Bibliografia

BUSSAB, W.O.; MORETTIN, P.A. **Estatística Básica**. São Paulo: Saraiva. 2006. 526p.

FERREIRA, D.F. **Estatística Básica**. Lavras: Editora UFLA, 2005, 664p.

FREUND, J.E., SIMON, G.A. **Estatística Aplicada. Economia, Administração e Contabilidade**. 9.ed., Porto Alegre: Bookman, 2000. 404p.

MEYER, P. L. **Probabilidade: aplicações à estatística**. Rio de Janeiro: LTC, 1976.

MLODINOW, L. **O andar do bêbado. Como o acaso determina nossas vidas**. Rio de Janeiro: Editora Zahar, 2009, 264p.

SILVEIRA JÚNIOR, P., MACHADO, A.A., ZONTA, E.P., SILVA, J.B. da **Curso de Estatística**. v.2, Pelotas: Universidade Federal de Pelotas, 1992. 234p.

Sistema Galileu de Educação Estatística. Disponível em: http://www.galileu.esalq.usp.br/topico.html