Resumo das distribuições discretas

- Principais características
- Exemplo

1. Distribuição de Bernoulli

Descreve probabilisticamente experimentos aleatórios que possuem apenas dois resultados possíveis.

X= número de sucessos $\quad S_X = \{0, 1\}$

Função de probabilidade

$$P(X = x) = \pi^{x} (1 - \pi)^{1-x}$$

Parâmetro: π = probabilidade de sucesso

Medidas descritivas

$E(X) = \mu = \pi$

$V(X) = \sigma^2 = \pi\ (1- \pi)$

$$a_3 = \frac{(1-\pi) - \pi}{\sqrt{\pi(1-\pi)}}$$

Exemplo:

Um atirador dispara um tiro contra um alvo.

$$S = \{acertar, errar\}$$

Consideramos um dos resultados como sucesso.

sucesso = acertar
fracasso = errar

X = número de sucessos

$$S_X = \{0, 1\}$$

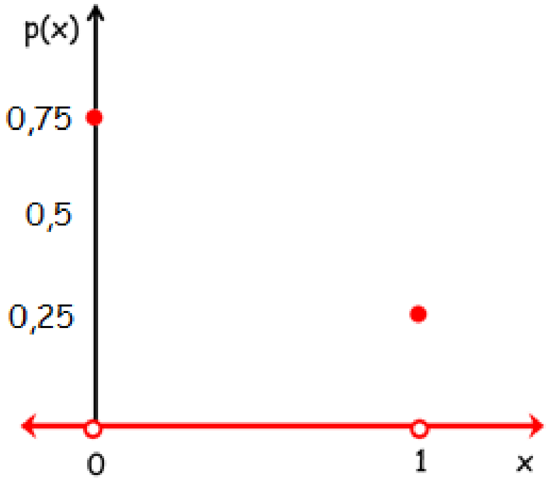
π = probabilidade de sucesso
$1-\pi$ = probabilidade de fracasso

Exemplo:

Um atirador dispara um tiro contra um alvo. Sabe-se que a probabilidade do atirador acertar o alvo é 0,25.

X = número de sucessos (acertos) $\quad S_X = \{0, 1\}$

$\pi = 0{,}25$



Medidas descritivas

$E(X) = \mu = \pi = 0{,}25$

$V(X) = \sigma^2 = \pi\,(1-\pi) = 0{,}25 \, . \, 0{,}75 = 0{,}1875$

$$a_3 = \frac{(1-\pi)-\pi}{\sqrt{\pi(1-\pi)}} = \frac{0{,}75 - 0{,}25}{\sqrt{0{,}25 \, . \, 0{,}75}} = 1{,}155$$

$X \sim Ber\,(\pi{=}0{,}25)$

2. Distribuição binomial

Descrição probabilística de uma sequência de experimentos de Bernoulli **independentes**.
Importante no contexto de amostragem **com reposição**.

X= número de sucessos $S_X = \{0, 1, ..., n\}$

Função de probabilidade

$$P(X = x) = P_n^{x,n-x}\, \pi^x (1-\pi)^{n-x}$$

Parâmetros: n = número de repetições do experimento
π = probabilidade de sucesso

Medidas descritivas

$E(X) = \mu = n\pi$

$V(X) = \sigma^2 = n\pi(1-\pi)$

$$a_3 = \frac{(1-\pi)-\pi}{\sqrt{n\pi(1-\pi)}}$$

Exemplo:

Quatro atiradores disparam contra um alvo. Todos foram igualmente treinados e têm a mesma probabilidade de acertar o alvo, que é 0,25.

S = {AAAA, AAAE, AAEA, AEAA, EAAA, AAEE, ..., EEEE} $\#S = 2^4 = 16$

X = número de sucessos

$S_X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

n = número de repetições do experimento de Bernoulli n = 4

π = probabilidade de sucesso π = 0,25

$P(X=4) = 0{,}25^4$

$P(X=3) = 4 \times 0{,}25^3 \times 0{,}75^1$

$P(X=2) = 6 \times 0{,}25^2 \times 0{,}75^2$

$$P(X = x) = \underbrace{P_n^{x,n-x}}_{\text{Número de casos}} \underbrace{\pi^x (1-\pi)^{n-x}}_{\text{Probabilidade de um caso}}$$

Exemplo:

Quatro atiradores disparam contra um alvo. Todos foram igualmente treinados e têm a mesma probabilidade de acertar o alvo, que é 0,25.

S = {AAAA, AAAE, AAEA, AEAA, EAAA, AAEE, ..., EEEE} $\#S = 2^4 = 16$

X = número de sucessos

$S_X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

n = número de repetições do experimento de Bernoulli   n = 4

π = probabilidade de sucesso $\pi = 0{,}25$

$P(X=4) = 0{,}25^4$

$P(X=3) = 4 \times 0{,}25^3 \times 0{,}75^1$

$P(X=2) = 6 \times 0{,}25^2 \times 0{,}75^2$

$$P(X = x) = P_n^{x,n-x}\, \pi^x (1-\pi)^{n-x}$$

$$P_n^{x,n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

Exemplo:

Quatro atiradores disparam contra um alvo. Todos foram igualmente treinados e têm a mesma probabilidade de acertar o alvo, que é 0,25.

X = número de sucessos (acertos) $S_X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$n = 4$

$\pi = 0{,}25$

Função de probabilidade

$$P(X = x) = P_4^{x,4-x}\, 0{,}25^x (1-0{,}25)^{4-x}, \text{ para } S_X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$P(X = 0) = P_4^{0,4}\, 0{,}25^0 (1-0{,}25)^4$$

$$P(X = 1) = P_4^{1,3}\, 0{,}25^1 (1-0{,}25)^3$$

. . .

$$P(X = 4) = P_4^{4,0}\, 0{,}25^4 (1-0{,}25)^0$$

Exemplo:

Quatro atiradores disparam contra um alvo. Todos foram igualmente treinados e têm a mesma probabilidade de acertar o alvo, que é 0,25.

X = número de sucessos (acertos) $S_X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$n = 4$ $\pi = 0,25$

Medidas descritivas

$$E(X) = \mu = n\pi = 4 . 0,25 = 1$$

$X \sim Bin\,(n=4, \pi=0,25)$

$$V(X) = \sigma^2 = n\pi(1-\pi) = 4 . 0,25 . 0,75 = 0,75$$

$$a_3 = \frac{(1-\pi)-\pi}{\sqrt{n\pi(1-\pi)}} = \frac{0,75-0,25}{\sqrt{4.0,25.0,75}} = 0,433$$

3. Distribuição hipergeométrica

Descrição probabilística de uma sequência de experimentos de Bernoulli **dependentes**.
Importante no contexto de amostragem **sem reposição**.

X= número de sucessos $S_X=\{max(0, n-N_2), ..., min(n,N_1)\}$

Função de probabilidade

$S_X=\{0, 1, 2, ..., n\}$

$$P(X=x)=\frac{C_{N_1}^{x}\,C_{N_2}^{n-x}}{C_{N}^{n}}$$

Parâmetros: n = número de repetições do experimento
N = tamanho da população
N_1 = tamanho da subpopulação de interesse

Medidas descritivas

$$E(X)=\mu=n\frac{N_1}{N}$$

$$V(X)=\sigma^2=n\frac{N_1}{N}\frac{N_2}{N}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

Exemplo:

Uma bandeja contém 10 xícaras de cafezinho, sete com açúcar e três sem açúcar. Três pessoas se aproximam da bandeja e se servem.

$S = \{c_1c_2c_3,\ c_1c_2c_4, \ldots,\ c_1c_2s_1,\ \ldots,\ s_1s_2s_3\}$ $\quad \#S = C_{10}^{3} = 120$

Consideramos um dos resultados como sucesso

sucesso = com açúcar
fracasso = sem açúcar

$n = 3$
$N = 10$
$N_1 = 7$
$N_2 = 3$

X = número de sucessos (com açúcar)

$S_X = \{0, 1, 2, 3\}$

n = número de repetições do experimento
N = tamanho da população ($N = N_1 + N_2$)
N_1 = tamanho da subpopulação de interesse (sucesso)

Exemplo:

Uma bandeja contém 10 xícaras de cafezinho, sete com açúcar e três sem açúcar. Três pessoas se aproximam da bandeja e se servem.

X = número de sucessos (açúcar) $S_X = \{0, 1, 2, 3\}$

$n = 3, \; N = 10, \; N_1 = 7$

Função de probabilidade

$$P(X = x) = \frac{C_7^x \, C_3^{3-x}}{C_{10}^3}$$, para $S_X = \{0, 1, 2, 3\}$

$$P(X = 0) = \frac{C_7^0 \, C_3^3}{C_{10}^3} \qquad P(X = 2) = \frac{C_7^2 \, C_3^1}{C_{10}^3}$$

$$P(X = 1) = \frac{C_7^1 \, C_3^2}{C_{10}^3} \qquad P(X = 3) = \frac{C_7^3 \, C_3^0}{C_{10}^3}$$

Exemplo:

Uma bandeja contém 10 xícaras de cafezinho, sete com açúcar e três com adoçante. Três pessoas se aproximam da bandeja e se servem.

X = número de sucessos (açúcar) $S_X = \{0, 1, 2, 3\}$

$n = 3, \; N = 10, \; N_1 = 7$

$N = N_1 + N_2$

$X \sim Hip\,(n=3, N=10, N_1=7)$

Medidas descritivas

$$E(X) = n\frac{N_1}{N} = 3\frac{7}{10} = 2{,}1$$

$$V(X) = n\frac{N_1}{N}\frac{N_2}{N}\left(\frac{N-n}{N-1}\right) = 3\frac{7}{10}\frac{3}{10}\left(\frac{10-3}{10-1}\right) = 0{,}49$$

4. Distribuição de Poisson

Descrição probabilística da sequência de um **grande número** de fenômenos **independentes**, com probabilidade de sucesso **muito pequena**, que ocorrem por unidade de **tempo** ou de **superfície** ou de **volume**, com média de sucessos constante.
Importante na descrição de **eventos de ocorrência rara**.

X= número de sucessos $S_X=\{0, 1, 2, ...\}$ ← **espaço amostral infinito**

Função de probabilidade

$$P(X = x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$$

Parâmetro: λ = número médio de sucessos

Medidas descritivas

$$E(X) = \mu = \lambda$$

$$V(X) = \sigma^2 = \lambda$$

$$a_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

$$a_4 = \sqrt{\lambda}$$

Exemplo:

A taxa média de chegada de clientes em um posto de serviços é de 0,5 por minuto.

X = número de clientes que chegam no posto de serviço por minuto

$S_X = \{0, 1, 2, 3, ...\}$

λ = número médio de sucessos (clientes)

$\lambda = E(X) = 0,5$

Função de probabilidade

$$P(X = x) = e^{-0,5}\frac{0,5^x}{x!}$$, para $S_X = \{0, 1, 2, 3, ...\}$

Exemplo:

A taxa média de chegada de clientes em um posto de serviços é de 0,5 por minuto.

X = número de clientes que chegam no posto de serviço por minuto

$S_X = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ $\lambda = 0{,}5$

Função de probabilidade

$$P(X = x) = e^{-0{,}5}\frac{0{,}5^x}{x!}$$, para $S_X = \{0, 1, 2, 3, ...\}$

$$P(X = 0) = e^{-0{,}5}\frac{0{,}5^x}{0!} = 0{,}6065$$

$$P(X = 2) = e^{-0{,}5}\frac{0{,}5^x}{2!} = 0{,}07581$$

$$P(X = 1) = e^{-0{,}5}\frac{0{,}5^x}{1!} = 0{,}3033$$

$$P(X = 3) = e^{-0{,}5}\frac{0{,}5^x}{3!} = 0{,}01263$$

Exemplo:

A taxa média de chegada de clientes em um posto de serviços é de 0,5 por minuto.

X = número de clientes que chegam no posto de serviço por minuto

$S_X = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ $\lambda = 0{,}5$

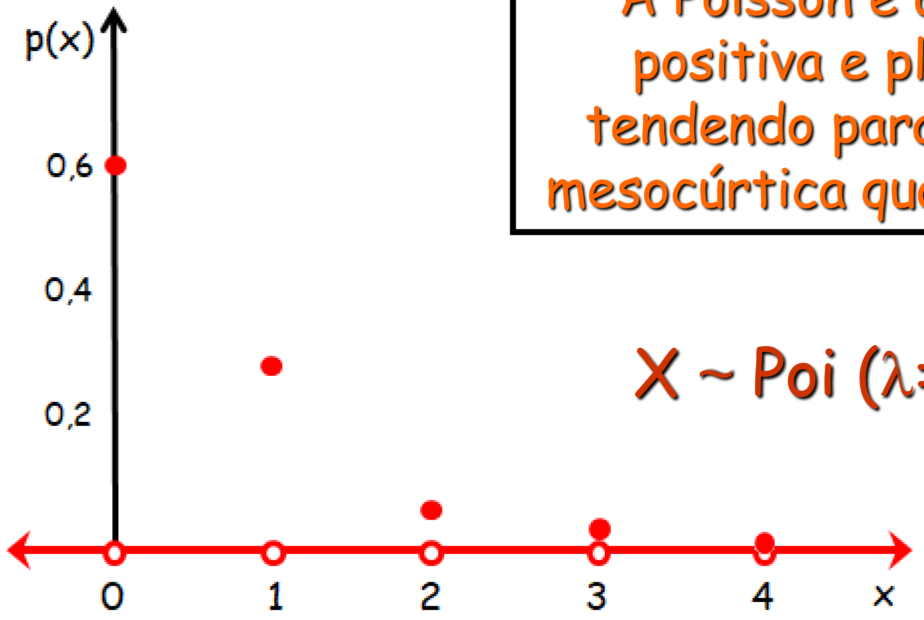
Medidas descritivas

$E(X) = \mu = \lambda = 0{,}5$

$V(X) = \sigma^2 = \lambda = 0{,}5$

$$a_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1{,}414$$

$$a_4 = \sqrt{\lambda} = 0{,}7071$$



A Poisson é assimétrica positiva e platicúrtica, tendendo para simétrica e mesocúrtica quando μ cresce.

$X \sim Poi\ (\lambda=0{,}5)$

Distribuições discretas

1. Distribuição de Bernoulli

$$P(X = x) = \pi^{x}(1-\pi)^{1-x} \qquad X \sim Ber\ (\pi)$$

2. Distribuição Binomial

$$P(X = x) = P_{n}^{x,n-x}\, \pi^{x}(1-\pi)^{n-x} \qquad X \sim Bin\ (n, \pi)$$

3. Distribuição Hipergeométrica

$$P(X = x) = \frac{C_{N_1}^{x}\, C_{N_2}^{n-x}}{C_{N}^{n}} \qquad X \sim Hip\ (n, N, N_1)$$

4. Distribuição de Poisson

$$P(X = x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^{x}}{x!} \qquad X \sim Poi\ (\lambda)$$

Bibliografia

BUSSAB, W.O.; MORETTIN, P.A. **Estatística Básica**. São Paulo: Saraiva. 2006. 526p.

FERREIRA, D.F. **Estatística Básica**. Lavras: Editora UFLA, 2005, 664p.

FREUND, J.E., SIMON, G.A. **Estatística Aplicada. Economia, Administração e Contabilidade**. 9.ed., Porto Alegre: Bookman, 2000. 404p.

MEYER, P. L. **Probabilidade: aplicações à estatística**. Rio de Janeiro: LTC, 1976.

MLODINOW, L. **O andar do bêbado. Como o acaso determina nossas vidas**. Rio de Janeiro: Editora Zahar, 2009, 264p.

SILVEIRA JÚNIOR, P., MACHADO, A.A., ZONTA, E.P., SILVA, J.B. da **Curso de Estatística**. v.2, Pelotas: Universidade Federal de Pelotas, 1992. 234p.

Sistema Galileu de Educação Estatística. Disponível em: http://www.galileu.esalq.usp.br/topico.html