# Unidade IV – Inferência estatística

4.1. Introdução e histórico
4.2. Conceitos fundamentais
4.3. Distribuições amostrais e Teorema central do limite
4.4. Estimação de parâmetros
4.5. Testes de hipóteses
4.6. Quebras das pressuposições no processo de inferência
4.7. Testes de qui-quadrado

Profª. Clause Piana

# Testes de qui-quadrado ($\chi^2$)

## Duas situações de aplicação

Profª. Clause Piana

Situação 1. De acordo com a hereditariedade mendeliana, as proporções fenotípicas resultantes de um cruzamento são: 9/16, 3/16 e 4/16.

Um pesquisador realizou cruzamentos entre animais de uma certa raça bovina com o objetivo de estudar o tipo de herança do caráter pelagem e obteve os seguintes resultados:

| Pelagem | Vermelha | Preta | Branca | Totais |
|---|---|---|---|---|
| Número de animais | 72 | 34 | 38 | 144 |

**Estes resultados estão de acordo com a teoria mendeliana?**

**Situação 2.** Um experimento foi realizado com o objetivo de estudar a eficácia de um novo soro. Foram utilizadas duzentas cobaias doentes, das quais 100 receberam o soro e as outras 100 não receberam. Os resultados observados foram os seguintes:

| Tratamento | Cura | | Totais |
|---|---|---|---|
| | Sim | Não | |
| Com soro | 75 | 25 | 100 |
| Sem soro | 65 | 35 | 100 |
| Totais | 140 | 60 | 200 |

**A cura depende ou não do tratamento?**

# Testes de qui-quadrado ($\chi^2$)

- Utilizados para testar hipóteses a respeito de **frequências observadas** nas classes de **variáveis qualitativas** ou **atributos** (cor, forma, estado, opinião, etc.)
- As alternativas dos atributos são denominadas **classes** ou **categorias**
- Os dados de enumeração provenientes da contagem dos indivíduos enquadrados nas classes do atributo representam as **frequências observadas**
- Os dados de enumeração resultantes das proporções de uma teoria ou de proporções previamente fixadas são denominados **frequências esperadas**
- O teste consiste em **comparar** as **frequências observadas** com **frequências esperadas** para essas classes

# Exemplo: situação 1: Frequências observadas

Variável qualitativa ou atributo

Classes ou categorias

| Pelagem | Vermelha | Preta | Branca | Totais |
|---|---|---|---|---|
| Número de animais | 72 | 34 | 38 | 144 |

Frequências observadas

Dados discretos

# Exemplo: situação 1: Frequências esperadas

Teoria mendeliana → proporções: 9/16, 3/16 e 4/16

| Pelagem | Vermelha | Preta | Branca | Totais |
|---|---|---|---|---|
| Frequência observada | 72 | 34 | 38 | 144 |
| Frequência esperada | 81 | 27 | 36 | 144 |

Outros exemplos de aplicação dos testes de qui-quadrado:

- proporções de germinação de sementes
- proporções de respostas de pessoas que participam de pesquisas de opinião
- proporção de peças defeituosas que saem de uma linha de montagem
- estudos no campo da genética, após cruzamentos de indivíduos

É possível aplicar o teste para um único atributo qualitativo ou para dois atributos conjuntamente.

# Tabela de classificação simples: um atributo qualitativo

**Objetivo:** verificar se as freqüências observadas concordam com uma determinada teoria.

Os indivíduos são classificados segundo um **único atributo qualitativo** (A) e dispostos em uma tabela junto com as frequências esperadas de acordo com a teoria.

| A | $A_1$ | $A_2$ | ... | $A_k$ |
|---|---|---|---|---|
| Frequência observada | $X_1$ | $X_2$ | ... | $X_k$ |
| Frequência esperada | $E_1$ | $E_2$ | ... | $E_k$ |

# Hipóteses estatísticas

| A | $A_1$ | $A_2$ | ... | $A_k$ |
|---|---|---|---|---|
| Frequência observada | $X_1$ | $X_2$ | ... | $X_k$ |
| Frequência esperada | $E_1$ | $E_2$ | ... | $E_k$ |

**Hipótese de concordância ou aderência:** supõem que os dados observados concordam ou se ajustam a uma determinada teoria dada pelas frequências esperadas

$H_0$: frequências observadas **concordam** com frequências esperadas
$H_A$: frequências observadas **não concordam** com frequências esperadas

# Estatística do Teste

Para verificar se as diferenças entre as **frequências observadas** e **frequências esperadas** são reais ou casuais, utilizamos o teste qui-quadrado, dado pela estatística Q que tem distribuição qui-quadrado com parâmetro $\nu$:

$$Q = \sum_{i=1}^{k} \frac{(X_i - E_i)^2}{E_i} \sim \chi^2(\nu),$$

onde:

**$X_i$** é a frequência observada da classe i
**$E_i$** é a frequência esperada da classe i
**$k$** é o total de classes do atributo
**$\nu = k - 1$** é o número de graus de liberdade

# Exemplo: situação 1

| Pelagem | Vermelha | Preta | Branca | Totais |
|---|---|---|---|---|
| Frequência observada ($X_i$) | 72 | 34 | 38 | 144 |
| Frequência esperada ($E_i$) | 81 | 27 | 36 | 144 |

$$Q=\sum_{i=1}^{k}\frac{(X_i-E_i)^2}{E_i}$$

$$q=\frac{(72-81)^2}{81}+\frac{(34-27)^2}{27}+\frac{(38-36)^2}{36}$$

$$q=1+1{,}8148+0{,}1111=2{,}9259$$

# Distribuição qui-quadrado ($\chi^2$)

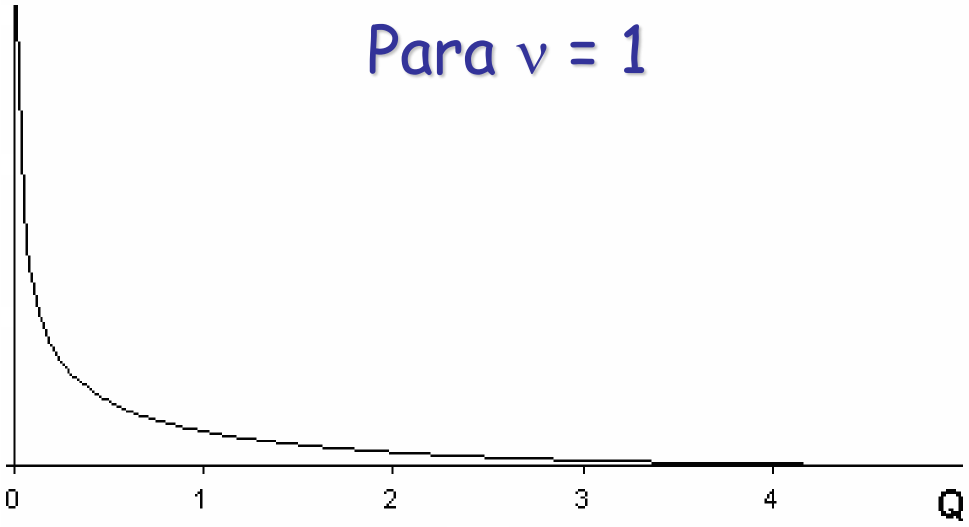
A variável Q é definida como a soma dos quadrados de variáveis Z independentes entre si:

$$Q = Z_1^2 + Z_2^2 + \ldots + Z_\nu^2 \sim \chi^2(\nu)$$

Sendo definida como uma soma de quadrados, os valores da variável Q nunca serão negativos.

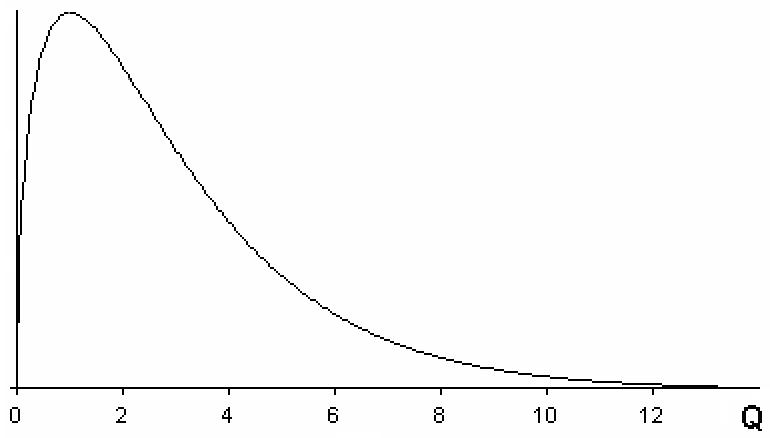
Quando $\nu = 1$, a curva assume um formato atípico.

Para $\nu = 1$

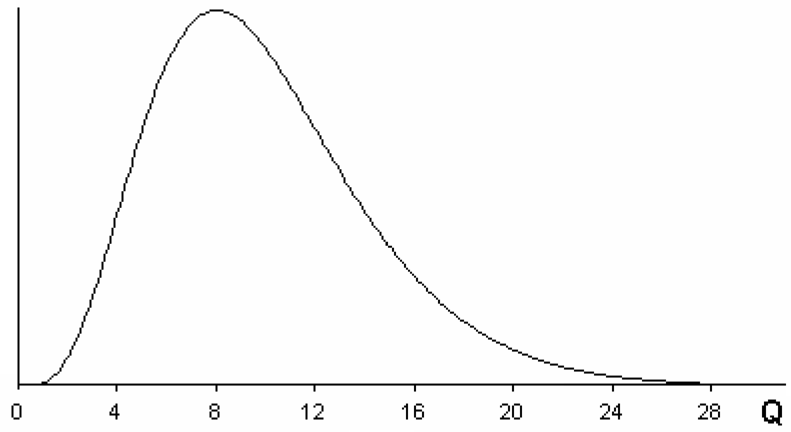


Quando $\nu > 1$, a curva assume a forma assimétrica positiva.

Para $\nu = 3$




Para $\nu = 10$




A distribuição $\chi^2$ tem média $\mu = \nu$ e variância $\sigma^2 = 2\nu$ e se aproxima da normal quando $\nu$ cresce.

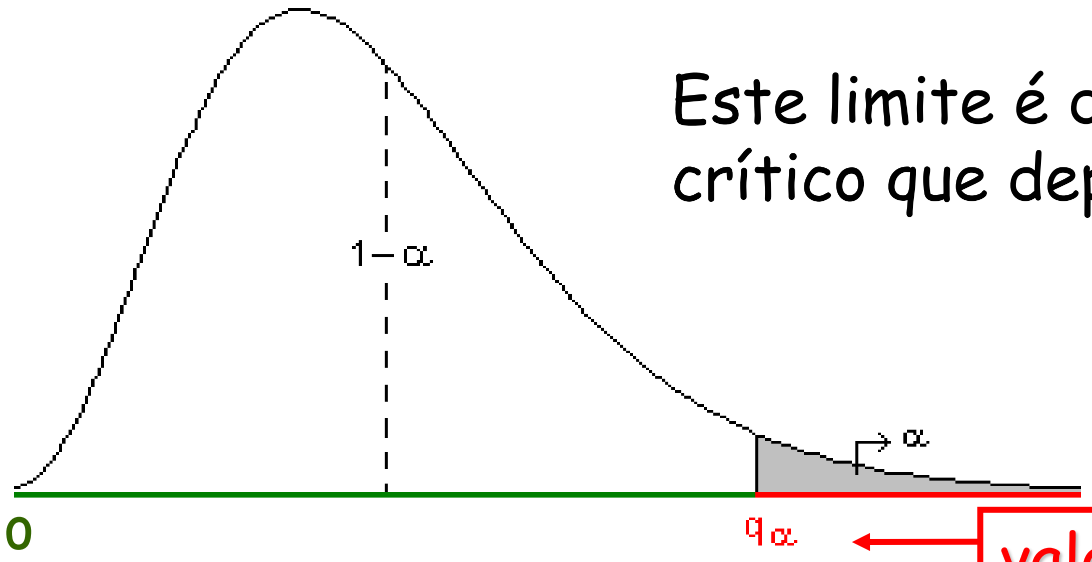
# Critério de decisão

Se $H_0$ é verdadeira, devemos esperar que o valor da estatística Q seja próximo de zero.

$$Q = \sum_{i=1}^{k} \frac{(X_i - E_i)^2}{E_i} \cong 0$$

Mas quão próximo de zero a estatística Q deve estar?

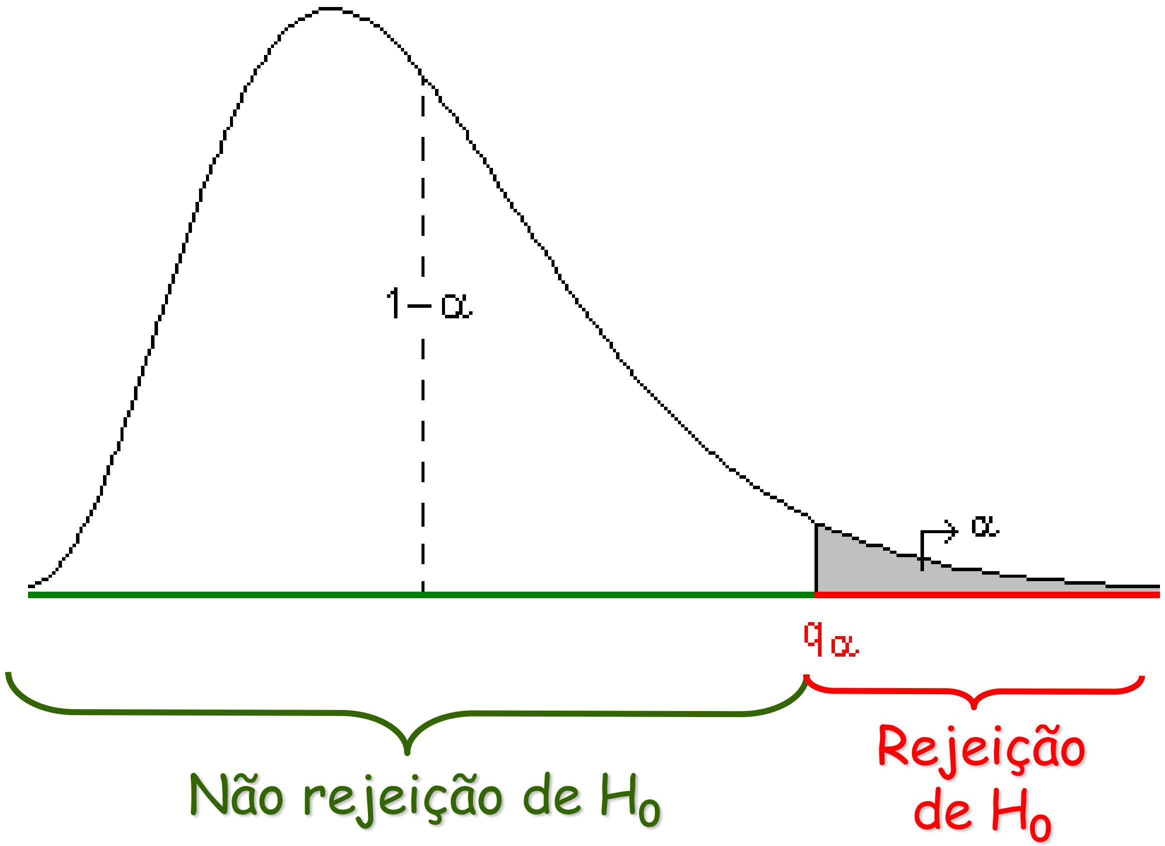
Este limite é dado pelo valor crítico que depende de $\alpha$ e $\nu$.




valor crítico

Para decidir comparamos o valor da estatística Q (calculado) com o valor crítico (tabelado):

$q_{\alpha(\nu)}$: valor da estatística Q que delimita a área $\alpha$, para $\nu$ graus de liberdade (Tabela da distribuição qui-quadrado)




Se $q < q_{\alpha}$ → não temos motivos para rejeitar $H_0$

Se $q > q_{\alpha}$ → rejeitamos $H_0$

# Tabela da distribuição qui-quadrado.

| Graus de Liberdade | Nível de significância ($\alpha$) | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Esquerda (q') | | | | | Direita (q) | | | | |
| ($\nu$) | 0,005 | 0,01 | 0,025 | 0,05 | 0,1 | 0,1 | 0,05 | 0,025 | 0,01 | 0,005 |
| 1 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,02 | 2,71 | 3,84 | 5,02 | 6,63 | 7,88 |
| 2 | 0,01 | 0,02 | 0,05 | 0,10 | 0,21 | 4,61 | 5,99 | 7,38 | 9,21 | 10,60 |
| 3 | 0,07 | 0,11 | 0,22 | 0,35 | 0,58 | 6,25 | 7,81 | 9,35 | 11,34 | 12,84 |
| 4 | 0,21 | 0,30 | 0,48 | 0,71 | 1,06 | 7,78 | 9,49 | 11,14 | 13,28 | 14,86 |
| 5 | 0,41 | 0,55 | 0,83 | 1,15 | 1,61 | 9,24 | 11,07 | 12,83 | 15,09 | 16,75 |
| 6 | 0,68 | 0,87 | 1,24 | 1,64 | 2,20 | 10,64 | 12,59 | 14,45 | 16,81 | 18,55 |
| 7 | 0,99 | 1,24 | 1,69 | 2,17 | 2,83 | 12,02 | 14,07 | 16,01 | 18,48 | 20,28 |
| 8 | 1,34 | 1,65 | 2,18 | 2,73 | 3,49 | 13,36 | 15,51 | 17,53 | 20,09 | 21,95 |
| 9 | 1,73 | 2,09 | 2,70 | 3,33 | 4,17 | 14,68 | 16,92 | 19,02 | 21,67 | 23,59 |
| 10 | 2,16 | 2,56 | 3,25 | 3,94 | 4,87 | 15,99 | 18,31 | 20,48 | 23,21 | 25,19 |
| 11 | 2,60 | 3,05 | 3,82 | 4,57 | 5,58 | 17,28 | 19,68 | 21,92 | 24,72 | 26,76 |
| 12 | 3,07 | 3,57 | 4,40 | 5,23 | 6,30 | 18,55 | 21,03 | 23,34 | 26,22 | 28,30 |
| 13 | 3,57 | 4,11 | 5,01 | 5,89 | 7,04 | 19,81 | 22,36 | 24,74 | 27,69 | 29,82 |
| 14 | 4,07 | 4,66 | 5,63 | 6,57 | 7,79 | 21,06 | 23,68 | 26,12 | 29,14 | 31,32 |
| 15 | 4,60 | 5,23 | 6,26 | 7,26 | 8,55 | 22,31 | 25,00 | 27,49 | 30,58 | 32,80 |
| 16 | 5,14 | 5,81 | 6,91 | 7,96 | 9,31 | 23,54 | 26,30 | 28,85 | 32,00 | 34,27 |
| 17 | 5,70 | 6,41 | 7,56 | 8,67 | 10,09 | 24,77 | 27,59 | 30,19 | 33,41 | 35,72 |
| 18 | 6,26 | 7,01 | 8,23 | 9,39 | 10,86 | 25,99 | 28,87 | 31,53 | 34,81 | 37,16 |
| 19 | 6,84 | 7,63 | 8,91 | 10,12 | 11,65 | 27,20 | 30,14 | 32,85 | 36,19 | 38,58 |
| 20 | 7,43 | 8,26 | 9,59 | 10,85 | 12,44 | 28,41 | 31,41 | 34,17 | 37,57 | 40,00 |
| 21 | 8,03 | 8,90 | 10,28 | 11,59 | 13,24 | 29,62 | 32,67 | 35,48 | 38,93 | 41,40 |
| 22 | 8,64 | 9,54 | 10,98 | 12,34 | 14,04 | 30,81 | 33,92 | 36,78 | 40,29 | 42,80 |
| 23 | 9,26 | 10,20 | 11,69 | 13,09 | 14,85 | 32,01 | 35,17 | 38,08 | 41,64 | 44,18 |
| 24 | 9,89 | 10,86 | 12,40 | 13,85 | 15,66 | 33,20 | 36,42 | 39,36 | 42,98 | 45,56 |
| 25 | 10,52 | 11,52 | 13,12 | 14,61 | 16,47 | 34,38 | 37,65 | 40,65 | 44,31 | 46,93 |
| 26 | 11,16 | 12,20 | 13,84 | 15,38 | 17,29 | 35,56 | 38,89 | 41,92 | 45,64 | 48,29 |
| 27 | 11,81 | 12,88 | 14,57 | 16,15 | 18,11 | 36,74 | 40,11 | 43,19 | 46,96 | 49,64 |
| 28 | 12,46 | 13,56 | 15,31 | 16,93 | 18,94 | 37,92 | 41,34 | 44,46 | 48,28 | 50,99 |
| 29 | 13,12 | 14,26 | 16,05 | 17,71 | 19,77 | 39,09 | 42,56 | 45,72 | 49,59 | 52,34 |
| 30 | 13,79 | 14,95 | 16,79 | 18,49 | 20,60 | 40,26 | 43,77 | 46,98 | 50,89 | 53,67 |
| 40 | 20,71 | 22,16 | 24,43 | 26,51 | 29,05 | 51,81 | 55,76 | 59,34 | 63,69 | 66,77 |
| 50 | 27,99 | 29,71 | 32,36 | 34,76 | 37,69 | 63,17 | 67,50 | 71,42 | 76,15 | 79,49 |
| 60 | 35,53 | 37,48 | 40,48 | 43,19 | 46,46 | 74,40 | 79,08 | 83,30 | 88,38 | 91,95 |
| 70 | 43,28 | 45,44 | 48,76 | 51,74 | 55,33 | 85,53 | 90,53 | 95,02 | 100,43 | 104,21 |
| 80 | 51,17 | 53,54 | 57,15 | 60,39 | 64,28 | 96,58 | 101,88 | 106,63 | 112,33 | 116,32 |
| 90 | 59,20 | 61,75 | 65,65 | 69,13 | 73,29 | 107,57 | 113,15 | 118,14 | 124,12 | 128,30 |
| 100 | 67,33 | 70,06 | 74,22 | 77,93 | 82,36 | 118,50 | 124,34 | 129,56 | 135,81 | 140,17 |

## Tabela de classificação dupla ou de contingência: dois atributos.

**Objetivo:** verificar se **dois atributos qualitativos** (A e B) inerentes a um mesmo indivíduo são **independentes** entre si.

Os indivíduos são classificados segundo esses dois atributos e as frequências observadas são dispostas numa tabela junto com as frequências que seriam esperadas no caso de independência.

| A | B | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | ... | $B_s$ |
| $A_1$ | $X_{11}$ $(E_{11})$ | $X_{12}$ $(E_{12})$ | ... | $X_{1s}(E_{1s})$ |
| $A_2$ | $X_{21}$ $(E_{21})$ | $X_{22}$ $(E_{22})$ | ... | $X_{2s}(E_{2s})$ |
| ... | ... | ... | $X_{ij}(E_{ij})$ | ... |
| $A_r$ | $X_{r1}$ $(E_{r1})$ | $X_{r2}$ $(E_{r2})$ | ... | $X_{rs}(E_{rs})$ |

Frequência observada na célula ij

Frequência esperada na célula ij

onde:

i = número da classe do atributo A, tal que i = 1, 2, ..., r.

j = número da classe do atributo B, tal que j= 1, 2, ..., s.

# Hipóteses estatísticas

| A | B | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | ... | $B_s$ |
| $A_1$ | $X_{11}$ $(E_{11})$ | $X_{12}$ $(E_{12})$ | ... | $X_{1s}(E_{1s})$ |
| $A_2$ | $X_{21}$ $(E_{21})$ | $X_{22}$ $(E_{22})$ | ... | $X_{2s}(E_{2s})$ |
| ... | ... | ... | $X_{ij}(E_{ij})$ | ... |
| $A_r$ | $X_{r1}$ $(E_{r1})$ | $X_{r2}$ $(E_{r2})$ | ... | $X_{rs}(E_{rs})$ |

**Hipótese de independência:** supõem que as variáveis A e B independem entre si

$H_0$: o atributo A **independe** do atributo B

$H_A$: o atributo A **depende** do atributo B

# Tabelas de classificação dupla

Como calcular a frequência esperada na célula ij?

Multiplicando o total da linha i ($X_{i+}$) pelo total da coluna j ($X_{+j}$) e dividindo pelo total geral ($X_{++}$), ou seja, usando a seguinte expressão:

$$E_{ij} = \frac{X_{i+} \times X_{+j}}{X_{++}}$$

| A | B | | | | Totais |
|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | ... | $B_s$ | |
| $A_1$ | $X_{11}$ ($E_{11}$) | $X_{12}$ ($E_{12}$) | ... | $X_{1s}$($E_{1s}$) | $X_{1+}$ |
| $A_2$ | $X_{21}$ ($E_{21}$) | $X_{22}$ ($E_{22}$) | ... | $X_{2s}$($E_{2s}$) | $X_{2+}$ |
| ... | ... | ... | $X_{ij}$($E_{ij}$) | ... | $X_{i+}$ |
| $A_r$ | $X_{r1}$ ($E_{r1}$) | $X_{r2}$ ($E_{r2}$) | ... | $X_{rs}$($E_{rs}$) | $X_{r+}$ |
| Totais | $X_{+1}$ | $X_{+2}$ | $X_{+j}$ | $X_{+s}$ | $X_{++}$ |

# Exemplo: situação 2: Frequências esperadas

| Tratamento | Cura | | Totais |
|---|---|---|---|
| | Sim | Não | |
| Com soro | 75 (70) | 25 (30) | 100 |
| Sem soro | 65 (70) | 35 (30) | 100 |
| Totais | 140 | 60 | 200 |

$$E_{11} = \frac{100 \times 140}{200} = 70 \qquad E_{12} = \frac{100 \times 60}{200} = 30$$

$$E_{21} = \frac{100 \times 140}{200} = 70 \qquad E_{22} = \frac{100 \times 60}{200} = 30$$

# Estatística do Teste

Para verificar se as diferenças entre as **frequências observadas** e **frequências esperadas** são reais ou casuais, utilizamos a estatística Q, assim definida:

$$Q = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{(X_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} \sim \chi^2(\nu),$$

onde:

$X_{ij}$ é a frequência observada da linha i e coluna j

$E_{ij}$ é a frequência esperada da linha i e coluna j

$r$ é o número total de linhas (classes do atributo A)

$s$ é o número total de colunas (classes do atributo B)

$\nu = (r-1) \times (s-1)$ é o número de graus de liberdade

# Restrições ao uso do teste de qui-quadrado

1. O teste é válido apenas para frequências absolutas

2. Sempre que se trabalha com apenas um grau de liberdade, deve-se usar uma "correção de continuidade" para os dados de enumeração

Correção de Yates

$$Q = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(|X_i - E_i| - 0,5\right)^2}{E_i}$$

3. O número de observações (n) não deve ser inferior a 20 e a frequência esperada mínima não deve ser inferior a 1

4. Quando tivermos diversas classes com frequências esperadas menores do que 5, convém agrupá-las em uma só classe

## Exemplo resolvido: Tabela de classificação simples

Um pesquisador realizou cruzamentos entre animais de uma certa espécie bovina com o objetivo de estudar o tipo de herança do caráter pelagem e obteve os seguintes resultados:

| Pelagem | Vermelha | Preta | Branca | Totais |
|---|---|---|---|---|
| Frequência observada ($X_i$) | 72 | 34 | 38 | 144 |
| Frequência esperada ($E_i$) | 81 | 27 | 36 | 144 |

Teste a hipótese de concordância com a teoria mendeliana, usando $\alpha$=0,05.

Passo 1: Estabelecer as hipóteses do teste:

$H_0$: as frequências observadas **concordam** com as esperadas

$H_A$: as frequências observadas **não concordam** com as esperadas

**Passo 2:** Determinar o número de graus de liberdade.

$\nu = k-1 = 3 - 1 = 2$

Não há necessidade de usar a "correção de continuidade"

**Passo 3:** Calcular a estatística do teste: $Q = \sum_{i=1}^{k} \frac{(X_i - E_i)^2}{E_i}$

| Pelagem | Vermelha | Preta | Branca | Totais |
|---|---|---|---|---|
| Frequência observada ($X_i$) | 72 | 34 | 38 | 144 |
| Frequência esperada ($E_i$) | 81 | 27 | 36 | 144 |

$$q = \frac{(72-81)^2}{81} + \frac{(34-27)^2}{27} + \frac{(38-36)^2}{36}$$

$$q = 1 + 1,8148 + 0,1111 = 2,9259$$

**Passo 4:** Determinar o valor crítico e decidir sobre $H_0$.

$$\left.\begin{matrix}\alpha = 0{,}05 \\ \nu = 2\end{matrix}\right\} q_{(\alpha;\ \nu)} = 5{,}99 \;\; > q = 2{,}9259$$

**Decisão:** Não temos motivos para rejeitar $H_0$.

**Passo 5:** Redigir a conclusão.

Concluímos, ao nível de 5% de significância, que as frequências observadas não diferem significativamente das frequências esperadas segundo a herança mendeliana.

# Exemplo resolvido: Classificação dupla

Um experimento foi realizado com o objetivo de estudar a eficácia de um novo soro. Foram utilizadas duzentas cobaias doentes, das quais 100 receberam o soro e as outras 100 não receberam. Os resultados observados foram os seguintes:

| Tratamento | Cura | | Totais |
|---|---|---|---|
| | Sim | Não | |
| Com soro | 75 (70) | 25 (30) | 100 |
| Sem soro | 65 (70) | 35 (30) | 100 |
| Totais | 140 | 60 | 200 |

Teste a hipótese de independência dos atributos, usando $\alpha$=0,01.

Passo 1: Estabelecer as hipóteses do teste:

$H_0$: Cura independe do Tratamento

$H_A$: Cura depende do Tratamento

**Passo 2:** Determinar o número de graus de liberdade.

$\nu = (r-1)\times(s-1) = 1 \times 1 = 1$

Há necessidade de usar a "correção de continuidade"

**Passo 3:** Calcular a estatística do teste: $Q = \sum_{i,j} \frac{\left(|X_{ij} - E_{ij}| - 0,5\right)^2}{E_{ij}}$

| Tratamento | Cura | | Totais |
|---|---|---|---|
| | Sim | Não | |
| Com soro | 75 (70) | 25 (30) | 100 |
| Sem soro | 65 (70) | 35 (30) | 100 |
| Totais | 140 | 60 | 200 |

$$q = \frac{(|75-70| - 0,5)^2}{70} + \frac{(|25-30| - 0,5)^2}{30} + \frac{(|65-70| - 0,5)^2}{70} + \frac{(|35-30| - 0,5)^2}{30}$$

$$q = 0,2893 + 0,675 + 0,2893 + 0,675 = 1,9286$$

**Passo 4:** Determinar o valor crítico e decidir sobre $H_0$.

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = 0{,}01 \\ \nu = 1 \end{array}\right\} q_{(\alpha;\ \nu)} = 6{,}63 \quad > q = 1{,}9296$$

Decisão: **Não temos motivos para rejeitar $H_0$.**

**Passo 5:** Redigir a conclusão.

Concluímos, ao nível de 1% de significância, que as frequências observadas não diferem significativamente das frequências esperadas. Portanto, não temos motivos para concluir que a cura depende do tratamento.

# Bibliografia


BUSSAB, W.O.; MORETTIN, P.A. Estatística Básica. São Paulo: Saraiva. 2006. 526p.

DEVORE, J. Probabilidade e estatística para engenharia e ciências. 8 ed. (Tradução) São Paulo: Cengage Learning. 2016. 633p.

FARIA, E.S. de Estatística Edição 97/1. UFPel (Apostila)

FERREIRA, D.F. Estatística Básica. Lavras: Editora UFLA, 2005, 664p.

FREUND, J.E., SIMON, G.A. Estatística Aplicada. Economia, Administração e Contabilidade. 9.ed., Porto Alegre: Bookman, 2000. 404p.