Unidade IV – Inferência estatística

4.1. Introdução e histórico
4.2. Conceitos fundamentais
4.3. Distribuições amostrais e Teorema central do limite
4.4. Estimação de parâmetros
4.5. Testes de hipóteses
4.6. Quebras das pressuposições no processo de inferência
4.7. Testes de qui-quadrado

Profª. Clause Piana

Teoria dos testes de hipóteses

Profª. Clause Piana

Testes de hipóteses

- Outro problema a ser resolvido pela Inferência Estatística é o de **testar uma hipótese.**
- Feita uma afirmação a respeito de uma população (parâmetro) desejamos **saber se os resultados experimentais (amostra) contrariam tal afirmação.**
- Muitas vezes, essa afirmação sobre a população é derivada de teorias desenvolvidas no campo do conhecimento por meio da observação e do raciocínio.
- A adequação dessa teoria ao universo real pode ser verificada ou refutada pela amostra.
- O objetivo do teste estatístico de hipótese é então fornecer uma metodologia que permita verificar se os dados amostrais trazem evidências que apoiam ou não a hipótese (estatística) formulada.

Teste de hipóteses

Procedimento estatístico onde se busca verificar uma hipótese a respeito da população, no sentido de aceitá-la ou rejeitá-la, a partir de dados amostrais, tendo por base a teoria das probabilidades.

Algoritmo para construção de um teste de hipóteses

1. Definir as hipóteses estatísticas.
2. Fixar a taxa de erro aceitável.
3. Escolher a estatística para testar a hipótese e verificar as pressuposições para o seu uso.
4. Usar as observações da amostra para calcular o valor da estatística do teste.
5. Decidir sobre a hipótese testada e concluir.

1. Hipóteses estatísticas

A hipótese estatística é uma suposição feita a respeito de um ou mais **parâmetros** (μ, σ^2, π, etc.).

Problema científico ← Pergunta

↓

Hipótese de trabalho ← Resposta provisória

↓

Hipótese estatística

Existem dois tipos básicos de hipóteses estatísticas:

- **Hipótese de nulidade (H_0):** é a hipótese que está sob verificação. Esta hipótese supõe a igualdade dos parâmetros que estão sendo comparados.

- **Hipótese alternativa (H_A):** é a hipótese que será considerada caso a hipótese de nulidade seja rejeitada. Esta hipótese supõe que os parâmetros comparados são diferentes.

Situações comuns em testes de hipóteses a respeito de μ

- Comparação de uma média (μ) com um valor padrão (μ_0)
- Comparação entre duas médias (μ_1 e μ_2)

- Comparação de uma média (μ) com um valor padrão (μ_0)

Uma população

⇩

Uma amostra

⇩

Uma estimativa do parâmetro de interesse (μ)

⇕

Um valor conhecido e comprovado (valor padrão)

Exemplo 1: Para verificar se uma nova droga é eficaz no tratamento da pressão alta, a pressão média de um grupo de pacientes submetidos a esta droga (amostra) é comparada com um valor que é considerado normal (valor padrão).

Exemplo 2:

Um engenheiro de desenvolvimento de um fabricante de pneus está investigando a vida do pneu em relação a um novo componente de borracha. Ele fabricou 40 pneus e testou-os até o fim da vida em um teste na estrada. A média e o desvio padrão da amostra são 61.492 e 6.085 km, respectivamente.

O engenheiro acredita que a vida média desse novo pneu supera 60.000 km.

Teste a hipótese de que a verdadeira vida média do pneu não difere de 60.000 km e conclua a respeito da suposição do engenheiro.

- Comparação de uma média (μ) com um valor padrão (μ_0)

$$H_0: \mu = \mu_0 \quad \text{ou} \quad \mu - \mu_0 = 0$$

$$H_A: \mu \neq \mu_0 \quad \text{ou} \quad \mu - \mu_0 \neq 0$$ Bilateral

$$\mu > \mu_0 \quad \text{ou} \quad \mu - \mu_0 > 0$$ Unilateral direita

$$\mu < \mu_0 \quad \text{ou} \quad \mu - \mu_0 < 0$$ Unilateral esquerda

Escolher uma das três

- Comparação entre duas médias (μ_1 e μ_2)

População 1 → **Amostra 1** → Estimativa de μ_1

População 2 → **Amostra 2** → Estimativa de μ_2

Estimativa de μ_1 ⟺ Estimativa de μ_2

Comparação das estimativas

Exemplo 1: Para verificar, entre dois métodos de ensino, qual é o mais eficiente, comparamos os desempenhos médios de dois grupos de alunos (duas amostras), cada um submetido a um método diferente.

Exemplo 2:

Um pesquisador da área de computação está investigando a utilidade de duas diferentes linguagens de programação (A e B) na melhoria das tarefas computacionais.

Trinta programadores experientes, familiarizados com ambas as linguagens, foram divididos aletoriamente em dois grupos. Cada grupo codificou uma função padrão em uma das linguagens e os tempos de codificação da função (em minutos) foram registrados.

As medidas de cada grupo são apresentadas no quadro abaixo.

	n	Média	Variância
Linguagem A	15	17,5	2,31
Linguagem B	15	20,5	3,02

Utilizando um teste de hipótese, verifique se, em média, o tempo de codificação da função padrão difere entre as linguagens.

- Comparação entre duas médias (μ_1 e μ_2)

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 \quad \text{ou} \quad \mu_1 - \mu_2 = 0$$

$$H_A: \boxed{\begin{array}{l} \mu_1 \neq \mu_2 \quad \text{ou} \quad \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \\ \mu_1 > \mu_2 \quad \text{ou} \quad \mu_1 - \mu_2 > 0 \\ \mu_1 < \mu_2 \quad \text{ou} \quad \mu_1 - \mu_2 < 0 \end{array}}$$

Bilateral

Unilateral direita

Unilateral esquerda

Escolher uma das três

Exemplo 1:

Problema científico: Ração a base de soja promove maior ganho de peso em bovinos do que ração a base de milho?

População 1 – bovinos tratados com farelo de soja
População 2 – bovinos tratados farelo de milho

Variável em estudo: X – medida do ganho de peso (kg)

$E(X_1) = \mu_1$ = ganho de peso médio com farelo de soja
$E(X_2) = \mu_2$ = ganho de peso médio com farelo de milho

Hipótese de trabalho: As duas rações têm efeitos diferentes sobre o ganho de peso de bovinos.

Hipóteses estatísticas:

⇨ **Hipótese de nulidade:** o ganho de peso médio de bovinos tratados com farelo de soja não difere do ganho de peso médio de bovinos tratados com farelo de milho

⇨ **Hipótese de alternativa:** o ganho de peso médio de bovinos tratados farelo de soja difere do ganho de peso médio de bovinos tratados com farelo de milho

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 \quad \text{ou} \quad \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ H_A: \mu_1 \neq \mu_2 \quad \text{ou} \quad \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \end{cases}$$

← Bilateral

Quando não temos motivos suficientes para supor que uma das médias será maior que a outra, formulamos uma **hipótese alternativa bilateral** (mais genérica).

Quando a hipótese alternativa é bilateral, dizemos que o **teste de hipóteses** é **bilateral**.

Exemplo 2:

Problema científico: Um novo inseticida é eficaz no combate à lagarta da soja?

População 1 – lavouras de soja com aplicação do inseticida
População 2 – lavouras de soja sem aplicação do inseticida

Variável em estudo: X – número de insetos mortos

$E(X_1) = \mu_1$ = número médio de insetos da população 1 (Com)
$E(X_2) = \mu_2$ = número médio de insetos da população 2 (Sem)

Hipótese de trabalho: O novo inseticida é eficaz no combate à lagarta da soja

Hipóteses estatísticas:

⇨ **Hipótese de nulidade:** a média de insetos mortos na lavoura com inseticida não difere da média de insetos mortos na lavoura sem inseticida

⇨ **Hipótese alternativa:** a média de insetos mortos na lavoura com inseticida é maior que a média de insetos mortos na lavoura sem inseticida

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad \text{ou} \quad \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ H_A : \mu_1 > \mu_2 \quad \text{ou} \quad \mu_1 - \mu_2 > 0 \end{cases}$$

Unilateral direita

Quando temos motivos suficientes para supor que uma das médias será maior que a outra, podemos formular uma **hipótese alternativa unilateral** (mais específica).

Quando a hipótese alternativa é unilateral, dizemos que o **teste de hipóteses** é **unilateral**.

Objetivo: verificar a hipótese

Podemos verificar a hipótese de duas formas:

- avaliar as populações inteiras (todos os bovinos tratados com as duas rações ou todas as lavouras de soja) e comparar suas médias
- avaliar amostras retiradas das populações e utilizar um teste estatístico que compare as médias das amostras

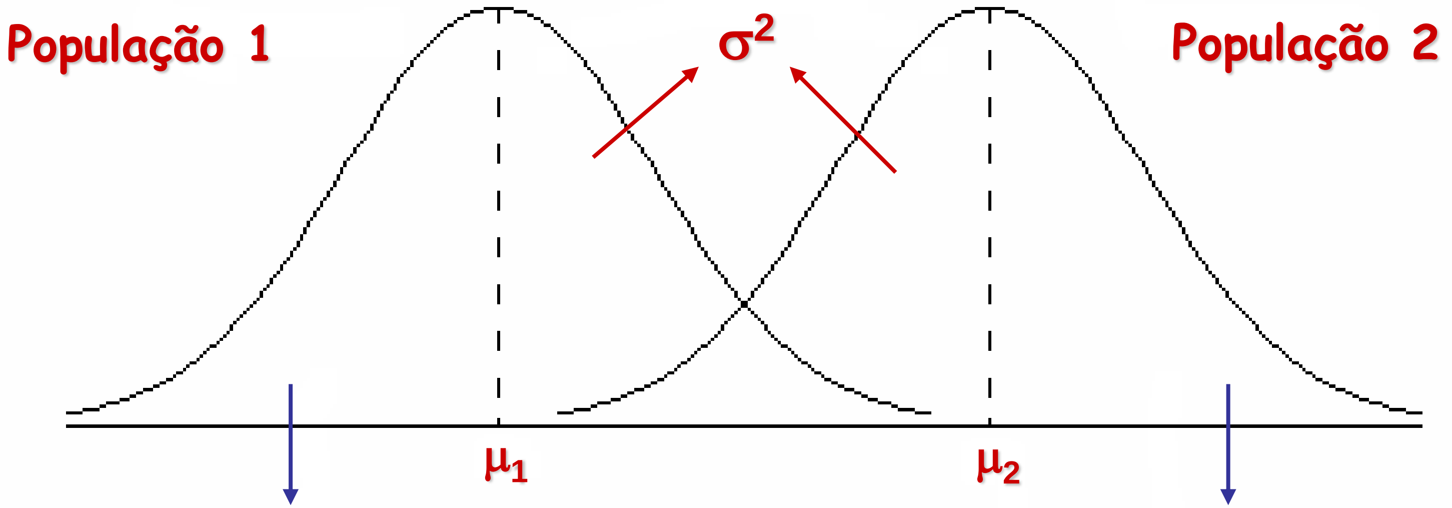
Devemos considerar:

- seria impossível avaliar todos os bovinos tratados com as duas rações ou todas as lavouras de soja
- o processo de amostragem pode fornecer precisão suficiente

Será muito mais econômico e menos trabalhoso utilizar amostras das populações.

Pressuposições:

- A variável em estudo tem distribuição normal
- As variâncias das populações são iguais
- As amostras retiradas das populações são independentes



Amostra 1 $[X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1n1}]$ Amostra 2 $[X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2n2}]$

Para determinar (dimensionar) o tamanho da amostra, devemos definir:

- o tamanho do erro que estamos dispostos a admitir
- a variabilidade aproximada das populações (σ^2)
- a magnitude da diferença a ser detectada

2. Erros de conclusão

Como a hipótese sob verificação é H_0, dois tipos de erro estão associados à decisão a respeito dela:

- **Erro Tipo I**: rejeitar H_0 quando esta é verdadeira

  α=P(erro tipo I) $\rightarrow$ probabilidade de cometer o erro tipo I

- **Erro Tipo II**: não rejeitar H_0 quando esta é falsa

  β=P(erro tipo II) $\rightarrow$ probabilidade de cometer o erro tipo II

Como consequência:

$1-\alpha$ é a probabilidade de não cometer o erro tipo I (probabilidade de não rejeitar H_0 verdadeira)

$1-\beta$ é a probabilidade de não cometer o erro tipo II (probabilidade de rejeitar H_0 falsa)

A probabilidade $1-\beta$ é denominada **poder do teste**.

Réu	Decisão do juiz	
	Não condenar	Condenar
Inocente	Acerto	Erro 1
Culpado	Erro 2	Acerto

H_0	Decisão	
	Não rejeitar	Rejeitar
Verdadeira	Acerto	Erro Tipo I
Falsa	Erro Tipo II	Acerto

Erro Tipo I: Declarar diferença quando ela não existe

Erro Tipo II: Não declarar diferença quando ela existe

Importante!!!

- As duas taxas de erro **α** e **β** estão **relacionadas negativamente**, de modo que a **redução de α** implica no **aumento de β** e vice-versa.
- Para que os testes de hipótese tenham validade, é necessário que sejam delineados de modo a **minimizar os erros de conclusão**
- O único meio de reduzir ambos os tipos de erro é **aumentando o tamanho da amostra**, o que nem sempre é viável.
- Em geral, a preocupação está voltada para o erro tipo I, pois na maioria dos casos ele é considerado o mais grave.
- A probabilidade de ocorrência do erro tipo I (α) chamada de **nível de significância** do teste.

3. Estatística do teste

Para testar hipóteses a respeito do **parâmetro μ**, utilizamos a **variável aleatória T** que tem distribuição **t de Student**.

$$T = \frac{\hat{\theta} - \theta}{S(\hat{\theta})} \sim t(\nu)$$

onde:

θ **é o parâmetro estimado**

$\hat{\theta}$ **é estimador do parâmetro**

$S(\hat{\theta})$ **é o estimador do erro padrão do** $\hat{\theta}$

ν **é o número de graus de liberdade**

3.1. Comparação de uma média (μ) com um valor padrão (μ_0)

Pressuposição: A variável em estudo tem distribuição normal

Hipótese sob verificação: $H_0 : \mu = \mu_0$

Estatística do teste: $T = \dfrac{\hat{\theta} - \theta}{S(\hat{\theta})} \sim t\ (\nu)$

onde:

$$\theta = \mu = \mu_0$$

$$\hat{\theta} = \bar{X}$$

$$S(\hat{\theta}) = S(\bar{X}) = \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$\nu = n - 1$$

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

Valor que deve ser calculado na amostra

Estatística do teste

3.2. Comparação entre duas médias (μ_1 e μ_2)

Pressuposições:

A variável em estudo tem distribuição normal
As variâncias das populações são iguais
As amostras retiradas das populações são independentes

Hipótese sob verificação: $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$

Estatística do teste: $T = \dfrac{\hat{\theta} - \theta}{S(\hat{\theta})} \sim t\,(\nu)$

onde:

$$\theta = \mu_1 - \mu_2 = 0$$

$$\hat{\theta} = \bar{X}_1 - \bar{X}_2$$

$$S(\hat{\theta}) = S(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = \sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) S^2}$$

$$\nu = (n_1 - 1) + (n_2 - 1)$$

$$T = \frac{\hat{\theta} - 0}{S(\hat{\theta})} = \frac{\hat{\theta}}{S(\hat{\theta})}$$

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) S^2}}$$

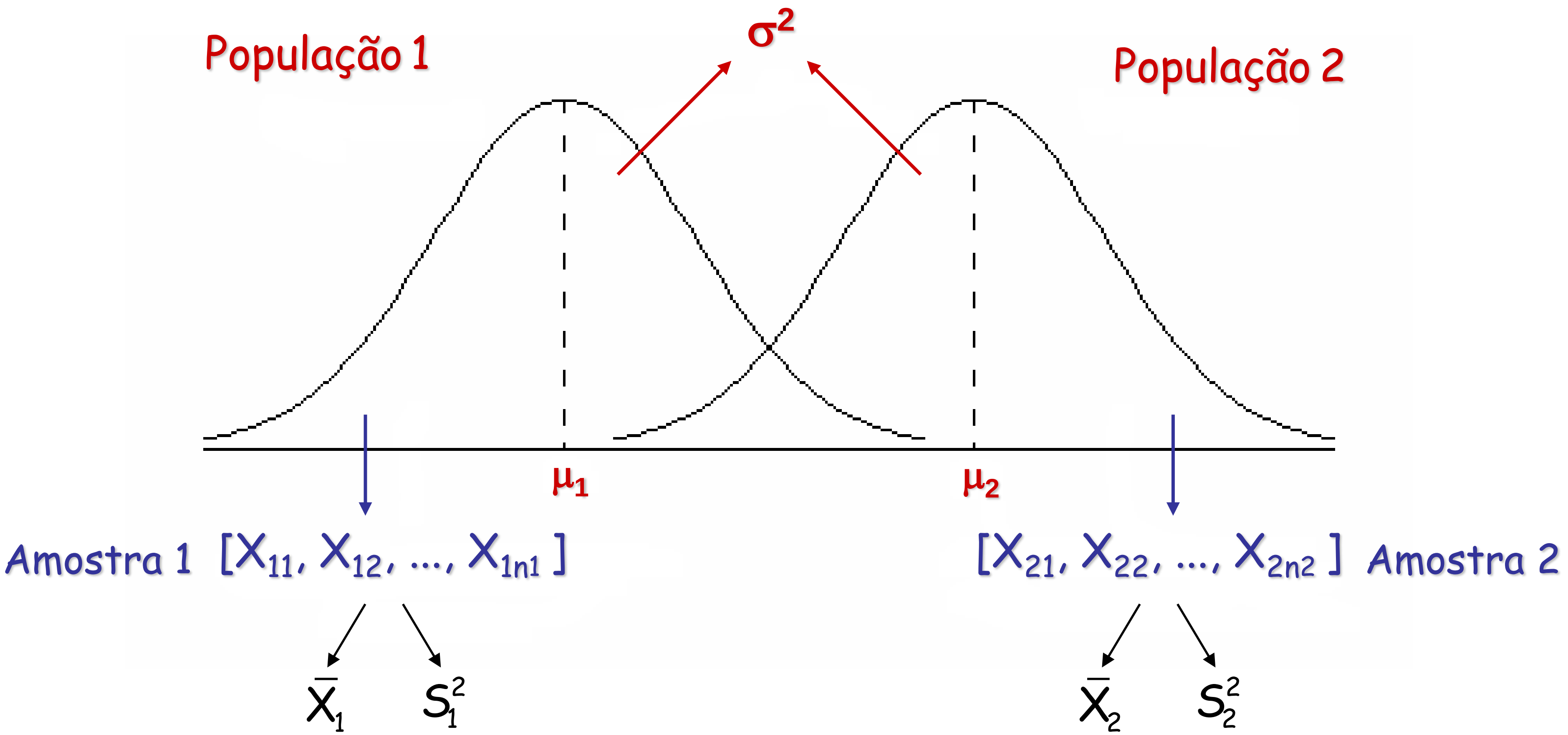
Valor que deve ser calculado na amostra

Estatística do teste

3.2. Comparação entre duas médias (μ_1 e μ_2)

Pressuposições para o uso da estatística T:

- A variável em estudo tem distribuição normal.
- As variâncias das populações são iguais.
- As amostras retiradas das populações são independentes.



3.1. Comparação de uma média (μ) com um valor padrão (μ_0)

Pressuposição: A variável em estudo tem distribuição normal

Hipótese sob verificação: $H_0: \mu = \mu_0$

Estatística do teste: $\boxed{T = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}}} \sim t\ (\nu)$

3.2. Comparação entre duas médias (μ_1 e μ_2)

Pressuposições:

A variável em estudo tem distribuição normal
As variâncias das populações são iguais
As amostras retiradas das populações são independentes

Hipótese sob verificação: $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$

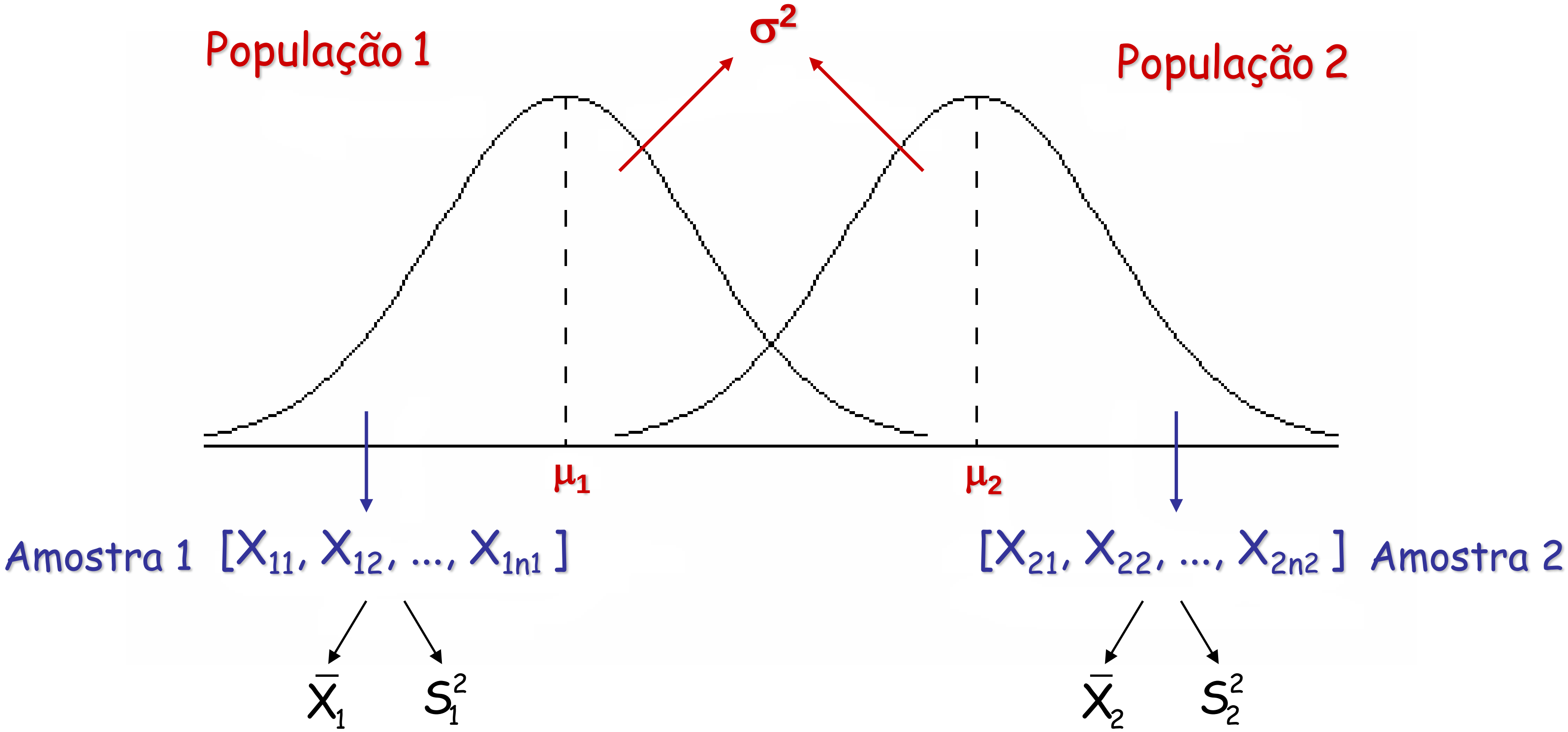
Estatística do teste: $\boxed{T = \dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right) S^2}}} \sim t\ (\nu)$

4. Critério de decisão

Comparação de duas médias $\begin{cases} H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ H_A: \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \end{cases}$

Possíveis conclusões para H_0

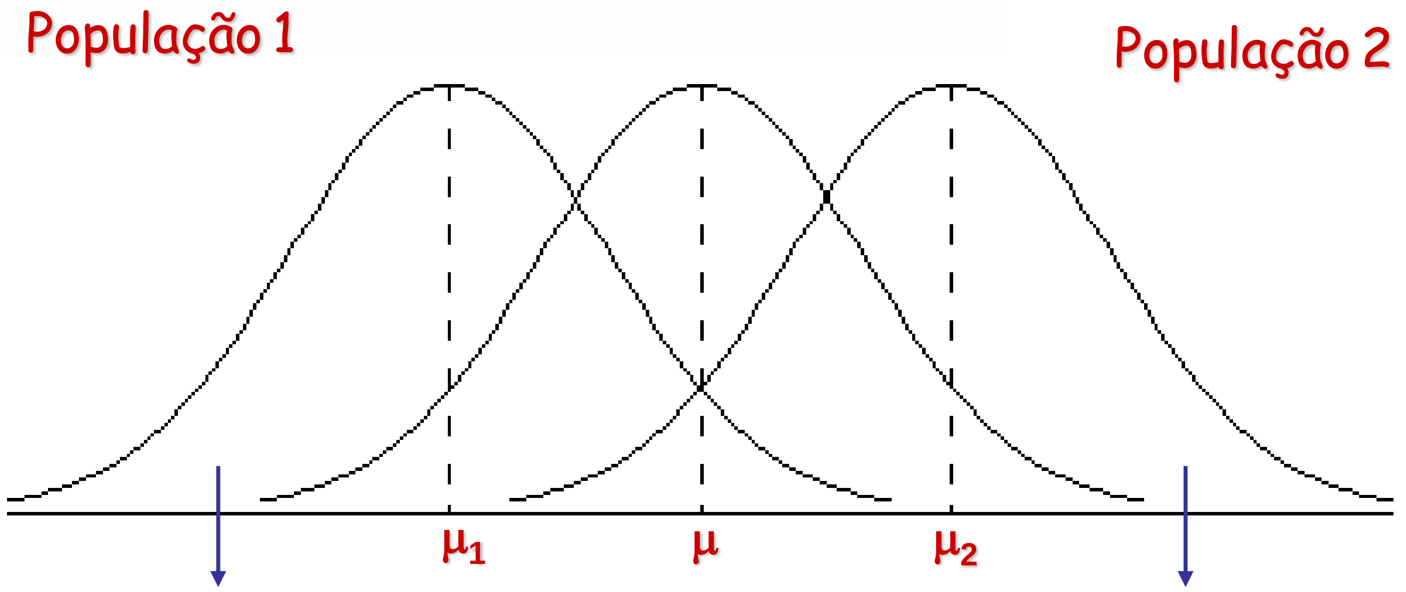
1. H_0 é falsa: temos duas populações com médias diferentes



2. H_0 é verdadeira: as médias das duas populações não diferem

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu$$

Portanto, em vez de duas populações, temos apenas uma



Amostra 1 $[X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1n1}]$ $[X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2n2}]$ Amostra 2

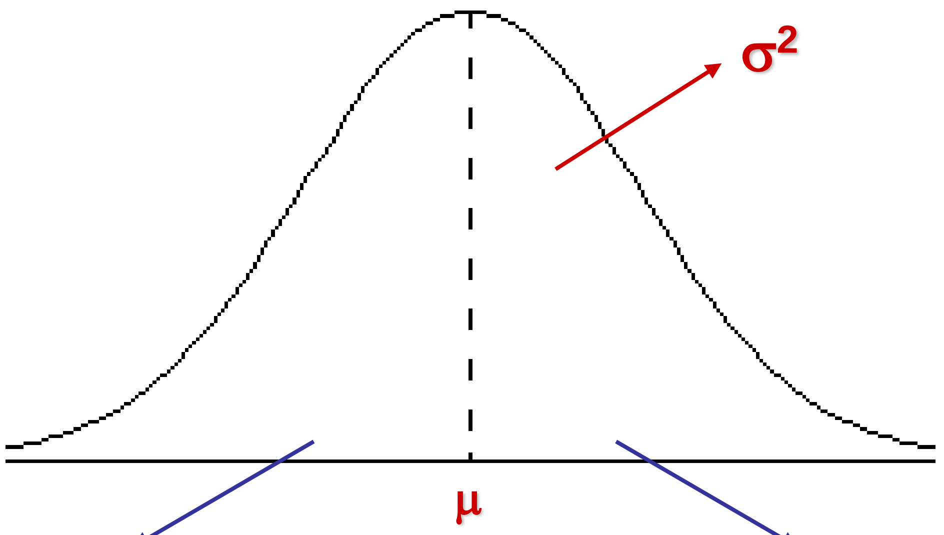
$\bar{X}_1$ S_1^2 $\bar{X}_2$ S_2^2

2. H_0 é verdadeira: as médias das duas populações não diferem

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu$$

Portanto, em vez de duas populações, temos apenas uma

População única



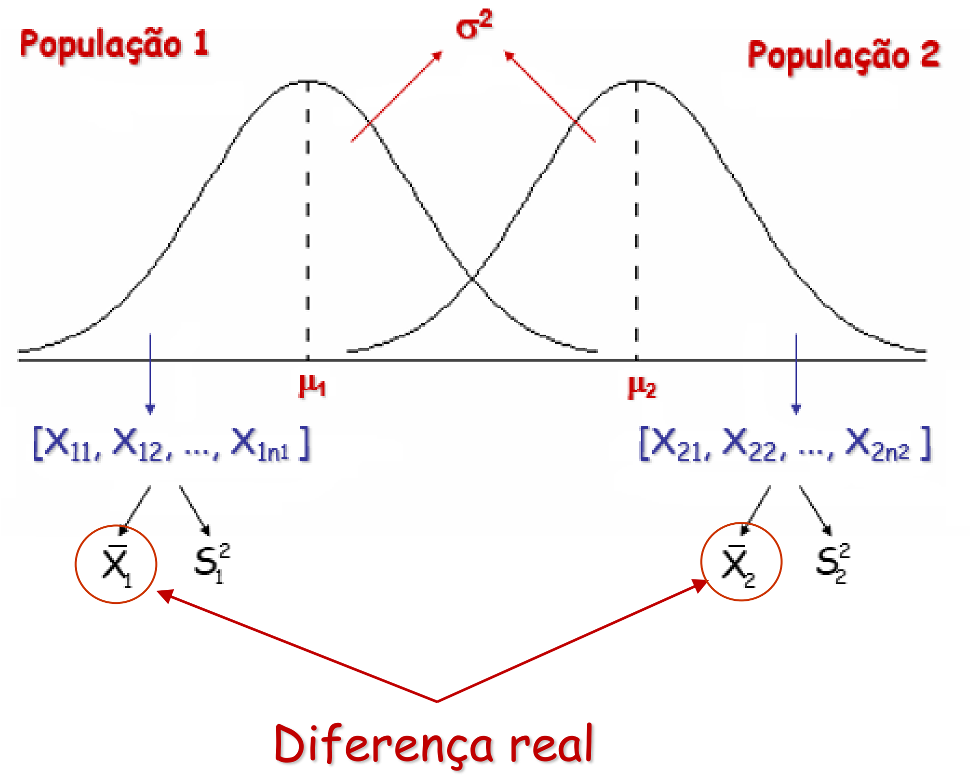
Amostra 1 $[X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1n1}]$ $\quad$ $[X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2n2}]$ Amostra 2

$\bar{X}_1 \quad S_1^2 \qquad\qquad \bar{X}_2 \quad S_2^2$

Possíveis conclusões para H_0

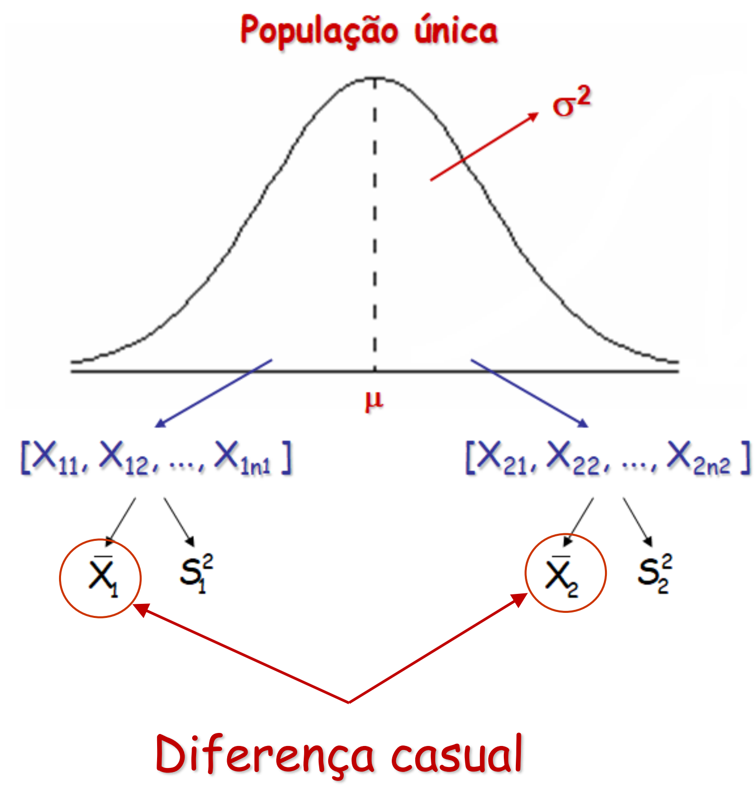
Rejeita H_0

$$H_A: \mu_1 \neq \mu_2$$



Não rejeita H_0

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu$$



O teste de hipótese permite concluir se a diferença entre as médias amostrais é real ou casual.

Critério de decisão – Teste bilateral

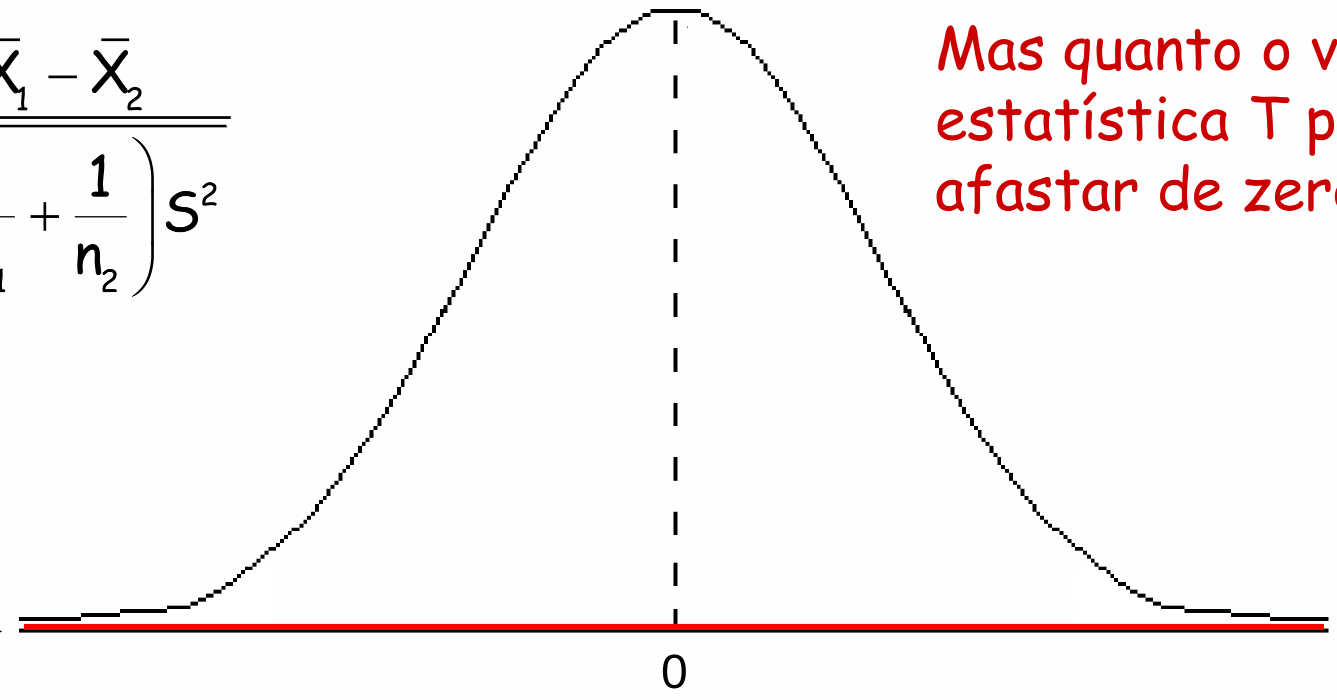
Comparação de médias

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$$
$$H_A: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) S^2}}$$

Se H_0 é verdadeira, devemos esperar que o valor da estatística T seja próximo de zero.

Mas quanto o valor da estatística T pode se afastar de zero?



valores da estatística T

Comparação de médias

Se H_0 é verdadeira, devemos esperar que o valor da estatística T seja próximo de zero.

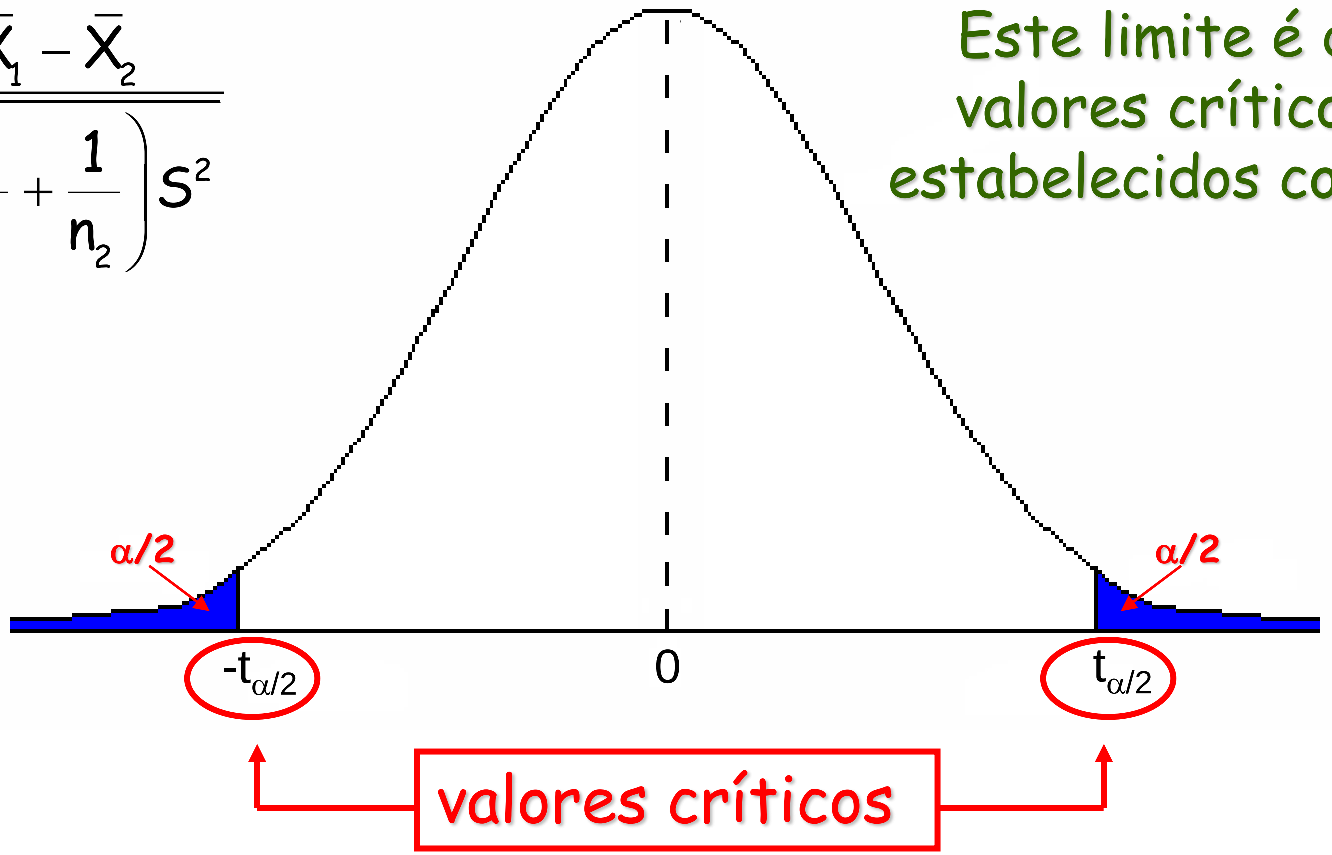
$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$$

$$H_A: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

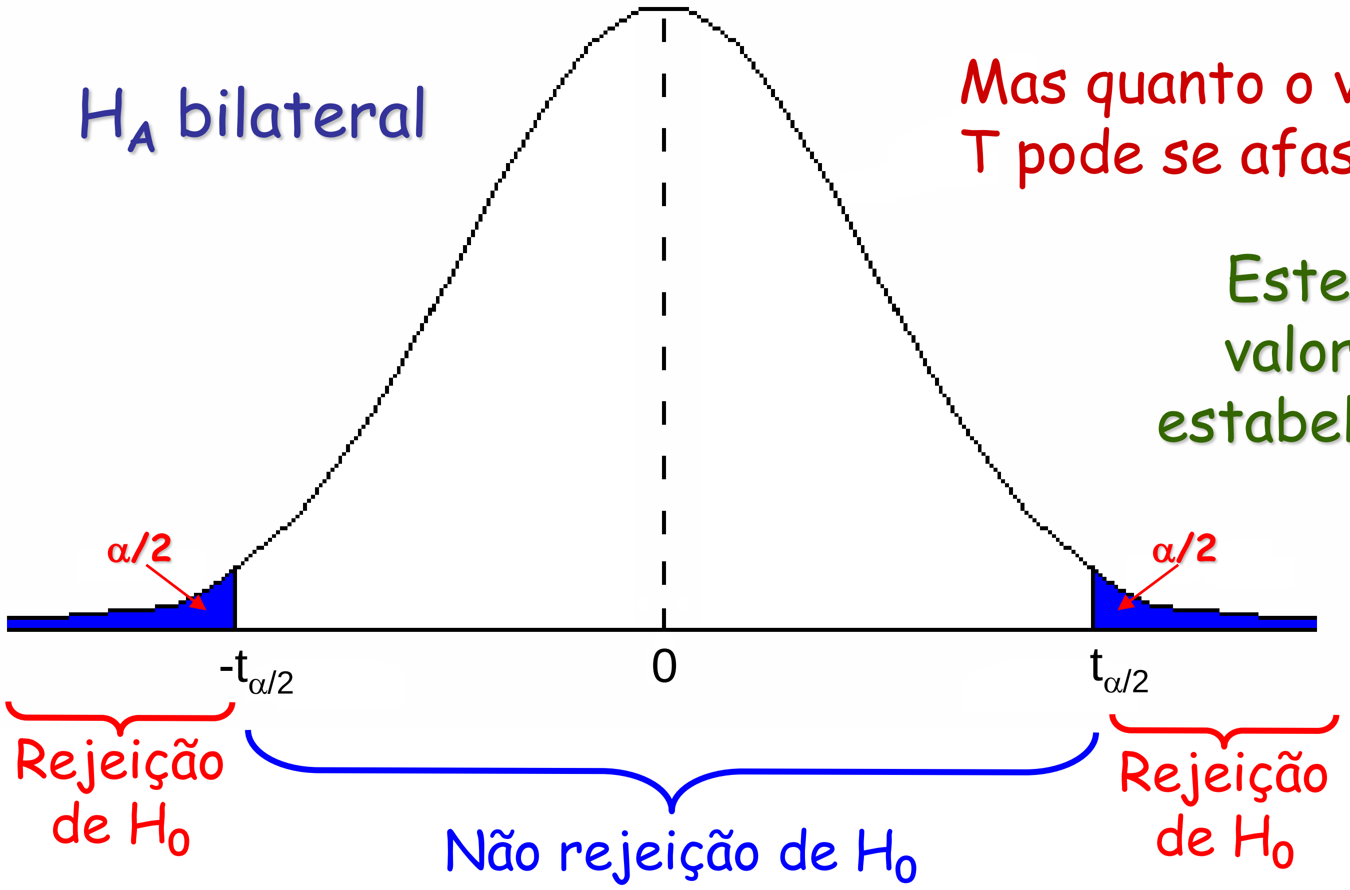
Mas quanto o valor da estatística T pode se afastar de zero?

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) S^2}}$$

Este limite é dado pelos valores críticos, que são estabelecidos com base no α.



H_A bilateral



Mas quanto o valor da estatística T pode se afastar de zero?

Este limite é dado pelos valores críticos, que são estabelecidos com base no α.

⇨ Se o valor t (calculado na amostra) estiver entre $-t_{\alpha/2}$ e $t_{\alpha/2}$, não temos motivos para rejeitar H_0

⇨ Se o valor t (calculado na amostra) for menor que $-t_{\alpha/2}$ ou maior que $t_{\alpha/2}$, rejeitamos H_0

Como tomar a decisão a respeito de H_0?

Para decidir comparamos o valor da estatística T (calculado) com o valor crítico (tabelado):

- Rejeitamos H_0, ao nível α, se o valor da estatística, em módulo, for maior que o valor crítico:

$$|t| > t_{\alpha/2} \Rightarrow \text{t é atípico}$$

- Não temos motivos suficientes para rejeitar H_0, ao nível α, se o valor da estatística, em módulo, for menor que o valor crítico:

$$|t| \leq t_{\alpha/2} \Rightarrow \text{t é típico}$$

Critério de decisão – Teste unilateral

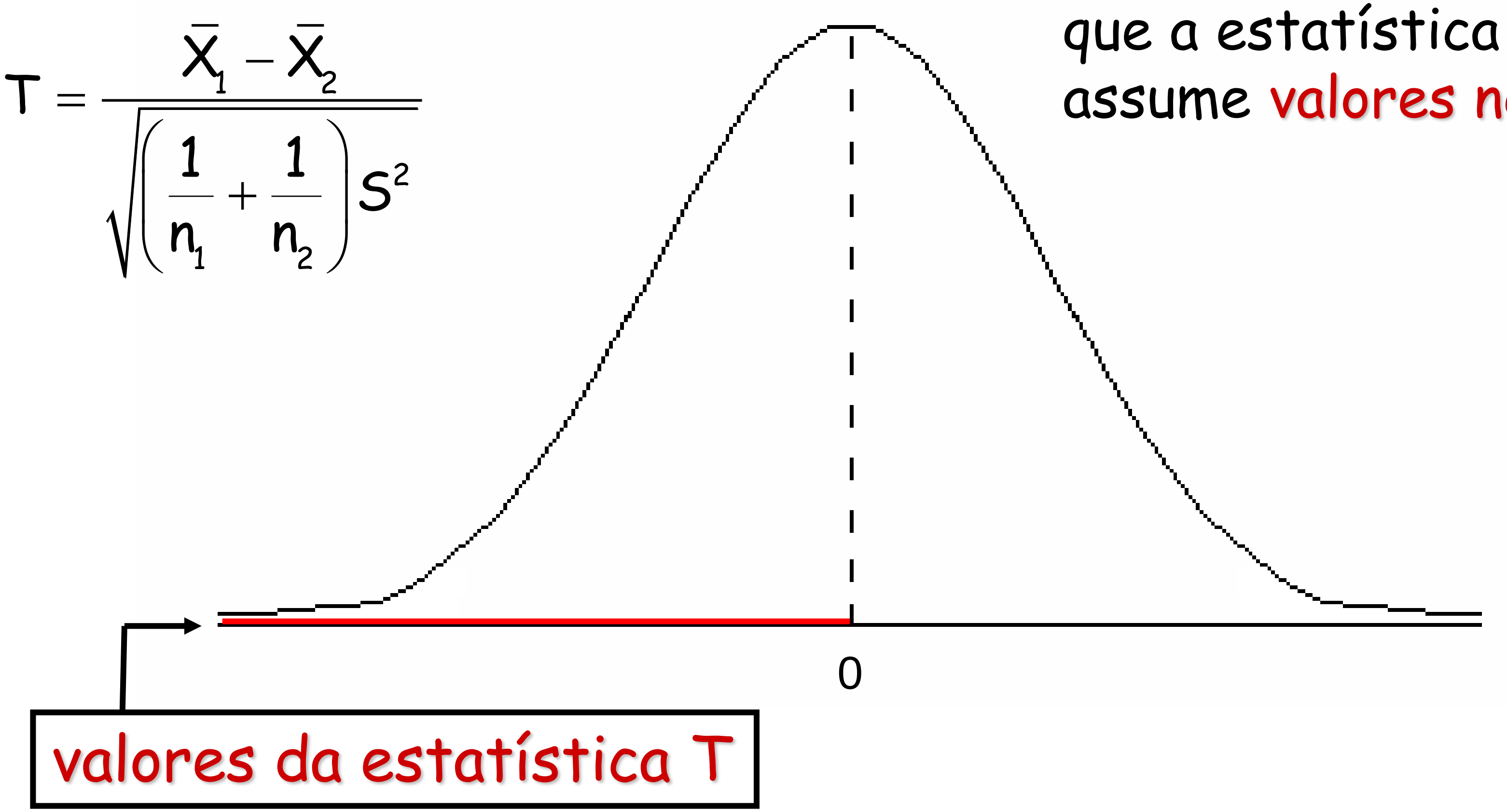
Comparação de médias

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$$

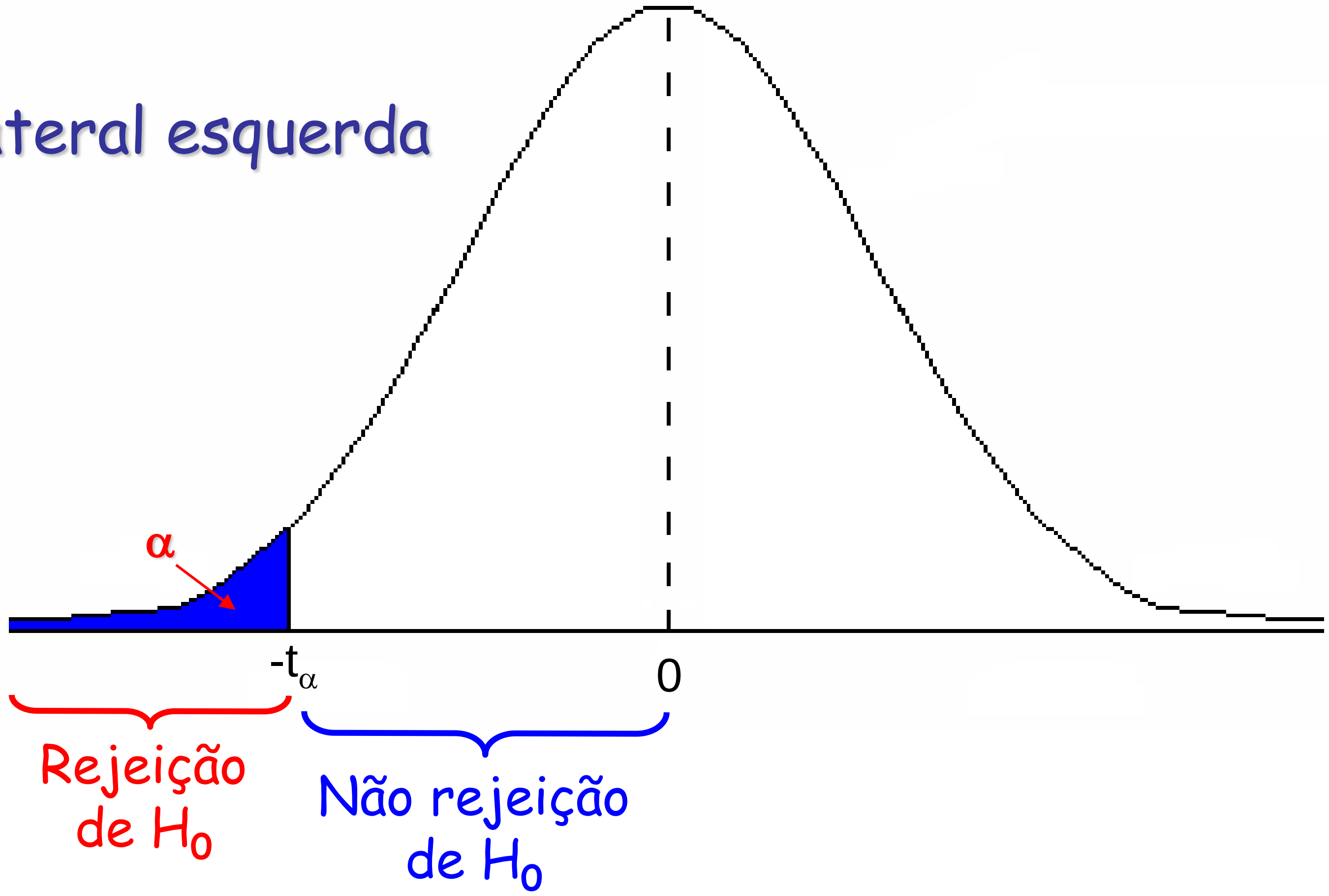
$$H_A : \mu_1 - \mu_2 < 0$$

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) S^2}}$$

H_A unilateral esquerda supõe que a diferença entre os parâmetros é um valor negativo, deste modo supomos também que a estatística T só assume valores negativos.



H_A unilateral esquerda



- ⇨ Se o valor t (calculado na amostra) for maior que $-t_\alpha$, não temos motivos para rejeitar H_0
- ⇨ Se o valor t (calculado) for menor que $-t_\alpha$, rejeitamos H_0

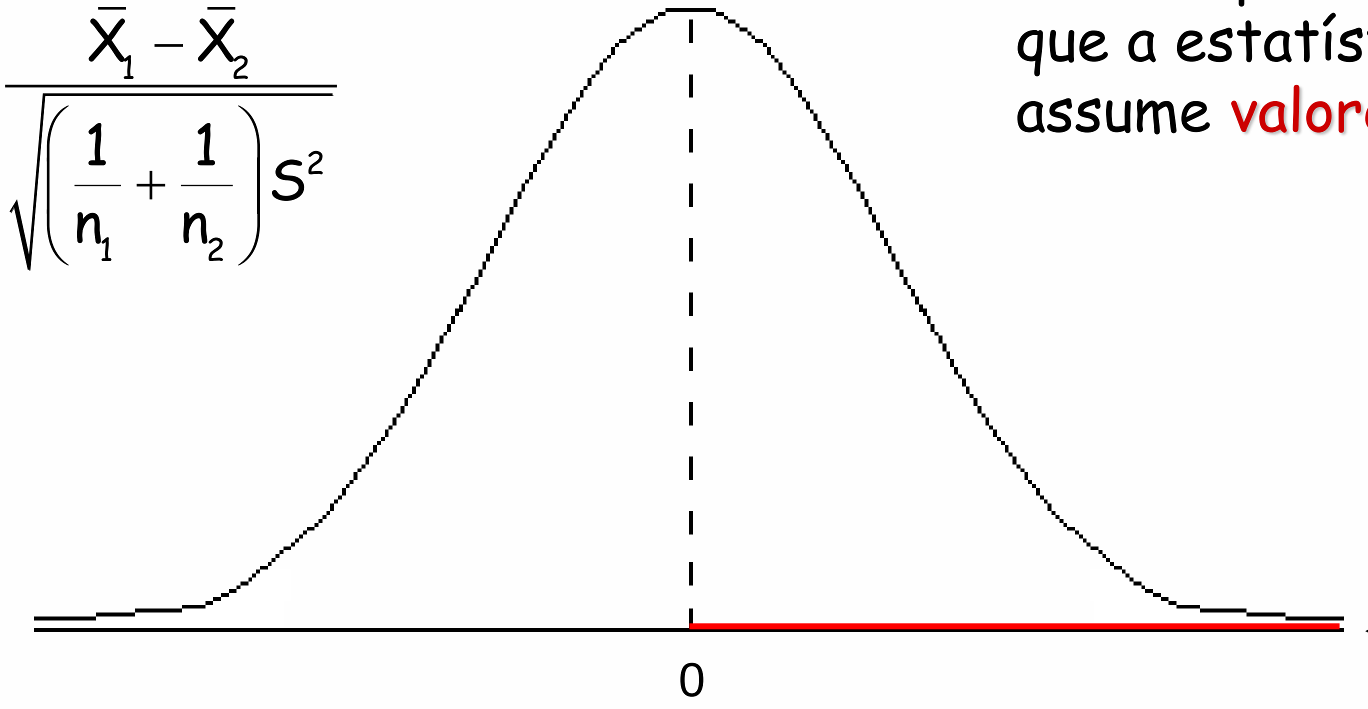
Critério de decisão – Teste unilateral

Comparação de médias

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$$
$$H_A: \mu_1 - \mu_2 > 0$$

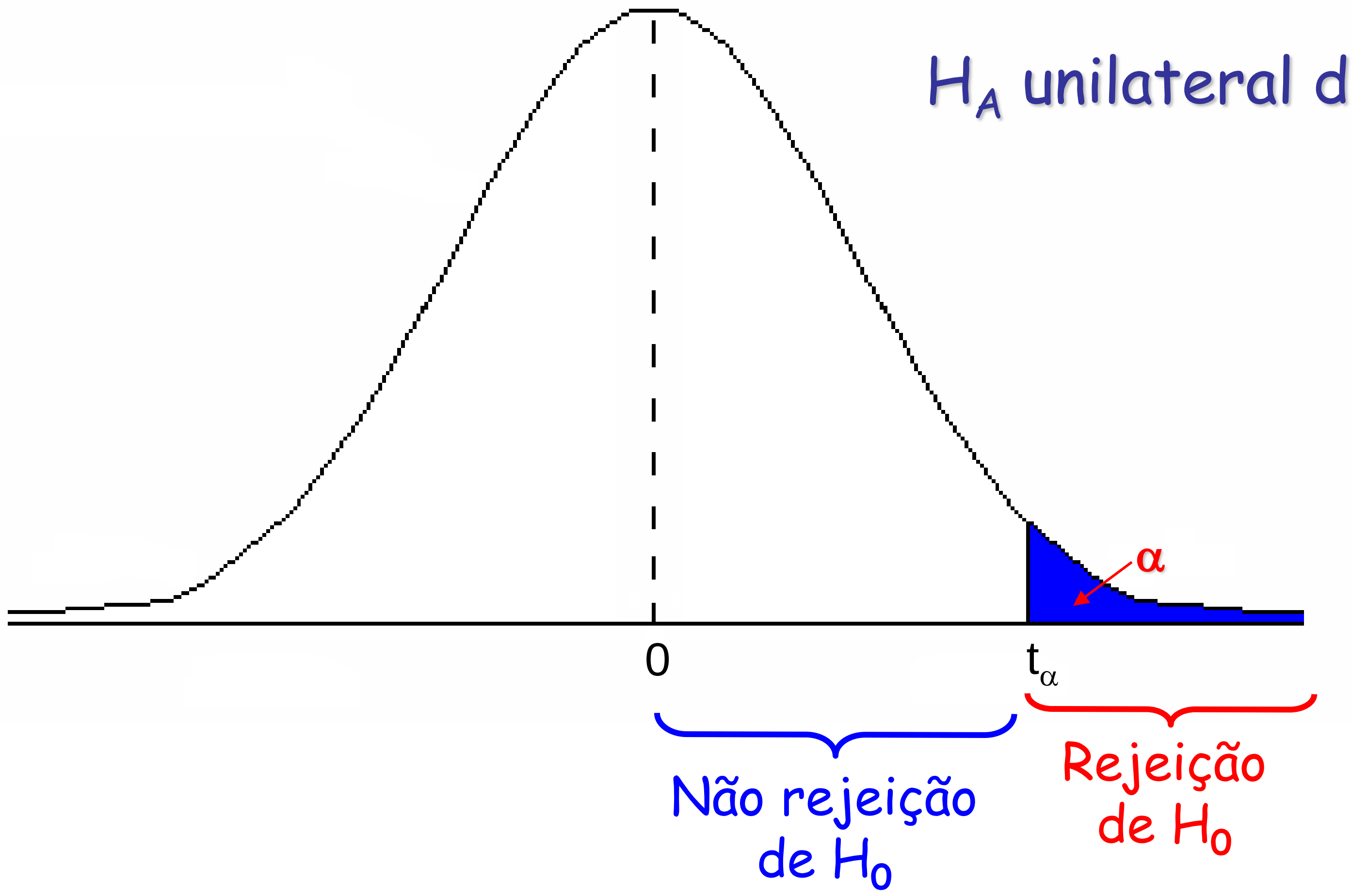
$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)S^2}}$$

H_A unilateral direita
supõe que a diferença entre os parâmetros é um valor positivo, deste modo supomos também que a estatística T só assume valores positivos.



valores da estatística T

H_A unilateral direita



- Se o valor t (calculado na amostra) for menor que t_α, não temos motivos para rejeitar H_0
- Se o valor t (calculado) for maior que t_α, rejeitamos H_0

Como tomar a decisão a respeito de H_0?

Para decidir comparamos o valor da estatística T (calculado) com o valor crítico (tabelado):

⇨ Rejeitamos H_0, ao nível α, se o valor da estatística, em módulo, for maior que o valor crítico:

$$|t| > t_\alpha \Rightarrow \text{t é atípico}$$

⇨ Não temos motivos suficientes para rejeitar H_0, ao nível α, se o valor da estatística, em módulo, for menor que o valor crítico:

$$|t| \leq t_\alpha \Rightarrow \text{t é típico}$$

Graus de Liberdade (ν)	**Limites bilaterais**: $P(\lvert t \rvert > t_{\alpha/2})$							
	Nível de Significância (α)							
	0,50	0,20	0,10	0,05	0,025	0,02	0,01	0,005
1	1,000	3,078	6,314	12,706	25,542	31,821	63,657	127,320
2	0,816	1,886	2,920	4,303	6,205	6,965	9,925	14,089
3	0,715	1,638	2,353	3,183	4,177	4,541	5,841	7,453
4	0,741	1,533	2,132	2,776	3,495	3,747	4,604	5,598
5	0,727	1,476	2,015	2,571	3,163	3,365	4,032	4,773
6	0,718	1,440	1,943	2,447	2,969	3,143	3,707	4,317
7	0,711	1,415	1,895	2,365	2,841	2,998	3,500	4,029
8	0,706	1,397	1,860	2,306	2,752	2,896	3,355	3,833
9	0,703	1,383	1,833	2,262	2,685	2,821	3,250	3,690
10	0,700	1,372	1,813	2,228	2,634	2,764	3,169	3,581
11	0,697	1,363	1,796	2,201	2,503	2,718	3,106	3,497
12	0,695	1,356	1,782	2,179	2,560	2,681	3,055	3,428
13	0,694	1,350	1,771	2,160	2,533	2,650	3,012	3,373
14	0,692	1,345	1,761	2,145	2,510	2,624	2,977	3,326
15	0,691	1,341	1,753	2,132	2,490	2,602	2,947	3,286
16	0,690	1,337	1,746	2,120	2,473	2,583	2,921	3,252
17	0,689	1,333	1,740	2,110	2,458	2,567	2,898	3,223
18	0,688	1,330	1,734	2,101	2,445	2,552	2,878	3,197
19	0,688	1,328	1,729	2,093	2,433	2,539	2,861	3,174
20	0,687	1,325	1,725	2,086	2,423	2,528	2,845	3,153
21	0,686	1,323	1,721	2,080	2,414	2,518	2,831	3,135
22	0,686	1,321	1,717	2,074	2,406	2,508	2,819	3,119
23	0,685	1,319	1,714	2,069	2,398	2,500	2,807	3,104
24	0,685	1,318	1,711	2,064	2,391	2,492	2,797	3,091
25	0,684	1,316	1,708	2,060	2,385	2,485	2,787	3,078
26	0,684	1,315	1,706	2,056	2,379	2,479	2,779	3,067
27	0,684	1,314	1,703	2,052	2,373	2,473	2,771	3,057
28	0,683	1,313	1,701	2,048	2,369	2,467	2,763	3,047
29	0,683	1,311	1,699	2,045	2,364	2,462	2,756	3,038
30	0,683	1,310	1,697	2,042	2,360	2,457	2,750	3,030
40	0,681	1,303	1,684	2,021	2,329	2,423	2,705	2,971
60	0,679	1,296	1,671	2,000	2,299	2,390	2,660	2,915
120	0,677	1,289	1,658	1,980	2,270	2,358	2,617	2,860
...	0,674	1,282	1,645	1,960	2,241	2,326	2,576	2,807
Graus de Liberdade (ν)	0,25	0,10	0,05	0,025	0,0125	0,01	0,005	0,0025
	Nível de Significância (α)							
	Limites unilaterais: $P(\lvert t \rvert > t_{\alpha})$							

Critério de decisão

A regra de decisão a respeito de H_0 pode ser estabelecida com base num **valor crítico**:

⇨ Se o teste for **bilateral** (hipótese alternativa bilateral), o valor crítico será:

$t_{\alpha/2(\nu)}$: valor da estatística T que delimita a área $\alpha/2$, para ν graus de liberdade (Tabela: limites bilaterais)

⇨ Se o teste for **unilateral** (hipótese alternativa unilateral), o valor crítico será:

$t_{\alpha(\nu)}$: valor da estatística T que delimita a área α, para ν graus de liberdade (Tabela: limites unilaterais)

Nível de significância do teste

⇨ A probabilidade α de se cometer um erro tipo I é um valor arbitrário e recebe o nome de nível de significância do teste

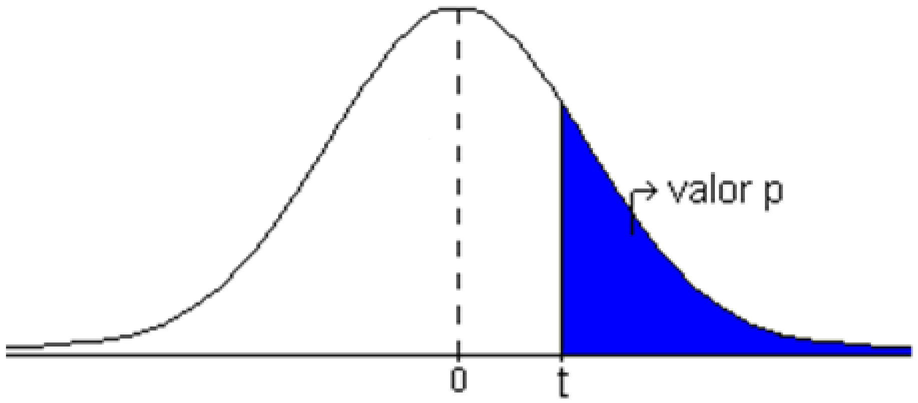
⇨ O resultado da amostra é tanto mais significante para rejeitar H_0 quanto menor for esse nível α. Ou seja, quanto menor for α, menor é a probabilidade de se obter uma amostra com estatística pertencente a região crítica, sendo pouco verossímel a obtenção de uma amostra da população para a qual H_0 seja verdadeira.

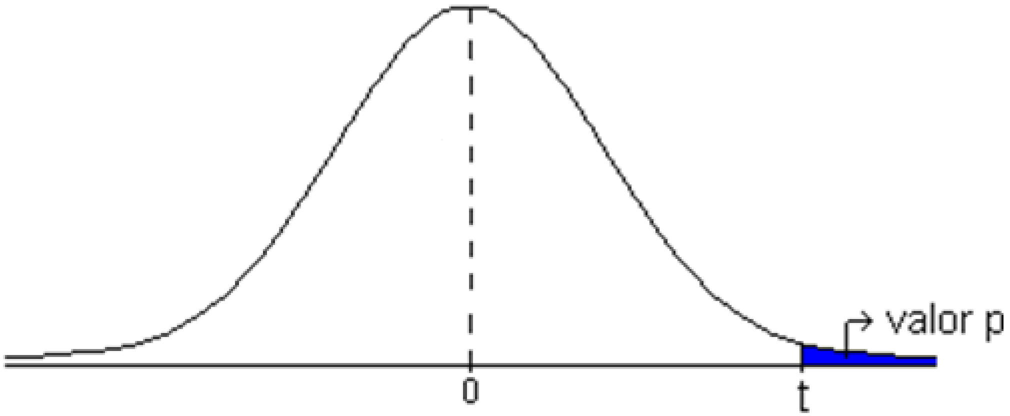
⇨ A probabilidade do erro tipo II, por outro lado, na maioria dos casos, não pode ser calculada, pois a hipótese alternativa usualmente especifica um conjunto de valores para o parâmetro. Esta probabilidade β só pode ser calculada se for especificado um valor alternativo para μ.

⇨ Usualmente, o valor α é fixado em 5%, 1% e 0,1%. A fixação do valor de α envolve uma questionável arbitrariedade. Neste sentido, há um modo alternativo de se proceder, que será exposto a seguir.

Outro critério de decisão

Valor p: probabilidade de que seja obtido um valor t maior que aquele calculado na amostra, dado que H_0 é verdadeira





Outro critério de decisão

Valor p: probabilidade de que seja obtido um valor t maior que aquele calculado na amostra, dado que H_0 é verdadeira

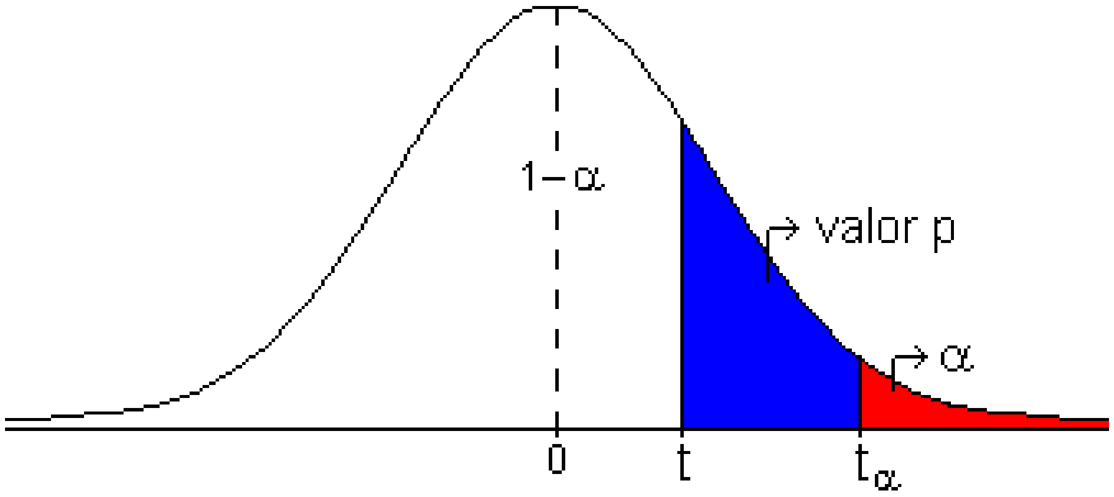
Como tomar a decisão a respeito de H_0?

⇨ Se o valor p for maior que α: não rejeitamos a hipótese nula pois t é típico ou está em uma região de alta probabilidade

⇨ Se o valor p for menor que α: rejeitamos a hipótese nula pois t é atípico ou está em uma região de baixa probabilidade

Se $p > \alpha$ ⇨ t é típico

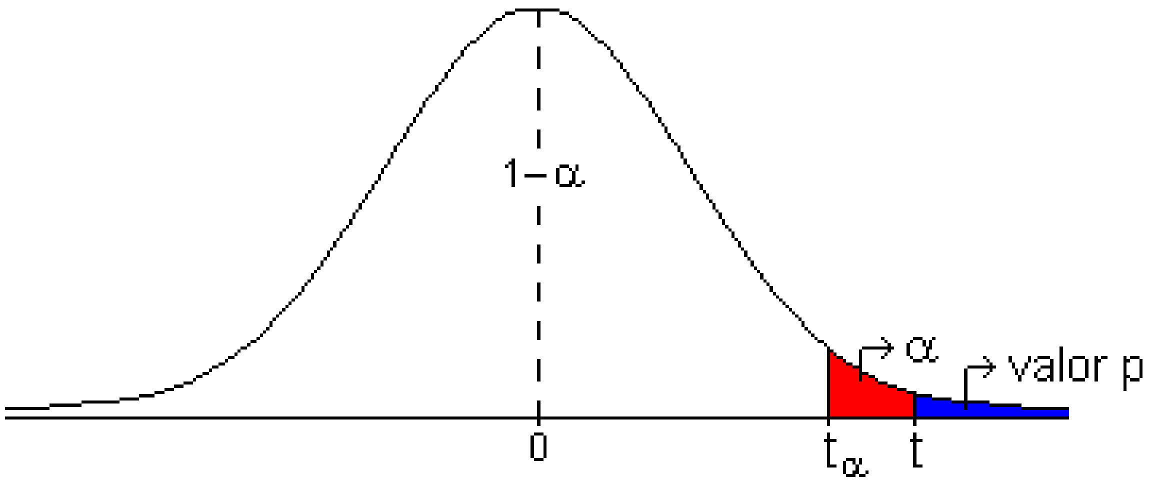
Não rejeitamos a hipótese de nulidade



Se **p** < α ⇨ t é atípico

⇓

Rejeitamos a hipótese de nulidade



Decisão sobre H_0

Critério 1: comparar o módulo de t calculado com o t_α (tabelado) $\lvert t\rvert > t_\alpha$ → Rejeição de H_0 → t grande é evidência contra H_0 $\lvert t\rvert \leq t_\alpha$ → Não rejeição de H_0 → t pequeno é evidência a favor de H_0
Critério 2: comparar o valor p com o α $p < \alpha$ → Rejeição de H_0 → valor p pequeno é evidência contra H_0 $p \geq \alpha$ → Não rejeição de H_0 → valor p grande é evidência a favor de H_0

Poder do teste

⇨ Vimos que $1-\beta$ é a probabilidade de não cometer o erro tipo II, ou seja, é a probabilidade de rejeitar H_0 quando ela é falsa.

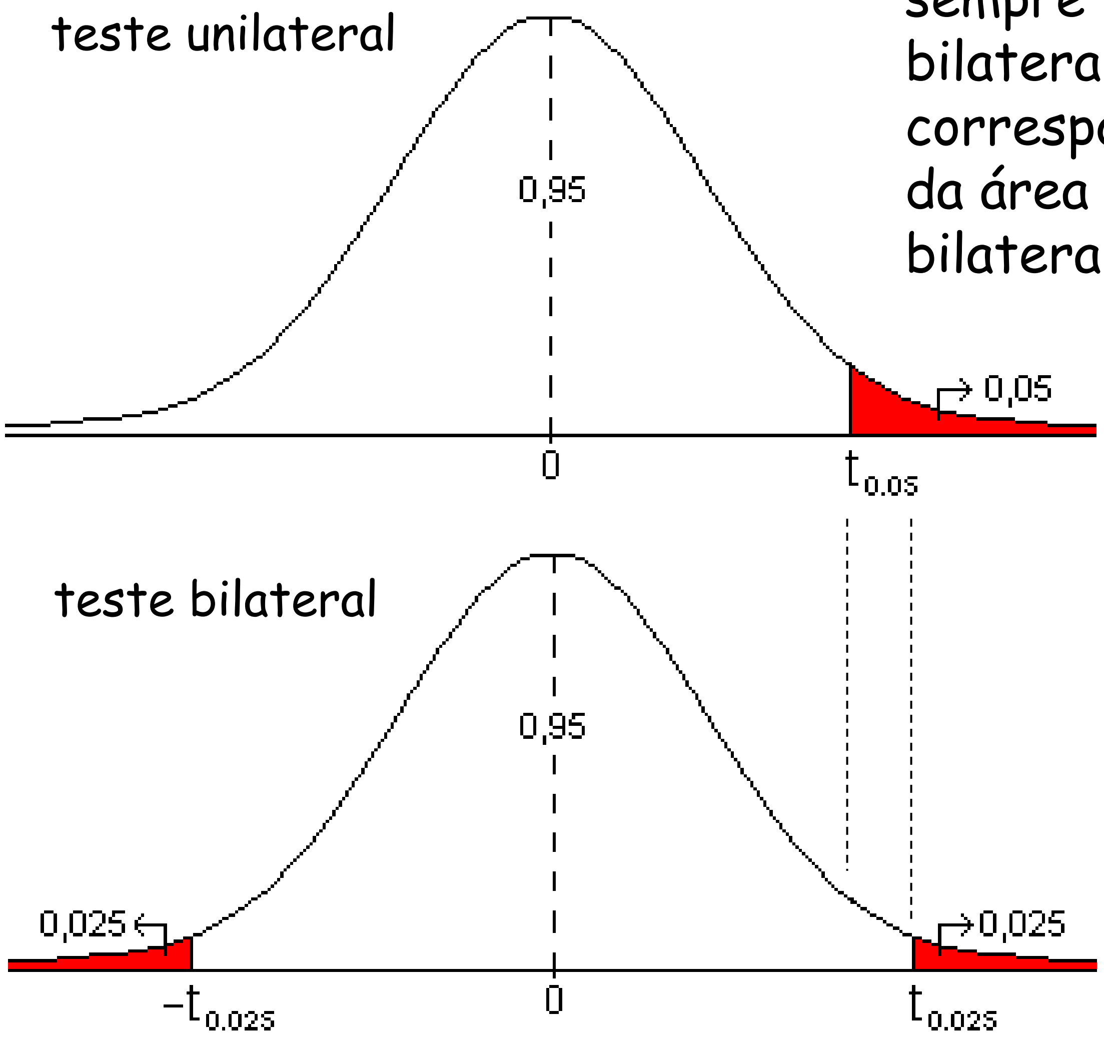
⇨ Esta probabilidade $1-\beta$ é denominada **poder do teste**.

⇨ Assim, quanto maior a probabilidade de um teste rejeitar H_0 mais poderoso ele é, pois tem maior probabilidade de detectar a diferença entre as médias.

Qual dos testes é mais poderoso: **unilateral** ou **bilateral**?

O mais poderoso é aquele que, para um mesmo valor α, tem maior probabilidade rejeitar H_0.

α = 0,05



No teste unilateral o valor t crítico é sempre menor do que o crítico no teste bilateral, porque a área a sua direita deve corresponder a todo α. Esta área é o dobro da área à direita do valor t crítico do teste bilateral.

- Se o t calculado for menor do que o $t_{0,05}$, H_0 não será rejeitada em nenhum dos testes.

- Se o t calculado for maior do que o $t_{0,025}$, H_0 será rejeitada em ambos os testes.

- Se o t calculado estiver entre de $t_{0,05}$ e $t_{0,025}$, H_0 será rejeitada no teste unilateral, mas não será rejeitada no teste bilateral.

O teste **unilateral** é mais poderoso!

Considerações finais

- Os **intervalos de confiança** e os **testes de hipóteses bilaterais** são procedimentos estatísticos relacionados.

- Se forem utilizados para analisar os mesmos dados, ao mesmo nível de significância, devem conduzir aos mesmos resultados.

- O intervalo de confiança para **uma média** está relacionado com o teste de hipóteses que **compara uma média com um padrão**.
  H_0 não rejeitada $\Leftrightarrow$ valor padrão está coberto pelo intervalo

- O intervalo de confiança para a **diferença entre duas médias** está relacionado com o teste de hipóteses que **compara duas médias**.
  H_0 não rejeitada $\Leftrightarrow$ zero está coberto pelo intervalo

Intervalo de confiança para uma média (μ)

$$IC\ (\mu;\ 1-\alpha):\ \overline{X} \pm t_{\alpha/2}\,\frac{S}{\sqrt{n}}$$

Estatística T para comparação de média (μ) com valor padrão (μ_0)

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}}$$

Valor crítico: $t_{\alpha/2}$

⇨ Se no teste de hipóteses, ao nível de 1% de significância, rejeitamos H_0, significa que a diferença entre a média e o valor padrão não é zero, ou seja, média e valor padrão são diferentes.

⇨ Construindo o intervalo de confiança para μ, ao nível de 99%, devemos esperar que o valor padrão (μ_0) esteja fora do intervalo. Caso contrário, os resultados seriam contraditórios.

Intervalo de confiança para a diferença entre duas médias ($\mu_1 - \mu_2$)

$$IC\,(\mu_1 - \mu_2\,;\,1-\alpha): \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \pm t_{\alpha/2}\sqrt{\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)S^2}$$

Estatística T para a comparação entre duas médias (μ_1 e μ_2)

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)S^2}}$$

Valor crítico: $t_{\alpha/2}$

⇨ Se no teste de hipóteses, ao nível de 5% de significância, não rejeitamos H_0, significa que a diferença entre as duas médias é zero, ou seja, as médias são iguais.

⇨ Construindo o intervalo de confiança, ao nível de 95%, para a diferença entre as médias ($\mu_1 - \mu_2$), devemos esperar que o valor zero seja coberto pelo intervalo.

Exemplos resolvidos

Exemplo 1.

O fabricante de uma certa marca de aparelhos eletrônicos informou que a potência média dos seus aparelhos é de 27 microwatts. O gerente de uma loja que vende os aparelhos utiliza uma amostra de 15 aparelhos para checar se a informação do fabricante é verdadeira. Os valores (em microwatts) obtidos para a amostra foram os seguintes: 26,7; 25,8; 24,0; 24,9; 26,4; 25,9; 24,4; 21,7; 24,1; 25,9; 27,3; 26,9; 27,3; 24,8 e 23,6.

Utilize um teste de hipótese, ao nível de 5% de significância, e verifique qual foi a conclusão do gerente.

Resolução: **Variável em estudo:** X = potência de aparelhos eletrônicos (microwatts)

Pressuposição: A variável em estudo tem distribuição normal.

Hipóteses $\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 = 27 \\ H_A : \mu \neq \mu_0 = 27 \end{cases}$

Taxa de erro tipo I: $\alpha = 0{,}05$

Cálculo da estatística do teste

$\bar{x} = 25{,}31$ n=15

s=1,589

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \rightarrow t = \frac{25{,}31 - 27}{\frac{1{,}589}{\sqrt{15}}} = -4{,}12$$

Decisão: $|t = -4{,}12| > t_{\alpha/2(14)} = 2{,}145 \rightarrow$ Rejeitamos H_0

Conclusão: Concluímos, ao nível de 5% de significância, que a verdadeira potência média de aparelhos eletrônicos desta marca difere de 27 microwatts. Portanto, a informação do fabricante não é verdadeira.

Exemplo 2.

Um pesquisador da área de computação está investigando a utilidade de duas diferentes linguagens de programação (A e B) na melhoria das tarefas computacionais.

Trinta programadores experientes, familiarizados com ambas as linguagens, foram divididos aletoriamente em dois grupos. Cada grupo codificou uma função padrão em uma das linguagens e os tempos de codificação da função (em minutos) foram registrados.

As medidas de cada grupo são apresentadas no quadro abaixo.

	n	Média	Variância
Linguagem A	15	17,5	2,31
Linguagem B	15	20,5	3,02

Utilizando um teste de hipótese, verifique se, em média, o tempo de codificação da função padrão difere entre as linguagens.

Resolução: Variável em estudo: X = tempo de codificação da função (minutos)

1. Pressuposições: 1. A variável em estudo tem distribuição normal.

2. As variâncias das populações são homogêneas.

3. As amostras retiradas das populações são independentes.

2. Hipóteses estatísticas:
$$\begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 \\ H_A: \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$$

3. Taxa de erro tipo I: $\alpha = 0{,}05$

4. Estatística do teste:
$$t = \frac{17{,}5 - 20{,}5}{\sqrt{\left(\frac{1}{15} + \frac{1}{15}\right)2{,}67}} = \frac{-3}{0{,}5967} = -5{,}028$$

5. Decisão e conclusão:

$\alpha = 0{,}05$

$\nu = (15 - 1) + (15 - 1) = 28$

$t_{\alpha/2(28)} = 2{,}048$

$$|-5{,}028| > t_{\alpha/2(28)} = 2{,}048$$

Sendo o t calculado maior que o crítico, rejeitamos H_0

Concluímos, ao nível de 5% de significância, que o tempo médio de programadores que usam a linguagem A difere do tempo médio de programadores que usam a linguagem B. Portanto, a linguagem A, em média, é mais eficiente que a linguagem B na execução das tarefas computacionais.

Bibliografia

BUSSAB, W.O.; MORETTIN, P.A. Estatística Básica. São Paulo: Saraiva. 2006. 526p.

FERREIRA, D.F. Estatística Básica. Lavras: Editora UFLA, 2005, 664p.

MLODINOW, L. O andar do bêbado. Como o acaso determina nossas vidas. Rio de Janeiro: Editora Zahar, 2009, 264p.

SILVEIRA JÚNIOR, P., MACHADO, A.A., ZONTA, E.P., SILVA, J.B. da Curso de Estatística v.1, Pelotas: Universidade Federal de Pelotas, 1989. 135p.

Sistema Galileu de Educação Estatística. Disponível em: http://www.galileu.esalq.usp.br/topico.html