UNIDADE III - Elementos de probabilidades

3.1. Introdução à teoria das probabilidades
   3.1.1. Introdução
   3.1.2. Conceitos fundamentais
   3.1.3. Conceitos de probabilidade
   3.1.4. Teoremas para o cálculo de probabilidades
   3.1.5. Probabilidade condicional e independência
3.2. Variáveis aleatórias
   3.2.1. Introdução e conceito
   3.2.2. Variáveis aleatórias discretas
   3.2.3. Variáveis aleatórias contínuas
3.3. Distribuições de probabilidade
   3.3.1. Distribuições de probabilidade de variáveis discretas
   3.3.2. Distribuições de probabilidade de variáveis contínuas

3.3.1.3 Distribuição hipergeométrica

Definição: Modelo que descreve probabilisticamente os resultados de uma sequência de experimentos de Bernoulli **dependentes**. Refere-se a experimentos que se caracterizam por retiradas **sem reposição**, onde a probabilidade de sucesso **se altera** a cada retirada.

⇨ A **distribuição hipergeométrica não configura um processo de Bernoulli** porque a probabilidade de sucesso muda de um experimento para o outro

⇨ Essa distribuição é extremamente importante no contexto de **amostragem sem reposição**

Experimento: Uma bandeja contém 10 xícaras de cafezinho, sete com açúcar e três com adoçante. Três pessoas se aproximam da bandeja e se servem.

Se a variável aleatória X é definida como o número de xícaras de café com açúcar, construa a distribuição de probabilidade de X.

10 Xícaras → 7 Açúcar | 3 Adoçante

3 xícaras (**n=3**)

$$S = \{A_1A_2A_3,\ A_1A_2A_4, \ldots,\ A_1A_2a_1,\ \ldots,\ a_1a_2a_3\}$$

A= açúcar

a= adoçante

$$\#S = C_{10}^{3} = 120$$

X = número de xícaras de café **com açúcar**

$$S = \{A_1A_2A_3,\ A_1A_2A_4, \dots,\ A_1A_2a_1,\ \dots,\ a_1a_2a_3\}$$

X = número de xícaras de café **com açúcar**

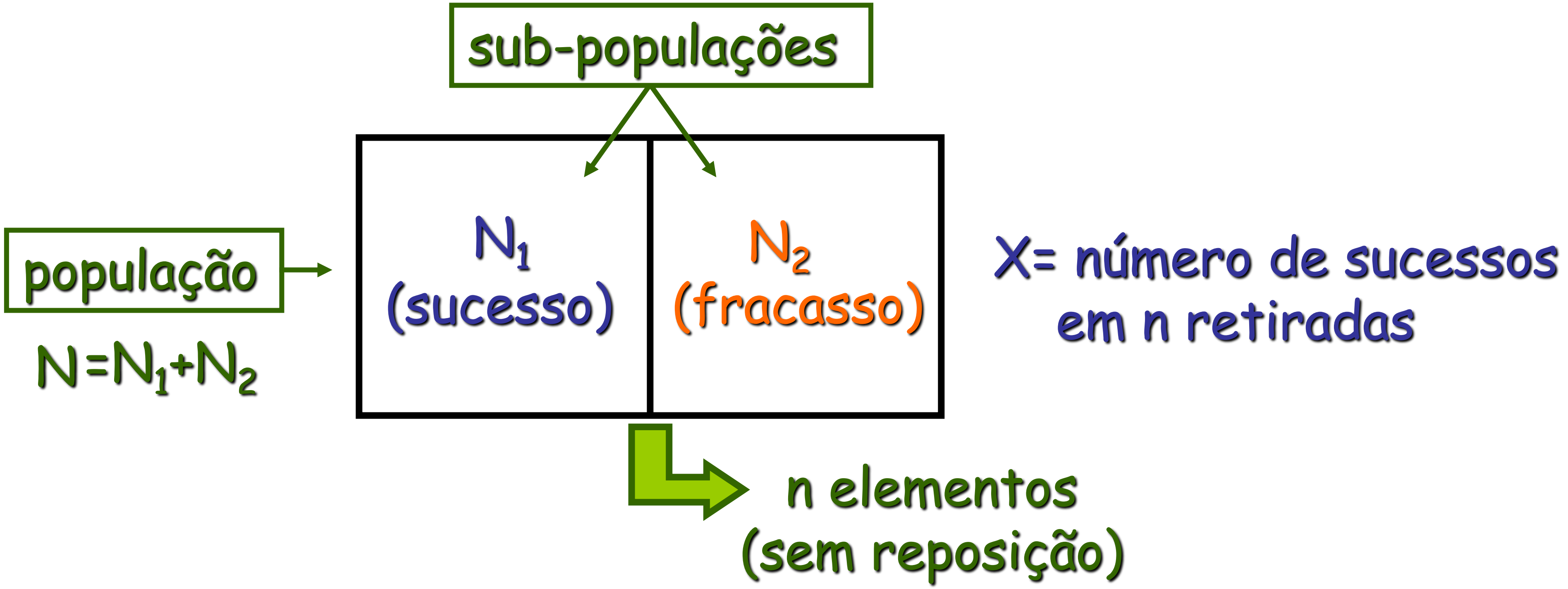
$$S_X = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$P(X=0) = \frac{C_7^0\, C_3^3}{C_{10}^3} = \frac{1\times 1}{120} = \frac{1}{120} = 0{,}008333$$

$$P(X=1) = \frac{C_7^1\, C_3^2}{C_{10}^3} = \frac{7\times 3}{120} = \frac{21}{120} = 0{,}175$$

$$P(X=2) = \frac{C_7^2\, C_3^1}{C_{10}^3} = \frac{21\times 3}{120} = \frac{63}{120} = 0{,}525$$

$$P(X=3) = \frac{C_7^3\, C_3^0}{C_{10}^3} = \frac{35\times 1}{120} = \frac{35}{120} = 0{,}2917$$



- ⇨ Cada grupo de tamanho n formado é denominado **amostra**.
- ⇨ Todas as amostras têm a mesma chance de ocorrência.
- ⇨ Do ponto de vista probabilístico não faz diferença considerar retiradas individuais sem reposição ou retirada conjunta de grupos

Profª. Clause Piana

Representação tabular

$X = x$	0	1	2	3	Σ
$P(X = x)$	0,00833	0,175	0,525	0,2917	1

Representação analítica

$$P(X = x) = \frac{C_7^x \, C_3^{3-x}}{C_{10}^3} \text{ , para } S_X = \{0, 1, 2, 3\}$$

Função de probabilidade

De modo geral, se X é uma variável que tem distribuição hipergeométrica, sua função de probabilidade será:

$$P(X = x) = \frac{C_{N_1}^x \, C_{N_2}^{n-x}}{C_N^n} \text{ , para } S_X = \{\max(0, n-N_2), ..., \min(n, N_1)\}$$

Parâmetros

$$P(X = x) = \frac{C_{N_1}^{x}\, C_{N_2}^{n-x}}{C_{N}^{n}}$$

parâmetros

A distribuição hipergeométrica tem três parâmetros:

n = número de repetições do experimento de Bernoulli

N = tamanho da população

N_1 = tamanho da subpopulação de interesse

$$X \sim Hip\,(n, N, N_1)$$

X tem distribuição hipergeométrica com parâmetros n, N e N_1

Medidas descritivas

Binomial

$E(X) = n\pi$

$V(X) = n\pi(1-\pi)$

- Média ou valor esperado

$$E(X) = \mu = \sum_{x \in S_X} x\,p(x)$$

Teorema: $E(X) = \mu = n\left(\frac{N_1}{N}\right)$

probabilidade de sucesso

- Variância

$$V(X) = \sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$$

probabilidade de fracasso

Teorema: $V(X) = \sigma^2 = n\,\frac{N_1}{N}\,\frac{N_2}{N}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$

Fator de correção para populações finitas

População finita é aquela que pode ser esgotada por processo de amostragem.

⇨ Uma população será considerada finita quando tiver um **número finito** de elementos **e** a amostragem for efetuada **sem reposição**.

População infinita é aquela que não se esgota por processo de amostragem.

⇨ Uma população será considerada infinita quando tiver um **número infinito** de elementos **ou** quando amostragem for efetuada **com reposição**.

Medidas descritivas

- Média ou valor esperado

Teorema: $$E(X) = n\frac{N_1}{N}$$

A dependência não altera a média, mas altera a variância

- Variância

Teorema: $$V(X) = n\frac{N_1}{N}\frac{N_2}{N}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

Fator de correção é irrelevante para N grande

No exemplo:

$X = x$	0	1	2	3	Σ
$P(X = x)$	0,00833	0,175	0,525	0,2917	1

$$E(X) = \mu = \sum_{x \in S_X} x\,p(x)$$

$$E(X) = \mu = 0 \times 0{,}00833 + 1 \times 0{,}175 + 2 \times 0{,}525 + 3 \times 0{,}2917 = 2{,}1$$

$$V(X) = \sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = 4{,}9 - 2{,}1^2 = 0{,}49$$

$$E(X^2) = 0^2 \times 0{,}00833 + 1^2 \times 0{,}175 + 2^2 \times 0{,}525 + 3^2 \times 0{,}525 = 4{,}9$$

No exemplo: $X \sim Hip\ (n=3, N=10, N_1=7)$

$$E(X) = n\frac{N_1}{N} = 3\frac{7}{10} = 2{,}1 \text{ xícaras com açúcar}$$

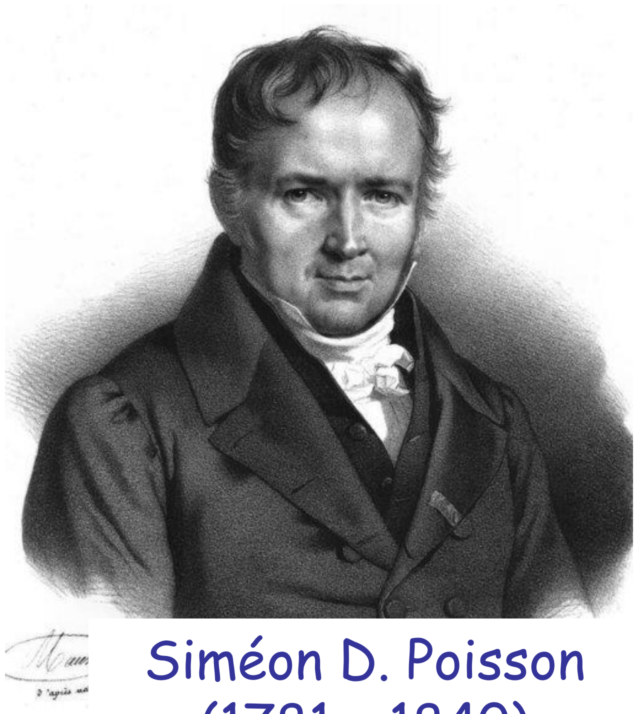
Significado: Se o experimento (escolher três xícaras) for repetido um grande número de vezes, o número médio de sucessos (xícaras de café com açúcar) obtidos será 2,1.

$$V(X) = n\frac{N_1}{N}\frac{N_2}{N}\left(\frac{N-n}{N-1}\right) = 3\frac{7}{10}\frac{3}{10}\left(\frac{10-3}{10-1}\right) = 0{,}49 \text{ xícaras com açúcar}^2$$

$$\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0{,}49} = 0{,}7 \text{ xícaras com açúcar}$$

Significado: Se o experimento for repetido um grande número de vezes, a variação média do número de sucessos em relação ao valor esperado será 0,7.

3.3.1.4 Distribuição de Poisson



Siméon D. Poisson
(1781 – 1840)

A distribuição de Poisson foi assim designada em homenagem ao matemático e físico francês Siméon Denis Poisson.

Modelo de descrição de acontecimentos de ocorrência rara

Exemplo clássico da **distribuição de Poisson**: número de soldados do exército da Prússia mortos anualmente por coice de cavalo, entre 1875 e 1894.

3.3.1.4 Distribuição de Poisson

Definição: descreve probabilisticamente a sequência de um **grande número** de fenômenos **independentes** entre si, cada um com probabilidade de sucesso **muito pequena**.

⇨ Ocorre naturalmente quando se deseja contar o número de eventos que ocorrem por unidade de **tempo** ou de **superfície** ou de **volume**.

⇨ Pode ser considerada como uma binomial onde o número de experimentos (n) é grande, π é pequeno (sucesso raro) e $n\pi$ (média de sucessos) é constante.

Distribuição de Poisson ⇨ processo infinito de Bernoulli

Exemplos:

- número de peças defeituosas observadas em uma linha de produção num determinado período de tempo;
- número de acidentes de trabalho ocorridos numa grande empresa num determinado período de tempo;
- número de ciclones ocorridos em certa região num determinado período de tempo;
- número de formigueiros por unidade de área em uma região;
- número de bactérias por unidade de área em uma lâmina com extratos de uma planta;
- número de espermatozoides inviáveis de um touro por unidade de volume de sêmen.

⇨ Tem inúmeras aplicações na **simulação de sistemas** modelando o número de eventos ocorridos num intervalo de tempo, quando os eventos ocorrem a uma taxa constante.

Função de probabilidade

De modo geral, se X é uma variável que tem distribuição de Poisson, sua função de probabilidade será:

$$P(X=x)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^{x}}{x!}$$, para $S_X = \{0, 1, 2, ...\}$

espaço amostral infinito

onde:

X: número de sucessos

e = 2,718 (base dos logaritmos neperianos)

λ: **número médio de sucessos** (sempre maior que zero)

Demonstra-se que $p(x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$ é uma função de probabilidade, provando que $\sum_{x \in S_X} p(x) = 1$. Como S_X = {0, 1, 2, ...}, temos:

$$\sum_{x=0}^{\infty} p(x) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda^0}{0!} + \frac{\lambda^1}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \ldots\right)$$

$$= e^{-\lambda}\left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \ldots\right)$$

$$= e^{-\lambda}e^{\lambda}$$

$$= e^{-\lambda+\lambda} = e^0 = 1$$

Série de Taylor

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$e^\lambda = 1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \ldots$$

Profª. Clause Piana

Parâmetros

$$P(X = x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^{x}}{x!}$$

$\boxed{\text{parâmetro}}$

A distribuição de Poisson tem apenas um parâmetro:

λ = número médio de sucessos

$X \sim Poi\ (\lambda)$

X tem distribuição de Poisson com parâmetro λ

Medidas descritivas

- Média ou valor esperado: $E(X) = \mu = \sum_{x \in S_X} x\,p(x)$

Teorema: $E(X) = \mu = \lambda$

- Variância: $V(X) = \sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$

Teorema: $V(X) = \sigma^2 = \lambda$

Na Poisson média e variância são iguais!!

Medidas descritivas

- **Média ou valor esperado:** $E(X) = \mu = \sum_{x \in S_X} x\, p(x)$

$$\boxed{\sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y}{y!} = e^{\lambda}}$$

$$E(X) = \sum_{x \in S_X} x\, p(x) = \sum_{x=0}^{\infty} x\, e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{\lambda}{x} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \lambda \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$$, fazendo $y = x - 1$, temos

$$= e^{-\lambda} \lambda \boxed{\sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y}{y!}} = e^{-\lambda} \lambda\, e^{\lambda} = e^{-\lambda+\lambda} \lambda = e^0 \lambda = \lambda$$

Teorema: $E(X) = \mu = \lambda$

- Variância: $V(X) = \sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$

$$\boxed{\sum_{x=0}^{\infty} x\frac{\lambda^x}{x!} = \lambda e^{\lambda}}$$

$$\boxed{\sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y}{y!} = e^{\lambda}}$$

$$E(X^2) = \sum_{x \in S_X} x^2 p(x) = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty} x^2 \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}\sum_{x=1}^{\infty} x^2 \frac{\lambda}{x}\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$$

$$= e^{-\lambda}\lambda\sum_{x=1}^{\infty} x\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$$, fazendo $y = x-1$, temos

$$= e^{-\lambda}\lambda\sum_{y=0}^{\infty}(y+1)\frac{\lambda^y}{y!} = e^{-\lambda}\lambda\sum_{y=0}^{\infty}\left(y\frac{\lambda^y}{y!}+\frac{\lambda^y}{y!}\right) = e^{-\lambda}\lambda\left(\boxed{\sum_{y=0}^{\infty} y\frac{\lambda^y}{y!}} + \boxed{\sum_{y=0}^{\infty}\frac{\lambda^y}{y!}}\right)$$

$$= e^{-\lambda}\lambda(\lambda e^{\lambda} + e^{\lambda}) = \lambda e^{\lambda}e^{-\lambda}\lambda + e^{\lambda}e^{-\lambda}\lambda = e^0\lambda^2 + e^0\lambda = \lambda^2 + \lambda$$

$$V(X) = E(X^2) - \mu^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

Teorema: $V(X) = \sigma^2 = \lambda$

- Coeficiente de assimetria

Teorema: $a_3 = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}$

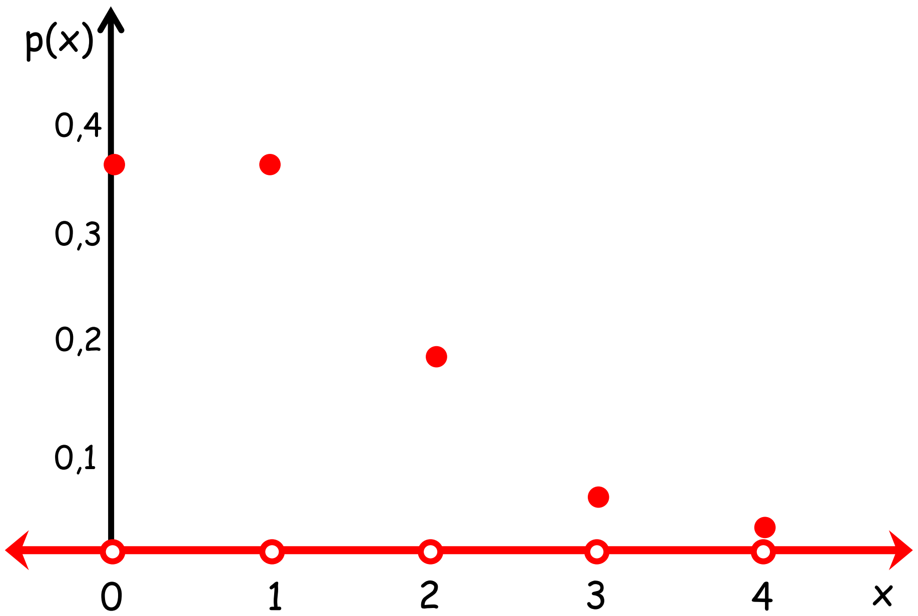
A Poisson é assimétrica positiva, tendendo para a simetria quando μ cresce.

- Coeficiente de curtose

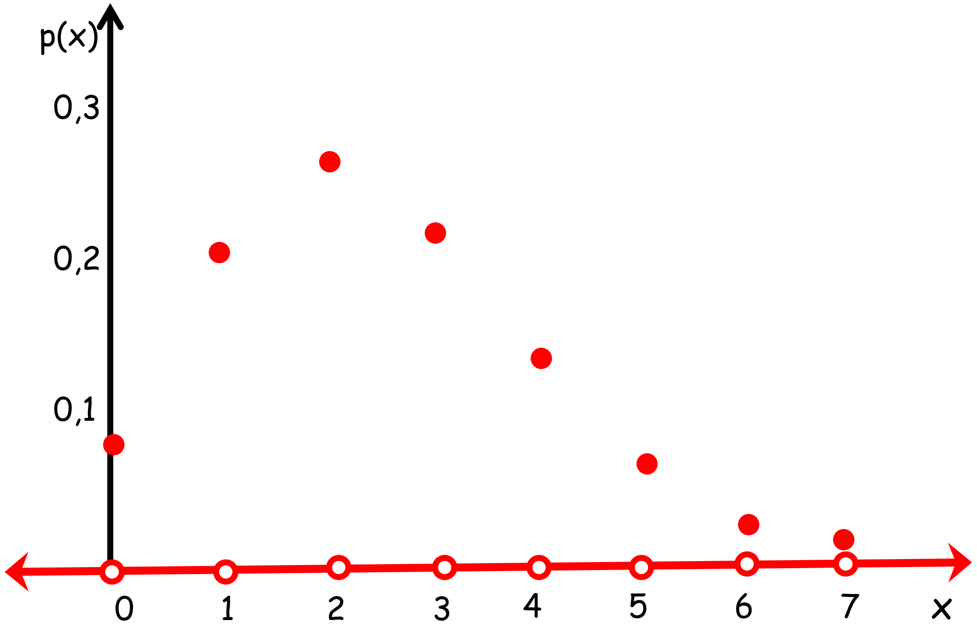
Teorema: $a_4 = \sqrt{\lambda}$

A Poisson é platicúrtica, tendendo para mesocúrtica quando μ cresce.

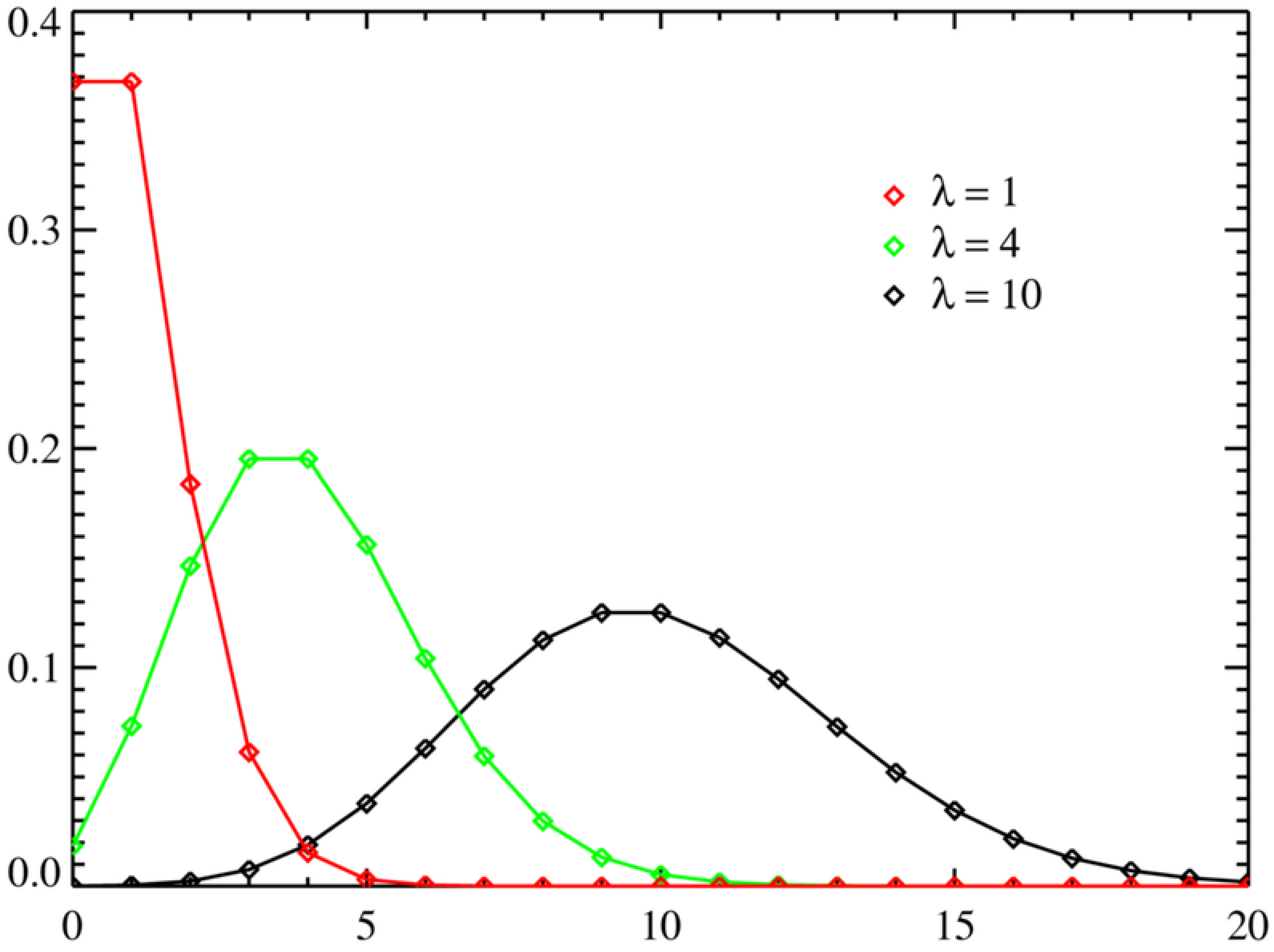
$X \sim Poi\ (\lambda=1)$



$X \sim Poi\ (\lambda=2,5)$



A Poisson tende para a simetria quando $\mu=\lambda$ cresce.



Bibliografia

BUSSAB, W.O.; MORETTIN, P.A. **Estatística Básica**. São Paulo: Saraiva. 2006. 526p.

FERREIRA, D.F. **Estatística Básica**. Lavras: Editora UFLA, 2005, 664p.

FREUND, J.E., SIMON, G.A. **Estatística Aplicada. Economia, Administração e Contabilidade**. 9.ed., Porto Alegre: Bookman, 2000. 404p.

MEYER, P. L. **Probabilidade: aplicações à estatística**. Rio de Janeiro: LTC, 1976.

MLODINOW, L. **O andar do bêbado. Como o acaso determina nossas vidas**. Rio de Janeiro: Editora Zahar, 2009, 264p.

SILVEIRA JÚNIOR, P., MACHADO, A.A., ZONTA, E.P., SILVA, J.B. da **Curso de Estatística**. v.2, Pelotas: Universidade Federal de Pelotas, 1992. 234p.

Sistema Galileu de Educação Estatística. Disponível em: http://www.galileu.esalq.usp.br/topico.html