UNIDADE III - Elementos de probabilidades

3.1. Introdução à teoria das probabilidades
   3.1.1. Introdução
   3.1.2. Conceitos fundamentais
   3.1.3. Conceitos de probabilidade
   3.1.4. Teoremas para o cálculo de probabilidades
   3.1.5. Probabilidade condicional e independência
3.2. Variáveis aleatórias
   3.2.1. Introdução e conceito
   3.2.2. Variáveis aleatórias discretas
   3.2.3. Variáveis aleatórias contínuas
3.3. Distribuições de probabilidade
   3.3.1. Distribuições de probabilidade de variáveis discretas
   3.3.2. Distribuições de probabilidade de variáveis contínuas

Profª. Clause Piana

Por que a variável é denominada aleatória?

Porque seus valores ocorrem de forma aleatória ou probabilística.

Uma das mais importantes maneiras pelas quais a aleatoriedade nos afeta é por meio de sua influência nas medições.

Por exemplo, quando um professor avalia um trabalho de um aluno a nota não é uma descrição do grau de qualidade do trabalho, mas uma **medição** dessa qualidade. Nesse caso, o instrumento de medição é o professor, e a avaliação de tal profissional, como qualquer medição, está sujeita a variações e erros aleatórios.

A incerteza da medição é ainda mais problemática quando a quantidade medida é subjetiva.

Para entender as medições é fundamental conhecer a **forma como os dados estão distribuídos**.

As **medidas** descritivas são uma ferramenta essencial para obter essa informação.

Outro exemplo: suponha que 15 enólogos vão avaliar um vinho.

Situação 1. Os 15 enólogos concordam que a nota do vinho é 90.

Situação 2. Os enólogos expressam as notas 80, 81, 82, 87, 89, 89, 90, 90, 90, 91, 91, 94, 97, 99 e 100.

Uma das maneiras de gerar um número único a partir de uma série de medições discordantes é calcular a **média**. Assim, podemos resumir as opiniões utilizando a média das notas atribuídas ao vinho. Mas essa informação é suficiente?

Os dois conjuntos de dados tem a mesma média, mas diferem no quanto variam a partir dessa média.

O **desvio padrão** caracteriza o quanto um conjunto de dados se aproxima da média, o que também pode significar a **incerteza dos dados.**

Na situação 2, o desvio padrão é 6 e o que podemos realmente dizer sobre o vinho é que sua nota provavelmente se situe entre 84 e 96.

Notamos assim que a aleatoriedade (os erros aleatórios) gera variabilidade.

A Estatística busca a regularidade presente na variabilidade.

Esta regularidade permite que as variáveis aleatórias sejam representadas por modelos matemáticos, que são denominados distribuições de probabilidade.

As distribuições de probabilidade constituem a espinha dorsal da metodologia estatística, pois é com base nesses modelos que a Estatística cria técnicas que possibilitam tomar decisões válidas apesar da variabilidade e na presença de incerteza.

Na pesquisa científica o pesquisador precisa tomar decisões e obter conclusões na presença de variabilidade.

3.3 Distribuições de probabilidade

O que é uma distribuição de probabilidade?

Uma distribuição de probabilidade é essencialmente um **modelo de descrição probabilística de uma população**.

⇨ **População estatística** é o conjunto de todos os valores de uma variável aleatória.

X = Número de bolas pretas

População estatística

X=x	0	1	2	Σ
P(X=x)	0,1	0,6	0,3	1

Distribuição de probabilidade

⇨ **População** e **distribuição de probabilidade** → indissociáveis

⇨ **Distribuição de probabilidade** → modo como as probabilidades se **distribuem** aos valores

- **Distribuições de probabilidade:** são modelos matemáticos para descrição probabilística da ocorrência de valores de uma variável aleatória.
  Os modelos têm aplicações gerais e são individualizados através dos parâmetros.

- **Parâmetros:** caracterizações numéricas que permitem a individualização de um modelo em determinado contexto

No estudo de uma variável aleatória é importante saber:

1. O **tipo de distribuição**, que é determinado pela **função de probabilidade** ou **densidade** da variável

$$P(X = x) = \frac{C_7^x \, C_3^{3-x}}{C_{10}^3} \quad \text{, para } S_X = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$f(x) = 2e^{-2x} \; , \; \text{para } S_X = [0, \infty)$$

2. Os **parâmetros** da distribuição

3. As **medidas descritivas** da distribuição (média, variância, assimetria)

Distribuições discretas

1. Distribuição de Bernoulli
2. Distribuição Binomial
3. Distribuição Hipergeométrica
4. Distribuição de Poisson
5. Distribuição Multinomial
6. Distribuição Geométrica
7. Distribuição Binomial Negativa
8. Distribuição Hipergeométrica Negativa
9. Distribuição Uniforme

Distribuições contínuas

1. Distribuição Uniforme
2. Distribuição Normal
   * Distribuição Normal Padrão
3. Distribuição Gama
4. Distribuição Exponencial
5. Distribuição Beta
6. Distribuição Lognormal
7. Distribuição Seminormal
8. Distribuição Weibull
9. Distribuição Gumbel

3.3.1 Distribuições de probabilidade de variáveis discretas

3.3.1.1 Distribuição de Bernoulli

Jacob Bernoulli
(1654 – 1705)

Deduzida no final do século XVII pelo matemático suíço Jacob Bernoulli.

Definição: Modelo que descreve probabilisticamente os resultados de um experimento de Bernoulli.

O experimento (ou ensaio) de Bernoulli é definido como o experimento aleatório que **possui apenas dois resultados possíveis**.

Experimento: Uma semente é colocada para germinar

$$S = \{\text{germinar, não germinar}\}$$

Consideramos um dos resultados como sucesso:

sucesso = germinar

fracasso = não germinar

Definimos a variável X como número de sucessos em uma repetição do experimento.

X = número de sucessos

$$X = \begin{cases} 0 & \text{, se não germinar} \\ 1 & \text{, se germinar} \end{cases} \longrightarrow S_X = \{0,1\}$$

Se for conhecido o poder germinativo do lote de sementes, por exemplo, 87%, podemos concluir que a probabilidade de a semente germinar é 0,87.

O evento **{não germinar}** é **complemento** do evento **{germinar}**, então sua probabilidade será **1–0,87**.

$X = x$	0	1	Σ
$P(X = x)$	0,13	0,87	1

probabilidade de fracasso

probabilidade de sucesso

π = probabilidade de sucesso

$1-\pi$ = probabilidade de fracasso

Função de probabilidade

De modo geral, se X é uma variável que tem distribuição de Bernoulli, sua função de probabilidade será:

$X = x$	0	1	Σ
$P(X = x)$	$1-\pi$	π	1

Representação tabular

Representação analítica

$$P(X = x) = \pi^{x}.(1 - \pi)^{1-x}\ , \quad \text{para } S_X = \{0, 1\}$$

parâmetro

Parâmetro

A distribuição de Bernoulli tem apenas um parâmetro:

π = probabilidade de sucesso

$X \sim Ber\ (\pi)$

X tem distribuição de Bernoulli com parâmetro π

Medidas descritivas

- **Média ou valor esperado**

$$E(X) = \mu = \sum_{x \in S_X} x\,p(x)$$

Para $S_X = \{0, 1\}$

$X = x$	0	1	Σ
$P(X = x)$	$1-\pi$	π	1

$$E(X) = \mu = \sum_{x \in S_X} x\,p(x) = 0 \times (1-\pi) + 1 \times \pi = \pi$$

Teorema: $E(X)=\mu=\pi$

Variância

$$V(X) = \sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$$

Para $S_X = \{0, 1\}$

$X = x$	0	1	Σ
$P(X = x)$	$1-\pi$	π	1

$$E(X^2) = \sum_{x \in S_X} x^2 p(x) = 0^2 \times (1-\pi) + 1^2 \times \pi = \pi$$

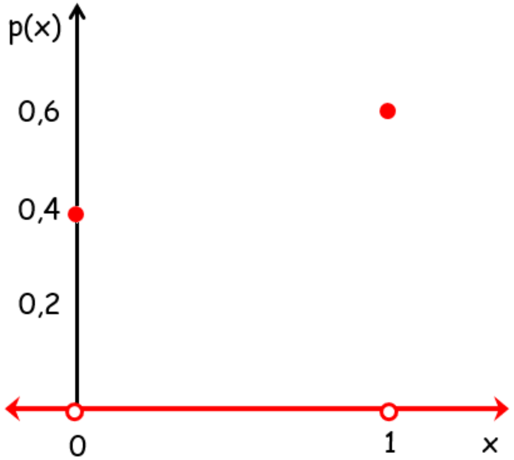
$$V(X) = \sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = \pi - \pi^2 = \pi(1-\pi)$$

Teorema: $V(X)=\sigma^2=\pi(1-\pi)$

◆ Coeficiente de assimetria

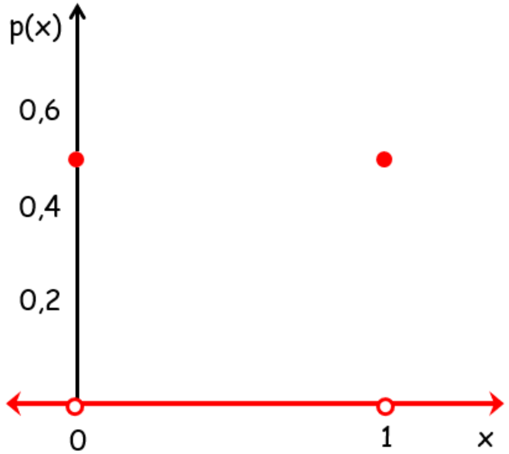
Teorema: $$a_3 = \frac{(1-\pi)-\pi}{\sqrt{\pi(1-\pi)}}$$ ← desvio padrão

$(1-\pi) < \pi$



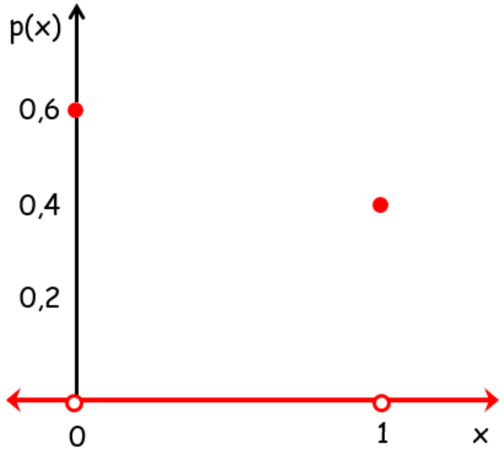
Assimétrica negativa

$(1-\pi) = \pi$



Simétrica

$(1-\pi) > \pi$



Assimétrica positiva

Demonstração:

$$a_3 = \frac{\mu_3}{\mu_2\sqrt{\mu_2}}$$

$$\mu_2 = E(X^2) - \mu^2 = \pi - \pi^2 = \pi(1-\pi)$$

$$\mu_3 = E(X^3) - 3\mu\, E(X^2) + 2\mu^3 = \pi - 3\pi\pi + 2\pi^3 = \pi - 3\pi^2 + 2\pi^3$$

$$a_3 = \frac{\pi - 3\pi^2 + 2\pi^3}{\pi(1-\pi)\sqrt{\pi(1-\pi)}}$$

$$= \frac{\pi(1 - 3\pi + 2\pi^2)}{\pi(1-\pi)\sqrt{\pi(1-\pi)}}$$

$$\begin{array}{l|l} 1 - 3\pi + 2\pi^2 & 1 - \pi \\ \hline -1 + \pi & 1 - 2\pi \\ \quad -2\pi + 2\pi^2 & \\ \quad 2\pi - 2\pi^2 & \end{array}$$

$$= \frac{(1 - 3\pi + 2\pi^2)}{(1-\pi)\sqrt{\pi(1-\pi)}} = \frac{(1-\pi)(1-2\pi)}{(1-\pi)\sqrt{\pi(1-\pi)}} = \frac{(1-2\pi)}{\sqrt{\pi(1-\pi)}} = \frac{(1-2\pi)}{\sqrt{\pi(1-\pi)}}$$

$$a_3 = \frac{(1-\pi) - \pi}{\sqrt{\pi(1-\pi)}}$$

3.3.1.2 Distribuição binomial

Definição: Modelo que descreve probabilisticamente os resultados de uma sequência de experimentos de Bernoulli **independentes** entre si, ou seja, onde a probabilidade de sucesso é **constante** em todas as repetições do experimento.

Se $X = Y_1 + Y_2 + ... + Y_n$

onde: $Y_i \sim Ber\ (\pi)$;

$Y_{i's}$ são independentes;

então, a variável X tem distribuição binomial.

Distribuição binomial ⇨ processo finito de Bernoulli

⇨ **n** experimentos de Bernoulli independentes, com probabilidade de sucesso π constante para todos eles

É importante no contexto de **amostragem com reposição**

Experimento: Em uma estância 60% dos bovinos foram vacinados contra uma determinada doença. Se um bovino dessa estância é escolhido ao acaso e sua situação em relação a vacinação é registrada, temos um experimento de Bernoulli, com

S = {vacinado, não vacinado}

p(vacinado) = 0,6

p(não vacinado) = 1 - 0,6 = 0,4

Se três bovinos são escolhidos, um a um, e o resultado é registrado, temos uma sequência de três experimentos de Bernoulli **independentes**, pois, a cada escolha, a probabilidade de sucesso permanecerá inalterada.

$\#S = 2^3 = 8$

V = vacinado
N = não vacinado

S = {VVV, VVN, VNV, NVV, NNV, NVN , VNN, NNN}

Sucesso = vacinado

A variável X é definida como o número de sucessos em **n** experimentos de Bernoulli independentes, com probabilidade de sucesso igual a π.

n=3 e **π=0,6**

$S_X = \{0, 1, 2, 3\}$

Qual é a função de probabilidade P(X=x) associada a variável X?

$S = \{VVV, VVN, VNV, NVV, NNV, NVN, VNN, NNN\}$

$S_X = \{0,1,2,3\}$

$P(X=x) = ?$

$P(X=0) = 0{,}4^3 = 1 \times \pi^0 \times (1 - \pi)^3 = 0{,}064$

$P(X=1) = 3 \times 0{,}6^1 \times 0{,}4^2 = 3 \times \pi^1 \times (1 - \pi)^2 = 0{,}288$

$P(X=2) = 3 \times 0{,}6^2 \times 0{,}4^1 = 3 \times \pi^2 \times (1 - \pi)^1 = 0{,}432$

$P(X=3) = 0{,}6^3 = 1 \times \pi^3 \times (1 - \pi)^0 = 0{,}216$

Como podemos determinar de quantas maneiras diferentes teremos x sucessos e 3-x fracassos?

$$P_3^{x,3-x} = \frac{3!}{x!(3-x)!} \longleftarrow \boxed{\text{Permutação com repetição}}$$

Representação tabular

X = x	0	1	2	3	Σ
P(X = x)	0,064	0,288	0,432	0,216	1

Representação analítica

$$P(X=x)=\underbrace{P_3^{x,3-x}}_{\text{Número de casos}}\underbrace{0{,}6^x(1-0{,}6)^{3-x}}_{\text{Probabilidade de um caso}}\text{, para } S_X = \{0, 1, 2, 3\}$$

Qual é a função de probabilidade P(X=x) associada a variável X?

$$P(X=0) = P_3^{0,3}\,\pi^0\,(1-\pi)^3$$

$$P(X=1) = P_3^{1,2}\,\pi^1\,(1-\pi)^2$$

$$P(X=2) = P_3^{2,1}\,\pi^2\,(1-\pi)^1$$

$$P(X=3) = P_3^{3,0}\,\pi^3\,(1-\pi)^0$$

$$P(X=x) = P_3^{x,3-x}\pi^x(1-\pi)^{3-x}$$

$$P(X=x) = P_n^{x,n-x}\pi^x(1-\pi)^{n-x}$$

$$P_n^{x,n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

Representação tabular

$X = x$	0	1	2	3	Σ
$P(X = x)$	0,064	0,288	0,432	0,216	1

Representação analítica

$$P(X = x) = P_3^{x,3-x} 0,6^x (1-0,6)^{3-x}, \text{ para } S_X = \{0, 1, 2, 3\}$$

Função de probabilidade

De modo geral, se X é uma variável que tem distribuição binomial, sua função de probabilidade será:

$$P(X = x) = P_n^{x,n-x} \pi^x (1-\pi)^{n-x} \text{ , para } S_X = \{0, 1, ..., n\}$$

$\pi = p$
$1-\pi = q$
repetições = n

$(p+q)^n$ ← Binômio de Newton

$$(p+q)^0 = 1p^0q^0 = 1$$

$$(p+q)^1 = 1p^1q^0 + 1p^0q^1$$

$$(p+q)^2 = 1p^2q^0 + 2p^1q^1 + 1p^0q^2$$

$$(p+q)^3 = 1p^3q^0 + 3p^2q^1 + 3p^1q^2 + 1p^0q^3$$

$P(X=0) = 1\ \pi^0\ (1-\pi)^3$

$P(X=1) = 3\ \pi^1\ (1-\pi)^2$

$P(X=2) = 3\ \pi^2\ (1-\pi)^1$

$P(X=3) = 1\ \pi^3\ (1-\pi)^0$

$(p+q)^n$ ← Binômio de Newton

$(p+q)^0 = 1p^0q^0$

n = 1 → Distribuição de Bernoulli

$(p+q)^1 = 1p^1q^0 + 1p^0q^1$

$(p+q)^2 = 1p^2q^0 + 2p^1q^1 + 1p^0q^2$

$(p+q)^3 = 1p^3q^0 + 3p^2q^1 + 3p^1q^2 + 1p^0q^3$

$(p+q)^4 = 1p^4q^0 + 4p^3q^1 + 6p^2q^2 + 4p^1q^3 + 1p^0q^4$

$(p+q)^5 = 1p^5q^0 + 5p^4q^1 + 10p^3q^2 + 10p^2q^3 + 5p^1q^4 + 1p^0q^5$

Coeficientes

↓

Permutação com repetição

$$P_n^{x,n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

$(p+q)^n$ ← **Binômio de Newton**

$$(p+q)^0 = 1p^0q^0 = 1$$

$$(p+q)^1 = 1p^1q^0 + 1p^0q^1$$

$$(p+q)^2 = 1p^2q^0 + 2p^1q^1 + 1p^0q^2$$

$$(p+q)^3 = 1p^3q^0 + 3p^2q^1 + 3p^1q^2 + 1p^0q^3$$

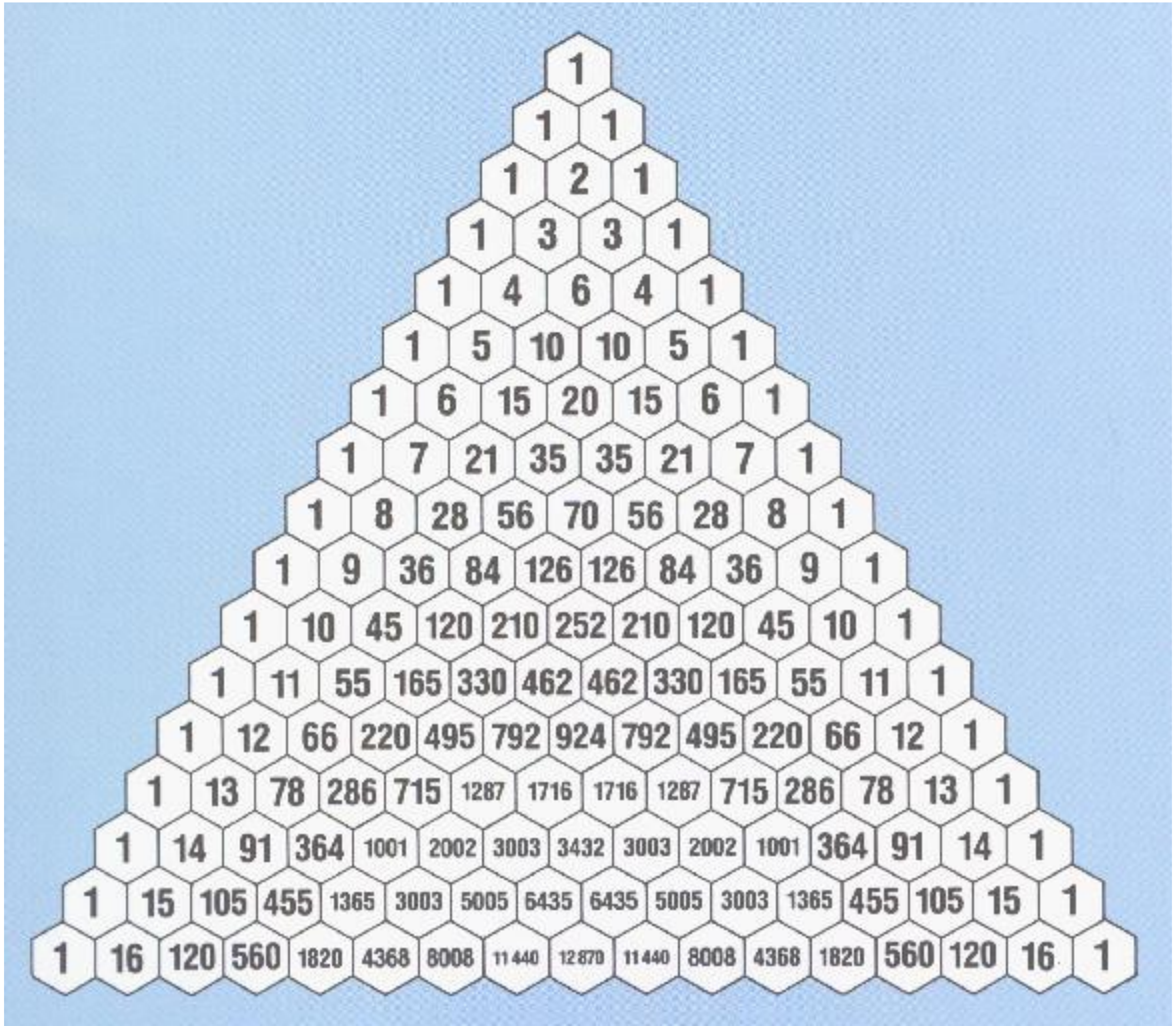
$$(p+q)^4 = 1p^4q^0 + 4p^3q^1 + 6p^2q^2 + 4p^1q^3 + 1p^0q^4$$

$$(p+q)^5 = 1p^5q^0 + 5p^4q^1 + 10p^3q^2 + 10p^2q^3 + 5p^1q^4 + 1p^0q^5$$

Triângulo de Pascal

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3+3 & & & & 1 & & \\
 & 1+4 & & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

Triângulo de Pascal



Parâmetros

$$P(X = x) = P_n^{x,n-x} \pi^x (1-\pi)^{n-x}$$

parâmetros

A distribuição binomial tem dois parâmetros:

n = número de repetições do experimento de Bernoulli

π = probabilidade de sucesso

$$X \sim Bin\ (n,\pi)$$

X tem distribuição binomial com parâmetros n e π

Medidas descritivas

- Média ou valor esperado

Bernoulli

$E(Y) = \pi$

$$E(X) = \mu = \sum_{x \in S_X} x\,p(x)$$

$$X = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$$

$$E(X) = E(Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n)$$

$$E(X) = E(Y_1) + E(Y_2) + \ldots + E(Y_n)$$

$$E(X) = \pi + \pi + \ldots + \pi \quad = n\pi$$

Teorema: $E(X)=\mu=n\pi$

- Variância

$$V(X) = \sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$$

Bernoulli

$E(Y) = \pi$

$V(Y) = \pi(1-\pi)$

$$X = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$$

$$V(X) = V(Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n)$$

$$V(X) = V(Y_1) + V(Y_2) + \ldots + V(Y_n)$$

$$V(X) = \pi(1-\pi) + \pi(1-\pi) + \ldots + \pi(1-\pi) \quad = n\pi(1-\pi)$$

Teorema: $V(X) = \sigma^2 = n\,\pi\,(1-\pi)$

- Coeficiente de assimetria

$$a_3 = \frac{\mu_3}{\mu_2 \sqrt{\mu_2}}$$

Bernoulli

$$a_3 = \frac{(1-\pi)-\pi}{\sqrt{\pi(1-\pi)}}$$

Teorema: $$a_3 = \frac{(1-\pi)-\pi}{\sqrt{n\pi(1-\pi)}}$$

desvio padrão

Interpretação:

Se $\pi < (1-\pi)$, a distribuição binomial é assimétrica positiva

Se $\pi = (1-\pi) = 0{,}5$, a distribuição binomial é simétrica

Se $\pi > (1-\pi)$, a distribuição binomial é assimétrica negativa

- **Coeficiente de curtose**

$$a_4 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$$

Se $a_4<3$, a distribuição binomial é **platicúrtica**
Se $a_4=3$, a distribuição binomial é **mesocúrtica**
Se $a_4>3$, a distribuição binomial é **leptocúrtica**

$$a_4' = a_4 - 3$$

Teorema: $$a_4' = \frac{1-6\pi(1-\pi)}{n\pi(1-\pi)}$$

Interpretação:

Se $a_4'<0$, a distribuição binomial é **platicúrtica**
Se $a_4'=0$, a distribuição binomial é **mesocúrtica**
Se $a_4'>0$, a distribuição binomial é **leptocúrtica**

$\#S = 2^3 = 8$

V = vacinado
N = não vacinado

S = {VVV, VVN, VNV, NVV, NNV, NVN , VNN, NNN}

Sucesso = vacinado

A variável X é definida como o número de sucessos em **n** experimentos de Bernoulli independentes, com probabilidade de sucesso igual a π.

$n=3$ e $\pi=0,6$

$S_X = \{0, 1, 2, 3\}$

Qual é a função de probabilidade P(X=x) associada a variável X?

Representação tabular

$X = x$	0	1	2	3	Σ
$P(X = x)$	0,064	0,288	0,432	0,216	1

Representação analítica

$$P(X = x) = \underbrace{P_3^{x,3-x}}_{\text{Número de casos}} \underbrace{0,6^x (1 - 0,6)^{3-x}}_{\text{Probabilidade de um caso}}, \text{ para } S_X = \{0, 1, 2, 3\}$$

$X = x$	0	1	2	3	Σ
$P(X = x)$	0,064	0,288	0,432	0,216	1

$$E(X) = \mu = \sum_{x \in S_X} x p(x)$$

$$E(X) = \mu = 0 \times 0{,}064 + 1 \times 0{,}288 + 2 \times 0{,}432 + 3 \times 0{,}216 = 1{,}8$$

$$V(X) = \sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = 3{,}24 - 1{,}8^2 = 0{,}72$$

$$E(X^2) = 0^2 \times 0{,}064 + 1^2 \times 0{,}288 + 2^2 \times 0{,}432 + 3^2 \times 0{,}216 = 3{,}24$$

Utilizando os teoremas: $X \sim Bin\ (n=3,\ \pi=0{,}6)$

$$E(X)=n\pi=3\times0{,}6=1{,}8 \text{ bovinos vacinados}$$

Significado: Se o experimento (escolher três bovinos) for repetido um grande número de vezes, o número médio de sucessos (bovinos vacinados) obtidos nesses experimentos será 1,8.

$$V(X) = n\pi(1-\pi) = 3\times0{,}6\times0{,}4 = 0{,}72 \text{ bovinos vacinados}^2$$

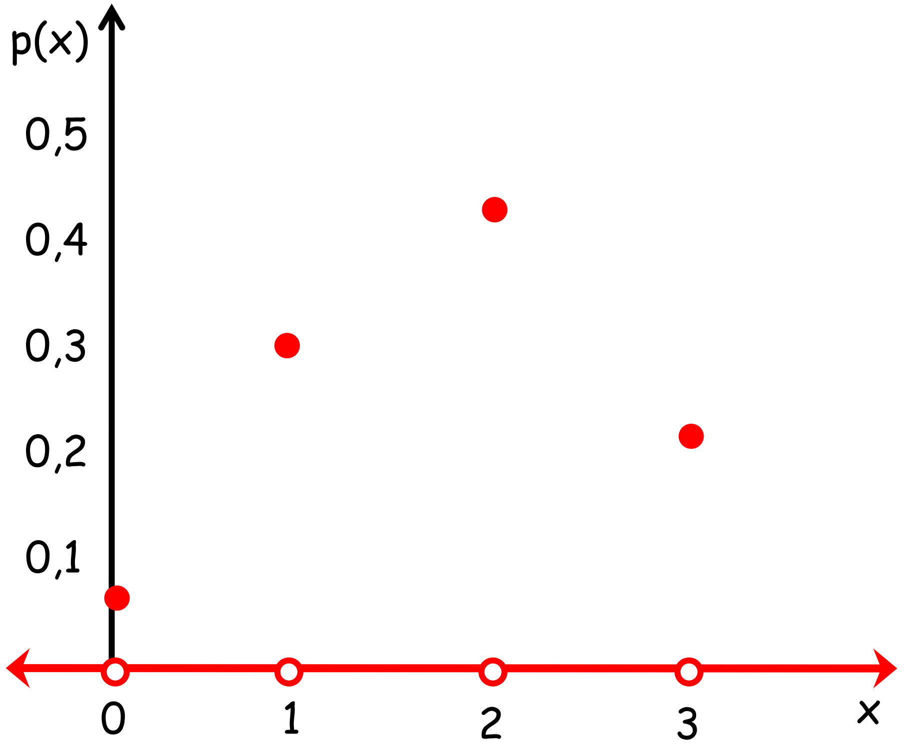
$$\sigma=\sqrt{V(X)}=\sqrt{0{,}72}=0{,}8485 \text{ bovinos vacinados}$$

Significado: Se o experimento for repetido um grande número de vezes, a variação média do número de sucessos em torno do valor esperado será de 0,85.

$$a_3 = \frac{(1-\pi)-\pi}{\sqrt{n\pi(1-\pi)}} = \frac{0,4-0,6}{\sqrt{3\times 0,6\times 0,4}} = -0,24$$

A distribuição é **assimétrica negativa**.

Significado: As chances para os valores maiores que a média (1,8) são maiores que para os menores.



$$a_4' = \frac{1-6\pi(1-\pi)}{n\pi(1-\pi)}$$

$$= \frac{1-6\times 0,6\times 0,4}{3\times 0,6\times 0,4}$$

$$= -0,61$$

A distribuição é **platicúrtica**.

Distribuição binomial

$$P(X = x) = P_n^{x,n-x}\, \pi^x (1 - \pi)^{n-x}\ ,\quad \text{para } S_X = \{0, 1, ..., n\}$$

n = 1

$$P(X = x) = P_1^{x,1-x}\, \pi^x (1 - \pi)^{1-x}$$

$$P(X = x) = \pi^x (1 - \pi)^{1-x}$$

Distribuição de Bernoulli

$$P(X = x) = \pi^x (1 - \pi)^{1-x}$$

Verifica-se que a distribuição de Bernoulli pode ser considerada um caso particular da distribuição binomial onde n=1.

Bibliografia

BUSSAB, W.O.; MORETTIN, P.A. **Estatística Básica**. São Paulo: Saraiva. 2006. 526p.

FERREIRA, D.F. **Estatística Básica**. Lavras: Editora UFLA, 2005, 664p.

FREUND, J.E., SIMON, G.A. **Estatística Aplicada. Economia, Administração e Contabilidade**. 9.ed., Porto Alegre: Bookman, 2000. 404p.

MEYER, P. L. **Probabilidade: aplicações à estatística**. Rio de Janeiro: LTC, 1976.

MLODINOW, L. **O andar do bêbado. Como o acaso determina nossas vidas**. Rio de Janeiro: Editora Zahar, 2009, 264p.

SILVEIRA JÚNIOR, P., MACHADO, A.A., ZONTA, E.P., SILVA, J.B. da **Curso de Estatística**. v.2, Pelotas: Universidade Federal de Pelotas, 1992. 234p.

Sistema Galileu de Educação Estatística. Disponível em: http://www.galileu.esalq.usp.br/topico.html