UNIDADE III - Elementos de probabilidades

3.1. Probabilidade no espaço básico
  3.1.1. Introdução
  3.1.2. Conceitos fundamentais
  3.1.3. Conceitos de probabilidade
  3.1.4. Teoremas para o cálculo de probabilidades
  3.1.5. Probabilidade condicional e independência
3.2. Variáveis aleatórias
  3.2.1. Introdução e conceito
  3.2.2. Variáveis aleatórias discretas
  3.2.3. Variáveis aleatórias contínuas
3.3. Distribuições de probabilidade
  3.3.1. Distribuições de probabilidade de variáveis discretas
  3.3.2. Distribuições de probabilidade de variáveis contínuas

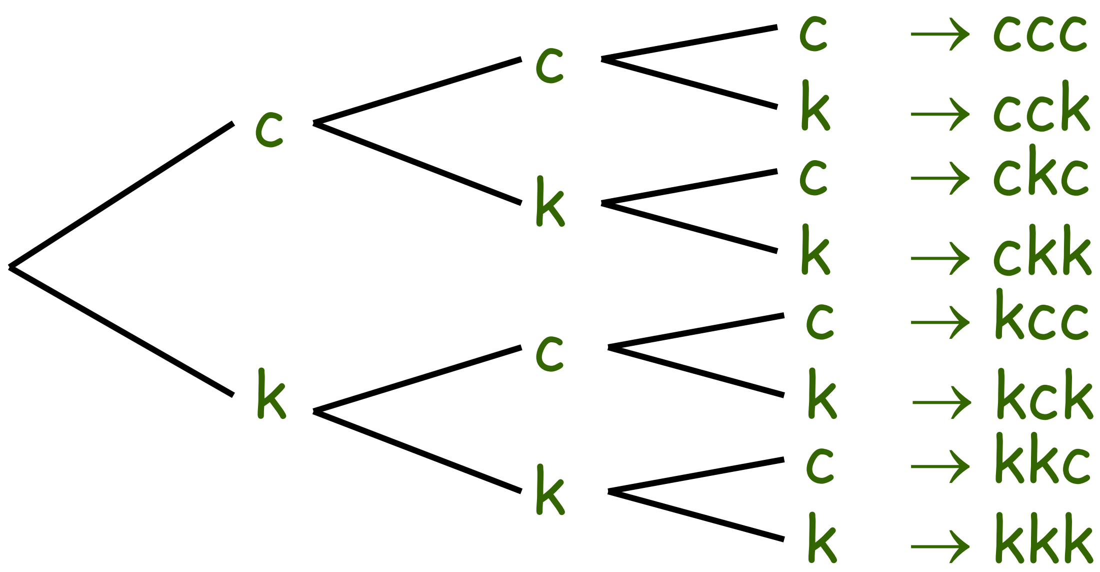
Profª. Clause Piana

3.2 Variáveis aleatórias

3.2.1 Introdução e conceito

Experimento aleatório: Lançamento de uma moeda honesta três vezes e observação das faces que ocorrem.

Diagrama em árvore



$\#S = 2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$

$S = \{ccc, cck, ckc, kcc, kkc, kck, ckk, kkk\}$

⇨ Ferramental matemático se amplia consideravelmente se o espaço amostral for numérico

3.2.1 Introdução e conceito

Experimento aleatório: Lançamento de uma moeda honesta três vezes e observação das faces que ocorrem.

S = {ccc, cck, ckc, kcc, kkc, kck, ckk, kkk}

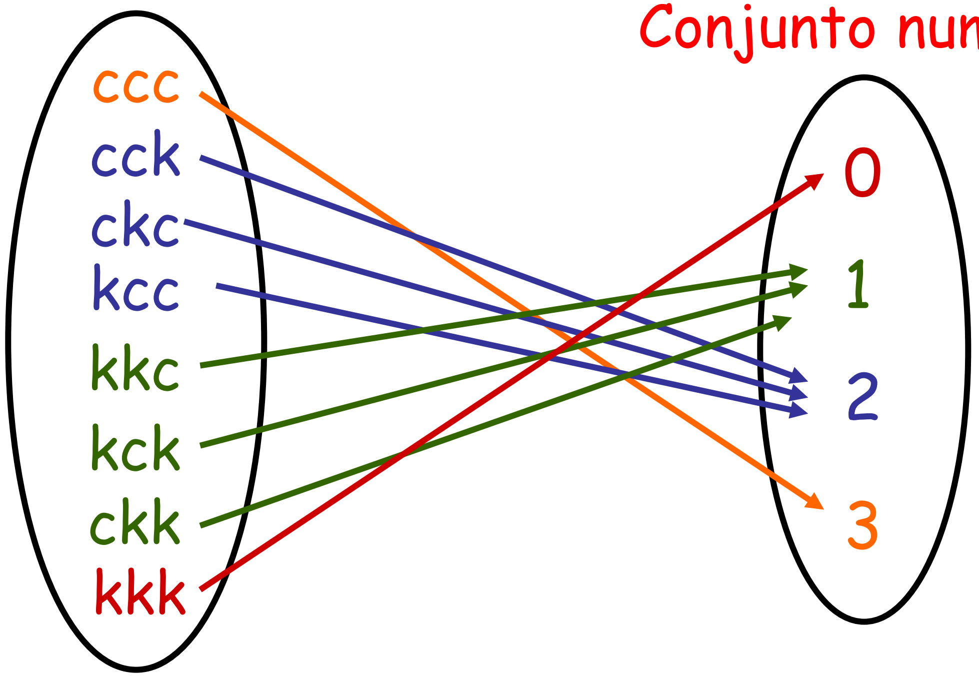
X = **número de caras** ocorrido nos três lançamentos

Quais são os possíveis valores de X? X = {0, 1, 2, 3}

Conjunto não numérico

Conjunto numérico

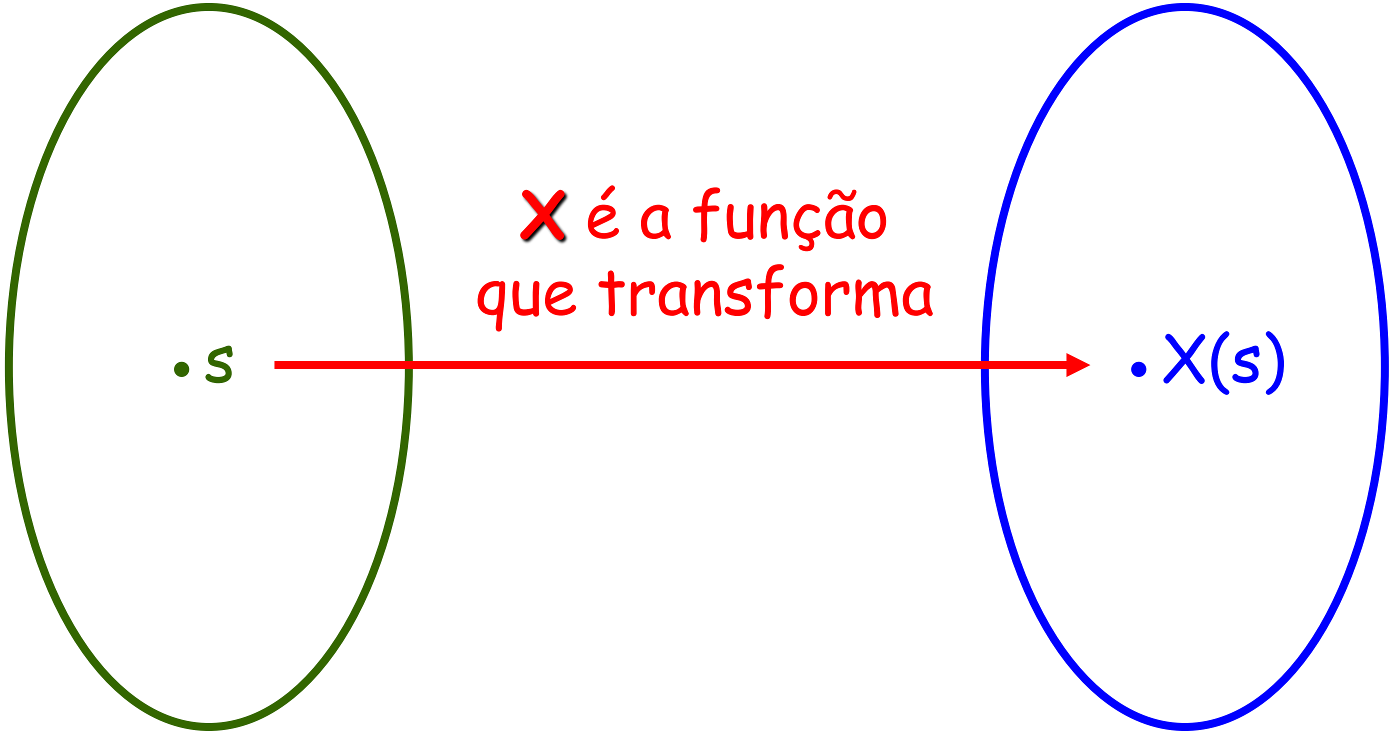
X(ccc) = 3
X(cck) = 2
X(ckc) = 2
X(kcc) = 2
X(kkc) = 1
X(kck) = 1
X(ckk) = 1
X(kkk) = 0



X é a variável que transforma um conjunto não numérico num conjunto numérico

Domínio

Contradomínio



S
Espaço amostral
básico

S_X
Espaço amostral
da variável X

(espaço onde X assume valores)

Variável aleatória

Definição: É uma função (ou regra) que transforma um espaço amostral qualquer em um **espaço amostral numérico**, que será sempre um subconjunto do conjunto dos números reais.

$$\text{Variáveis aleatórias} \begin{cases} \text{Discretas} \\ \text{Contínuas} \end{cases}$$

3.2.2 Variáveis aleatórias discretas

Definição: São discretas todas as variáveis cujo espaço amostral S_X é **enumerável finito** ou **infinito**.

Se X é uma variável aleatória discreta, então S_X é um **subconjunto dos inteiros**.

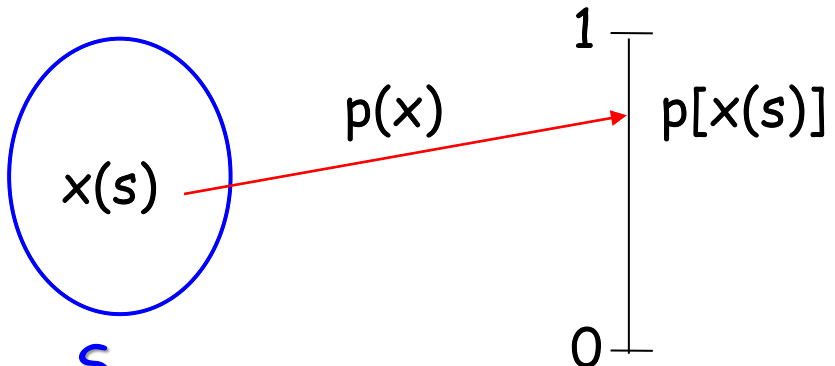
Exemplos:

- número caras em três lançamentos de uma moeda
- número de filhos de um casal
- número de peças defeituosas numa linha de produção
- número de ciclones que ocorrem numa região
- número de erros em uma "string" de 1.000 bits

1. Função de probabilidade

Definição: Seja X uma variável aleatória discreta e S_X o seu espaço amostral. A função de probabilidade **P(X=x)**, ou simplesmente **p(x)**, será a **função que associa a cada valor de X a sua probabilidade de ocorrência**, desde que atenda duas condições:

1. $p(x) \geq 0, \forall\ x \in S_X$
2. $\sum_{x \in S_X} p(x) = 1$



S_X
Espaço amostral de X

Intervalo [0, 1] na reta real

Domínio e **contradomínio**
de uma função de probabilidade

Existem três formas de representar uma função:

- **Representação tabular:** consiste em relacionar em uma tabela os valores da função de probabilidade.

- **Representação gráfica:** consiste em representar graficamente a relação entre os valores da variável e suas probabilidades

- **Representação analítica:** estabelece uma expressão geral para representar o valor da função de probabilidade num ponto genérico da variável X

Exemplo: De uma urna com três bolas pretas e duas brancas, retiram-se duas bolas juntas. Se X é o número de bolas pretas retiradas, determine a função de probabilidade P(X=x).

$$S = \{B_1B_2, P_1B_1, P_1B_2, P_2B_1, P_2B_2, P_3B_1, P_3B_2, P_1P_2, P_1P_3, P_2P_3\}$$

$$S_X = \{0, 1, 2\}$$

$$P(X = 0) = \frac{C_3^0 \; C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10}$$

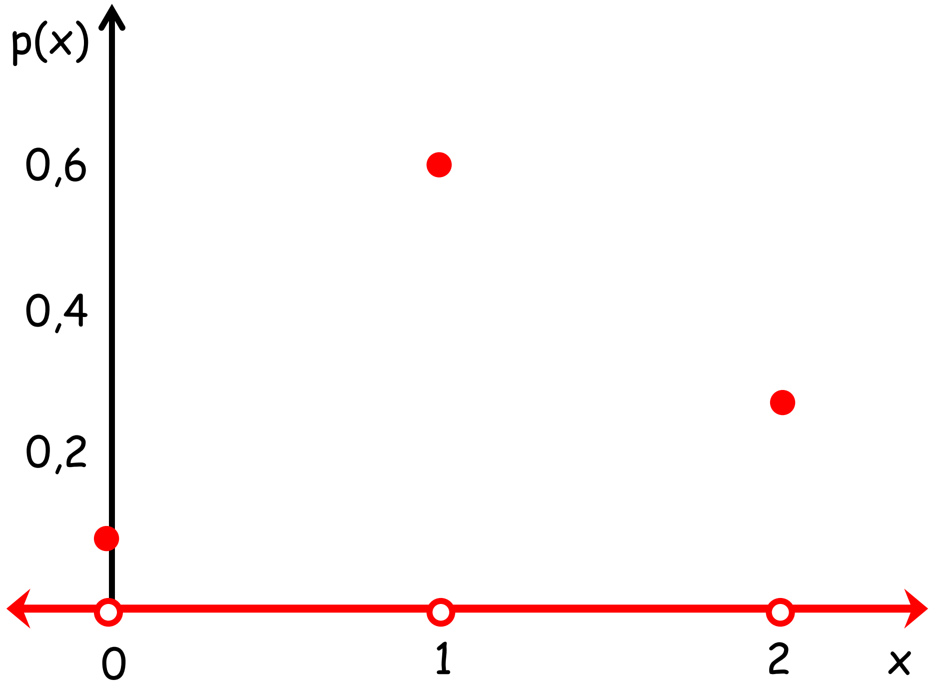
$$P(X = 1) = \frac{C_3^1 \; C_2^1}{C_5^2} = \frac{6}{10}$$

$$P(X = 2) = \frac{C_3^2 \; C_2^0}{C_5^2} = \frac{3}{10}$$

◻ Representação tabular

$X=x$	0	1	2	Σ
$P(X=x)$	0,1	0,6	0,3	1

□ Representação gráfica



$S_X = \{0, 1, 2\}$

⇨ P(X=x) é uma função contínua para todo o $x \notin S_X$, ou seja, a função P(X=x) assume o valor zero para todo o $x \notin S_X$.

⇨ P(X=x) é conhecida como função de probabilidade no ponto

◻ Representação analítica

$$P(X=0)=\frac{C_3^0\,C_2^2}{C_5^2}$$

$$P(X=1)=\frac{C_3^1\,C_2^1}{C_5^2}$$

$$P(X=2)=\frac{C_3^2\,C_2^0}{C_5^2}$$

$$\boxed{P(X=x)=\frac{C_3^x\,C_2^{2-x}}{C_5^2}}\text{, para } S_X=\{0,1,2\}$$

Exercício proposto:

De uma urna com cinco bolas pretas, três brancas e duas azuis, retiram-se, de uma vez, três bolas.

a) Defina uma variável aleatória que transforme o espaço amostral básico num espaço numérico.

b) Determine a função de probabilidade $P(X=x)$ desta variável.

2. Função de distribuição ou probabilidade acumulada

Definição: Seja X uma variável aleatória discreta e S_X o seu espaço amostral. A função de distribuição, denotada por **F(x)** ou **$P(X \leq x)$**, é **a função que associa a cada valor de X a probabilidade $P(X \leq x)$**. Desta forma, temos

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} P(X = t)$$

No exemplo:

X=x	0	1	2	Σ
P(X=x)	0,1	0,6	0,3	1

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} P(X = t)$$

$$F(0) = P(X \leq 0) = \sum_{x \leq 0} P(X = x) = P(X = 0) = 0,1$$

$$F(1) = P(X \leq 1) = \sum_{x \leq 1} P(X = x) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,1 + 0,6 = 0,7$$

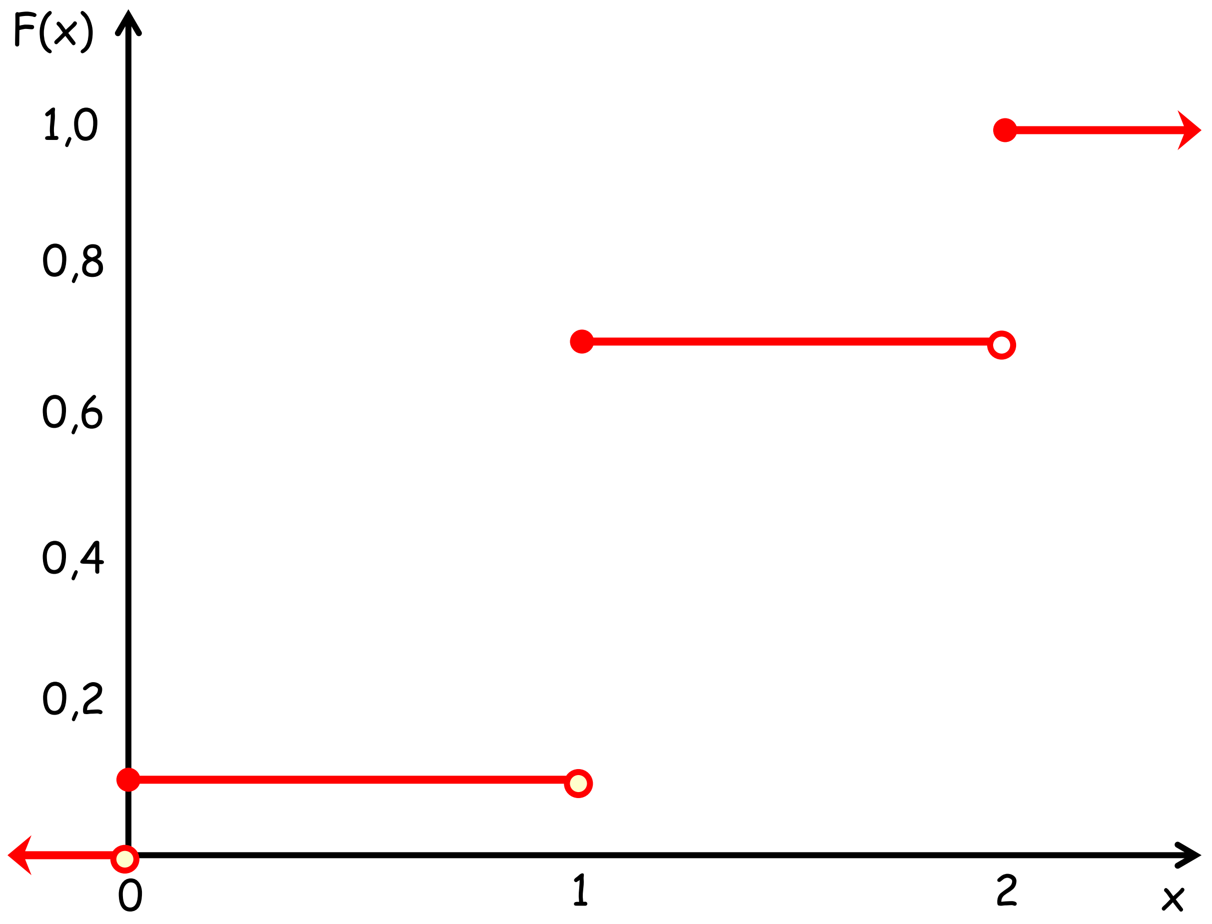
$$F(2) = P(X \leq 2) = \sum_{x \leq 2} P(X = x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$= 0,1 + 0,6 + 0,3 = 1$$

▫ Representação tabular

$X=x$	0	1	2	Σ
$P(X=x)$	0,1	0,6	0,3	1
$F(x)$	0,1	0,7	1	-

□ Representação gráfica



◻ Representação analítica

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} P(X = t)$$

$$\boxed{F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} \frac{C_3^t \, C_2^{2-t}}{C_5^2}}, \quad \text{para } S_X = \{0, 1, 2\}$$

Exemplo:

$$F(1) = P(X \leq 1) = \sum_{x \leq 1} \frac{C_3^x \, C_2^{2-x}}{C_5^2} = \frac{C_3^0 \, C_2^2}{C_5^2} + \frac{C_3^1 \, C_2^1}{C_5^2}$$

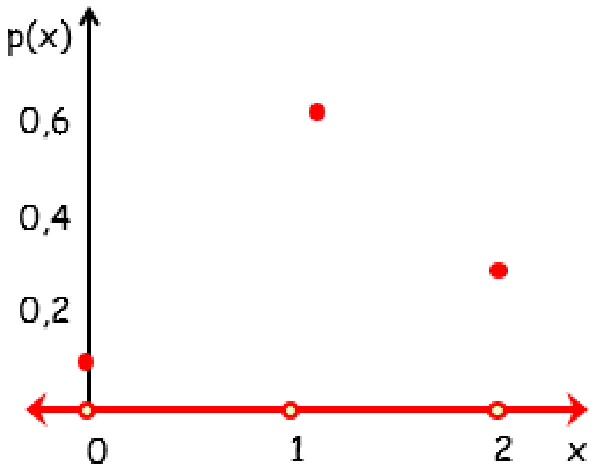
Descrição da variável aleatória

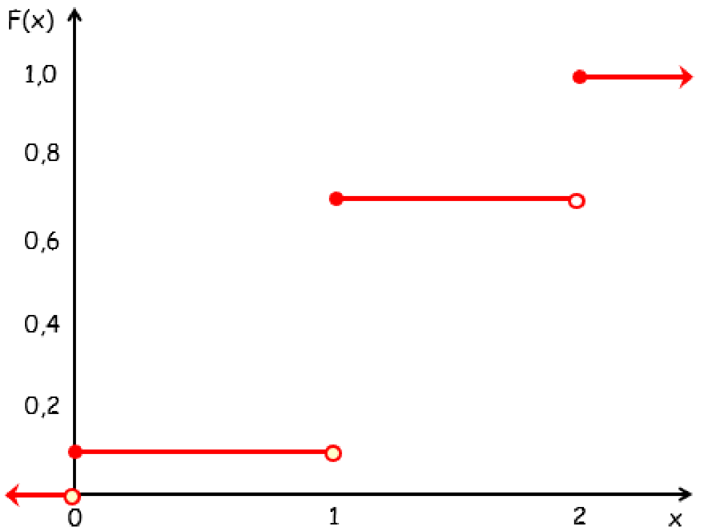
X = número de bolas pretas

$$p(x) = \frac{C_3^x \; C_2^{2-x}}{C_5^2}$$

$$F(x) = \sum_{t \le x} \frac{C_3^t \; C_2^{2-t}}{C_5^2}$$

X=x	0	1	2	Σ
P(X=x)	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$	1
F(x)	$\frac{1}{10}$	$\frac{7}{10}$	1	-





3. Medidas descritivas

$$S \xrightarrow{X} S_X$$

Conjunto não numérico $\xrightarrow{X}$ Conjunto numérico $\rightarrow$ Possibilita o cálculo de medidas descritivas: média, variância, etc.

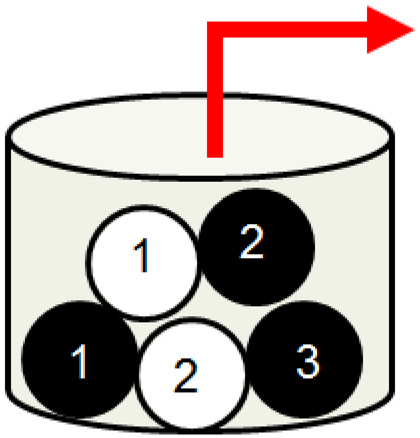
No exemplo: De uma urna com três bolas pretas e duas brancas, retiram-se duas bolas juntas.

$$S = \{B_1B_2, P_1B_1, P_1B_2, P_2B_1, P_2B_2, P_3B_1, P_3B_2, P_1P_2, P_1P_3, P_2P_3\}$$

$\downarrow$ X = número de bolas pretas

$$S_X = \{0, 1, 2\}$$

Exemplo: De uma urna com três bolas pretas e duas brancas, retiram-se duas bolas juntas.



duas bolas (juntas)

$$\#S = C_5^2 = 10$$

conjunto não numérico

$$S = \{B_1B_2,\ P_1B_1,\ P_1B_2,\ P_2B_1,\ P_2B_2,\ P_3B_1,\ P_3B_2,\ P_1P_2,\ P_1P_3,\ P_2P_3\}$$

X = número de bolas pretas retiradas

$S_X = \{0, 1, 2\}$ ← conjunto numérico

- média
- variância
- assimetria
- curtose

Função de probabilidade $P(X=x)$

$$P(X=x) = \frac{C_3^x \ C_2^{2-x}}{C_5^2}$$

← **Modelo matemático que descreve o comportamento probabilístico da variável X**

No exemplo: X = número de bolas pretas $S_X = \{0, 1, 2\}$

X=x	0	1	2	Σ
P(X=x)	0,1	0,6	0,3	1

▫ Média ou valor esperado

Definição: Seja X uma variável aleatória discreta e S_X o seu espaço amostral. O valor médio de X, denotado por $E(X)$, ou μ_X, ou simplesmente μ, é a média dos valores de X ponderada pelas suas respectivas probabilidades de ocorrência. Deste modo, tem-se

$$E(X) = \mu = \frac{\sum_{x \in S_X} x\,p(x)}{\underbrace{\sum_{x \in S_X} p(x)}_{=1}} = \sum_{x \in S_X} x\,p(x)$$

No exemplo: X = número de bolas pretas $S_X = \{0, 1, 2\}$

X=x	0	1	2	Σ
P(X=x)	0,1	0,6	0,3	1

$$E(X) = \mu = \sum_{x \in S_X} x\,p(x)$$

$$= 0 \times 0{,}1 + 1 \times 0{,}6 + 2 \times 0{,}3 = 1{,}2 \text{ bolas pretas}$$

Significado do valor esperado: se o experimento fosse repetido um grande número de vezes, o número médio de bolas pretas escolhidas seria 1,2.

Quando o espaço amostral é equiprovável

X=x	0	1	2	$\sum$
P(X=x)	1/3	1/3	1/3	1

$$E(X) = \mu = \sum_{x \in S_X} x\,p(x) = 0\times\frac{1}{3} + 1\times\frac{1}{3} + 2\times\frac{1}{3}$$

Média ponderada

$$= \frac{0}{3} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}$$

$$= \frac{0+1+2}{3} = \frac{3}{3} = 1 \text{ bola preta}$$

$$= \frac{\sum_{x \in S_X} x}{n}$$

Média simples

A média ponderada passa a ser simples

Importante!!!

⇨ Não confundir μ_X com $\overline{X}$.

μ_X é a média de todos os valores de X (para os quais a probabilidade é conhecida)

$\overline{X}$ é a média de alguns valores de X (usualmente uma amostra de valores)

Propriedades da média ou valor esperado

1ª propriedade: A média de uma constante c é a própria constante.

$$E(c)=c$$

2ª propriedade: Se X é uma variável aleatória e c uma constante, ao somarmos a constante aos valores da variável a média da variável também fica somada da constante.

$$E(c+X)=c+E(X)$$

3ª propriedade: Se X é uma variável aleatória e c uma constante, ao multiplicarmos a variável pela constante a média da variável também fica multiplicada pela constante.

$$E(cX)=cE(X)$$

4ª propriedade: A média do desvio é igual a zero.

$$E(X-\mu)=0$$

Propriedades da média ou valor esperado

5ª propriedade: A média do desvio quadrático em relação a uma constante **c** é mínima quando **c=μ**.

$$E(X-\mu)^2 < E(X-c)^2$$

6ª propriedade: Se **X** e **Y** são duas variáveis aleatórias, a média da soma (ou diferença) das duas variáveis é igual à soma (ou diferença) de suas médias.

$$E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$$

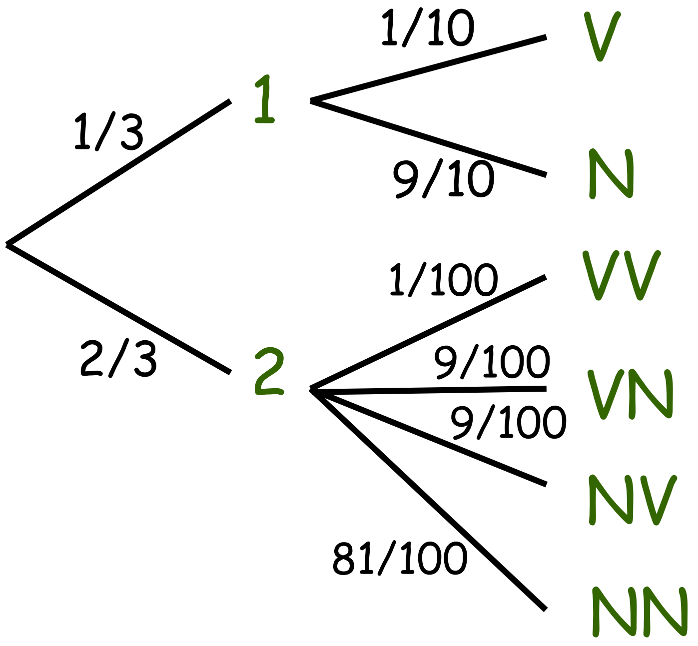
7ª propriedade: Se **X** e **Y** são duas variáveis aleatórias independentes, a média do produto das duas variáveis é igual ao produto de suas médias.

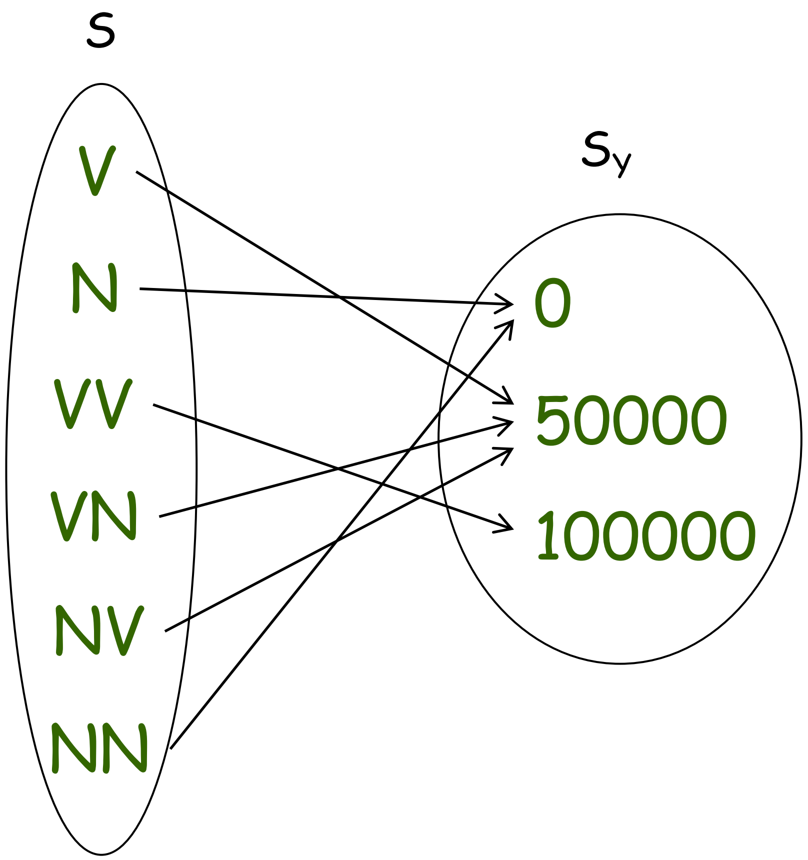
$E(XY) = E(X)E(Y)$, se **X** e **Y** são independente

Exercício proposto:

Um vendedor de equipamento pesado pode visitar, em um dia, um ou dois clientes, com probabilidades de 1/3 e 2/3, respectivamente.
De cada contato pode resultar a venda de um equipamento por R$ 50.000,00 (com probabilidade 1/10) ou nenhuma venda (com probabilidade 9/10).
Indicando por Y o valor total de vendas diárias desse vendedor, escreva a função de probabilidade de Y (representação tabular) e calcule o valor total esperado de vendas diárias.

Diagrama em árvore





Y = valor total de vendas diárias

Y=y	0	50000	100000	Σ
P(Y=y)	126/150	23/150	1/150	1

$$E(Y) = \mu = \sum_{y \in S_Y} y\, p(y)$$

$$E(Y) = \mu = 8.333{,}33 \text{ reais}$$

□ Variância

Definição: Seja X uma variável aleatória discreta e S_X o seu espaço amostral. A variância de X, denotada por $V(X)$, ou σ_X^2, ou simplesmente σ^2, é o grau médio de dispersão dos valores de X em relação à sua média. Esta medida é definida como a média ou valor esperado dos quadrados dos desvios em relação à média. Deste modo, temos

$$V(X) = \sigma^2 = \boxed{E(X-\mu)^2}$$

$$= E(X^2 - 2X\mu + \mu^2)$$

$$= E(X^2) - E(2X\mu) + E(\mu^2)$$

$$= E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2$$

$$= E(X^2) - 2\mu\mu + \mu^2 = \boxed{E(X^2) - \mu^2}$$

$$V(X) = \sigma^2 = \boxed{E(X-\mu)^2} \leftarrow \boxed{\text{Fórmula de definição}}$$

$$= \sum_{x \in S_X} (x-\mu)^2 p(x)$$

$$V(X) = \sigma^2 = \boxed{E(X^2) - \mu^2} \leftarrow \boxed{\text{Fórmula prática}}$$

onde:

$$E(X^2) = \sum_{x \in S_X} x^2 p(x) \leftarrow \boxed{\text{Média dos quadrados de X}}$$

$$\mu^2 = [E(X)]^2 = \left[\sum x\, p(x)\right]^2 \leftarrow \boxed{\text{Quadrado da média de X}}$$

No exemplo: X = número de bolas pretas $S_X = \{0, 1, 2\}$

X=x	0	1	2	Σ
P(X=x)	0,1	0,6	0,3	1

$E(X) = \mu = 1,2$

$$V(X) = \sigma^2 = E(X-\mu)^2$$

$$= \sum_{x \in S_X} (x-\mu)^2 p(x)$$

$$= (0-1,2)^2 \times 0,1 + (1-1,2)^2 \times 0,6 + (2-1,2)^2 \times 0,3 = 0,36$$

$$V(X) = \sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = 1,8 - (1,2)^2 = 1,8 - 1,44 = 0,36$$ **bolas pretas²**

⇩

$$E(X^2) = \sum x^2 p(x)$$

$$= 0^2 \times 0,1 + 1^2 \times 0,6 + 2^2 \times 0,3 = 1,8$$

Propriedades da variância

1ª propriedade: Se c é uma constante, sua variância é nula.

$$V(c)=0$$

2ª propriedade: Se X é uma variável aleatória e c uma constante, ao somarmos a constante aos valores da variável a variância da variável não se altera.

$$V(X+c)=V(X)$$

3ª propriedade: Se X é uma variável aleatória e c uma constante, ao multiplicarmos a variável pela constante a variância da variável fica multiplicada pelo quadrado da constante.

$$V(cX)=c^2 V(X)$$

4ª propriedade: Se X e Y são duas variáveis aleatórias independentes, a variância da soma (ou diferença) das duas variáveis é igual à soma das variâncias de cada uma.

$$V(X \pm Y)=V(X)+V(Y), \text{ se } X \text{ e } Y \text{ são independentes}$$

Desvio padrão

Definição: Raiz quadrada positiva da variância.

$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$

⇨ Variação média associada a cada valor da variável

Vantagens

- ✓ Possui a mesma unidade da variável original.
- ✓ É sempre possível associar proporções de valores de uma variável a intervalos construídos a partir da média e do desvio padrão.

No exemplo: X = número de bolas pretas $S_X = \{0, 1, 2\}$

$$\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0,36} = 0,6 \text{ bolas pretas}$$

Significado do desvio padrão: se o experimento fosse repetido um grande número de vezes, a variação média do número de bolas pretas escolhidas em torno do valor esperado seria 0,6.

Atenção!!!

As propriedades da variância não são extensivas ao desvio padrão.

Por exemplo:

$$\sigma_{2X} = \sqrt{V(2X)} = \sqrt{2^2 V(X)} = 2\sigma_X$$

Importante!!!

- Não confundir σ^2 com s^2.

σ^2 é a variância de **todos** os valores de X (para os quais a probabilidade é conhecida)

s^2 é a variância de **alguns** valores de X (usualmente uma amostra de valores)

- Da mesma forma, não confundir σ com s.

Exercício proposto:

Um vendedor de equipamento pesado pode visitar, em um dia, um ou dois clientes, com probabilidades de 1/3 e 2/3, respectivamente. De cada contato pode resultar a venda de um equipamento por R$ 50.000,00 (com probabilidade 1/10) ou nenhuma venda (com probabilidade 9/10).
Indicando por Y o valor total de vendas diárias desse vendedor, escreva a função de probabilidade de Y (representação tabular) e calcule a variância e o desvio padrão do total de vendas diárias.

Exercício proposto:

Um vendedor de equipamento pesado pode visitar, em um dia, um ou dois clientes, com probabilidades de 1/3 e 2/3, respectivamente. De cada contato pode resultar a venda de um equipamento por R$ 50.000,00 (com probabilidade 1/10) ou nenhuma venda (com probabilidade 9/10).
Indicando por Y o valor total de vendas diárias desse vendedor, escreva a função de probabilidade de Y (representação tabular) e calcule a variância e o desvio padrão do total de vendas diárias.

Y = valor total de vendas diárias

Y=y	0	50000	100000	Σ
P(Y=y)	126/150	23/150	1/150	1

$E(Y) = \mu = 8.333,33$ reais

$$V(Y) = \sigma^2 = E(Y^2) - \mu^2 = 450.000.000 - 8333,33^2$$
$$= 380.555.555,6 \text{ reais}^2$$

$\sigma = 19.507,83$ reais

Momentos, assimetria e curtose

Média dos desvios em relação a constante a, elevados à potência r

$$\mu_r = E(X-a)^r$$

$$m_r = \frac{\sum (x_i - a)^r}{n}$$

Momentos

Centrados na origem (ordinários) $\longrightarrow a = 0$

$$\mu'_r = E(X-0)^r = E(X^r)$$

Centrados na média $\longrightarrow a = \mu$

$$\mu_r = E(X-\mu)^r$$

Momentos centrados na origem (ordinários)

Para r = 1:

$$\mu_1' = E(X) = \sum_{x \in S_X} x\,p(x)$$ ← Média de X

Para r = 2:

$$\mu_2' = E(X^2) = \sum_{x \in S_X} x^2\,p(x)$$ ← Média dos quadrados de X

Para r = 3:

$$\mu_3' = E(X^3) = \sum_{x \in S_X} x^3\,p(x)$$ ← Média dos cubos de X

Momentos centrados na média

Para r = 1: Média dos desvios

$$\mu_1 = E(X-\mu)^1$$
$$\mu_1 = E(X) - \mu$$
$$\mu_1 = \mu - \mu = 0$$

Para r = 2: Média dos quadrados dos desvios

$$\mu_2 = \boxed{E(X-\mu)^2} = \sum_{x \in S_X} (x-\mu)^2 p(x) \leftarrow$$ Fórmula de definição

$$\mu_2 = \boxed{E(X^2) - \mu^2} \leftarrow$$ Fórmula prática

Para r = 3: Média dos cubos dos desvios

$$\mu_3 = \boxed{E(X-\mu)^3} = \sum_{x \in S_X} (x-\mu)^3 p(x)$$ ← Fórmula de definição

$$= E(X^3 - 3X^2\mu + 3X\mu^2 - \mu^3)$$

$$= E(X^3) - E(3X^2\mu) + E(3X\mu^2) - E(\mu^3)$$

$$= E(X^3) - 3\mu E(X^2) + 3\mu^2 E(X) - \mu^3$$

$$= E(X^3) - 3\mu E(X^2) + 3\mu^2\mu - \mu^3$$

$$= E(X^3) - 3\mu E(X^2) + 3\mu^3 - \mu^3$$

$$\mu_3 = \boxed{E(X^3) - 3\mu E(X^2) + 2\mu^3}$$ ← Fórmula prática

Para r = 4: Média dos desvios na potência quatro

$$\mu_4 = \boxed{E(X-\mu)^4} = \sum_{x \in S_X} (x-\mu)^4 p(x) \longleftarrow \text{Fórmula de definição}$$

$$\mu_4 = \boxed{E(X^4) - 4E(X^3)\mu + 6E(X^2)\mu^2 - 3\mu^4} \longleftarrow \text{Fórmula prática}$$

Coeficiente de assimetria: $a_3 = \dfrac{\mu_3}{\mu_2\sqrt{\mu_2}}$

Coeficiente de curtose: $a_4 = \dfrac{\mu_4}{\mu_2^2}$

Interpretação:

$$a_3 = \frac{\mu_3}{\mu_2\sqrt{\mu_2}} \quad \begin{cases} \text{- Se } a_3 < 0 \rightarrow \text{assimétrica negativa} \\ \text{- Se } a_3 = 0 \rightarrow \text{simétrica} \\ \text{- Se } a_3 > 0 \rightarrow \text{assimétrica positiva} \end{cases}$$

$$a_4 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} \quad \begin{cases} \text{- Se } a_4 < 3 \rightarrow \text{platicúrtica} \\ \text{- Se } a_4 = 3 \rightarrow \text{mesocúrtica} \\ \text{- Se } a_4 > 3 \rightarrow \text{leptocúrtica} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

Classificação por comparação com a distribuição normal

Utilizando as fórmulas de definição:

X=x	0	1	2	Σ
P(X=x)	0,1	0,6	0,3	1

$$E(X)=\sum_{x\in S_x} x\,p(x)=0\times 0,1+1\times 0,6+2\times 0,3=1,2$$

$$V(X)=E(X-\mu)^2=\sum_{x\in S_x}(x-\mu)^2\,p(x)=(0-1,2)^2\times 0,1+(1-1,2)^2\times 0,6+(2-1,2)^2\times 0,3=0,36$$

$$\mu_2=E(X-\mu)^2=\sum_{x\in S_x}(x-\mu)^2\,p(x)=(0-1,2)^2\times 0,1+(1-1,2)^2\times 0,6+(2-1,2)^2\times 0,3=0,36$$

$$\mu_3=E(X-\mu)^3=\sum_{x\in S_X}(x-\mu)^3\,p(x)=(0-1,2)^3\times 0,1+(1-1,2)^3\times 0,6+(2-1,2)^3\times 0,3=-0,024$$

$$\mu_4=E(X-\mu)^4=\sum_{x\in S_x}(x-\mu)^4\,p(x)=(0-1,2)^4\times 0,1+(1-1,2)^4\times 0,6+(2-1,2)^4\times 0,3=0,3312$$

$$a_3=\frac{\mu_3}{\mu_2\sqrt{\mu_2}}=\frac{-0,024}{0,36\sqrt{0,36}}=-0,111 \qquad a_4=\frac{\mu_4}{\mu_2^2}=\frac{0,3312}{(0,36)^2}=2,55$$

Utilizando as fórmulas práticas:

$$E(X^2) = \sum_{x \in S_X} x^2 p(x) = 0^2 \times 0{,}1 + 1^2 \times 0{,}6 + 2^2 \times 0{,}3 = 1{,}8$$

$$E(X^3) = \sum_{x \in S_X} x^3 p(x) = 0^3 \times 0{,}1 + 1^3 \times 0{,}6 + 2^3 \times 0{,}3 = 3$$

$$E(X^4) = \sum_{x \in S_X} x^4 p(x) = 0^4 \times 0{,}1 + 1^4 \times 0{,}6 + 2^4 \times 0{,}3 = 0{,}54$$

$$\mu_3 = E(X^3) - 3\mu E(X^2) + 2\mu^3 = 3 - 3 \times 1{,}2 \times 1{,}8 + 2(1{,}2)^3 = -0{,}024$$

$$\mu_4 = E(X^4) - 4E(X^3)\mu + 6E(X^2)\mu^2 - 3\mu^4$$
$$= 0{,}54 - 4 \times 3 \times 1{,}2 + 6 \times 1{,}8 \times 1{,}2^2 - 3 \times 1{,}2^4 = 0{,}3312$$

$$a_3 = \frac{\mu_3}{\mu_2\sqrt{\mu_2}} = \frac{-0{,}024}{0{,}36\sqrt{0{,}36}} = -0{,}111 \qquad a_4 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{0{,}3312}{(0{,}36)^2} = 2{,}55$$

X = número de bolas pretas $S_X = \{0, 1, 2\}$

X=x	0	1	2	Σ
P(X=x)	0,1	0,6	0,3	1

$E(X) = \mu = 1{,}2$

$V(X) = \sigma^2 = 0{,}36$

Coeficiente de assimetria:

$$a_3 = \frac{\mu_3}{\mu_2\sqrt{\mu_2}} = \frac{-0{,}024}{0{,}36\sqrt{0{,}36}} = -0{,}111$$ → Assimétrica negativa

Coeficiente de curtose:

$$a_4 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{0{,}3312}{(0{,}36)^2} = 2{,}55$$ → Platicúrtica

Descrição completa da variável aleatória

X = número de bolas pretas

$$p(x) = \frac{C_3^x \; C_2^{2-x}}{C_5^2}$$

$$F(x) = \sum_{t \le x} \frac{C_3^t \, C_2^{2-t}}{C_5^2}$$

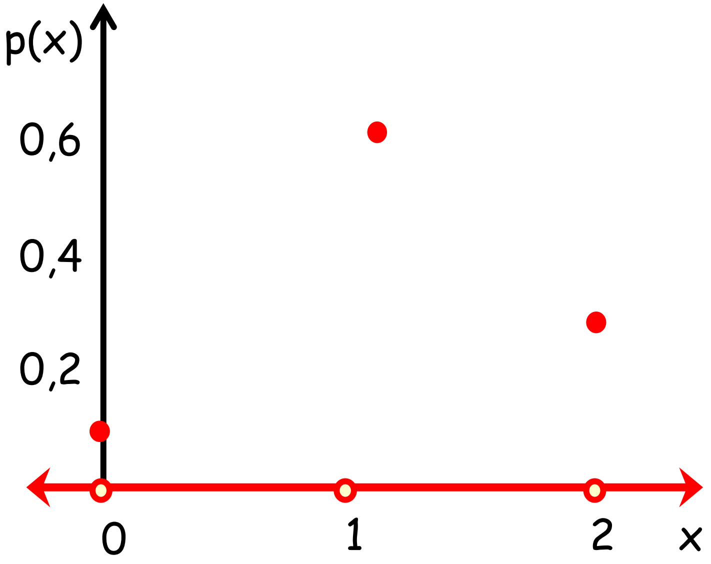
$$\mu = 1{,}2$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{0{,}36} = 0{,}6$$

$a_3 = -0{,}111 \rightarrow$ **Assimétrica negativa**

$a_4 = 2{,}55 \rightarrow$ **Platicúrtica**

X=x	0	1	2	Σ
P(X=x)	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$	1
F(x)	$\frac{1}{10}$	$\frac{7}{10}$	1	-



Medidas descritivas	Variável observada (amostra)	Variável aleatória (população)
Média	$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$	$\mu = E(X) = \sum_{x \in S_X} x\, p(x)$
Variância	$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$	$\sigma^2 = V(X) = E(X-\mu)^2 = \sum_{x \in S_X} (x-\mu)^2\, p(x)$
Desvio padrão	$s = \sqrt{s^2}$	$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$
Momentos	$m_r = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^r}{n}$	$\mu_r = E(X-\mu)^r = \sum_{x \in S_X} (x-\mu)^r\, p(x)$
Assimetria	$a_3 = \frac{m_3}{m_2 \sqrt{m_2}}$	$a_3 = \frac{\mu_3}{\mu_2 \sqrt{\mu_2}}$
Curtose	$a_4 = \frac{m_4}{m_2^2}$	$a_4 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$

Bibliografia

BUSSAB, W.O.; MORETTIN, P.A. **Estatística Básica**. São Paulo: Saraiva. 2006. 526p.

FERREIRA, D.F. **Estatística Básica**. Lavras: Editora UFLA, 2005, 664p.

FREUND, J.E., SIMON, G.A. **Estatística Aplicada. Economia, Administração e Contabilidade**. 9.ed., Porto Alegre: Bookman, 2000. 404p.

MEYER, P. L. **Probabilidade: aplicações à estatística**. Rio de Janeiro: LTC, 1976.

NAGHETTINI, M.; PINTO, E. J. de A. **Hidrologia estatística**. Belo Horizonte: CPRM, 2007. 552 p.

SILVEIRA JÚNIOR, P., MACHADO, A.A., ZONTA, E.P., SILVA, J.B. da **Curso de Estatística**. v.2, Pelotas: Universidade Federal de Pelotas, 1992. 234p.