UNIDADE III - Elementos de probabilidades

Profª. Clause Piana

Teoremas para o cálculo de probabilidades

Teorema 1. $P(\varnothing)=0$

Teorema 2. $P(\bar{A})=1-P(A)$

Teorema 3. $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$

Teorema 4. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

Teorema 5. $\left.\begin{array}{l} P(\overline{A\cup B}) = P(\bar{A}\cap\bar{B}) \\ P(\overline{A\cap B}) = P(\bar{A}\cup\bar{B}) \end{array}\right\}$ Teorema de Morgan

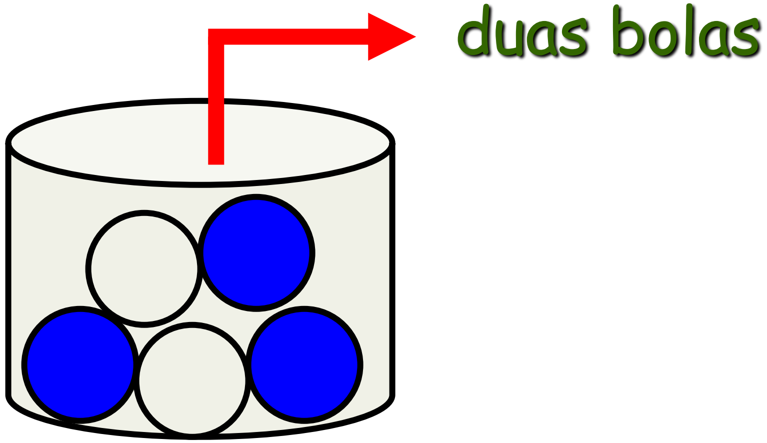
$P(A\cap B)=?$

3.2.5 Probabilidade condicional e independência

Sejam **A** e **B** dois eventos associados a um mesmo espaço amostral **S**. Se **A** e **B** não são eventos mutuamente exclusivos, ou seja, se $A \cap B \neq \varnothing$, então **A** e **B** poderão ser eventos **independentes** ou **condicionados**.

Exemplo:

Exp.: Uma caixa contém cinco bolas, sendo três azuis e duas brancas. Duas bolas são retiradas ao acaso, uma a uma, e suas cores são observadas.



Definimos, então, dois eventos:

A_1: a primeira bola é azul

A_2: a segunda bola é branca

As probabilidades dos eventos **A_1** e **A_2** serão calculadas em duas situações: retiradas **sem** e **com reposição** da primeira bola.

Situação 1. Consideremos que a primeira bola retirada não é reposta → **retirada sem reposição**

S = {B, B, A, A, A}   ← enumerável, finito e equiprovável

A_1 = {A, A, A }

$$P(A_1) = \frac{\#A_1}{\#S} = \frac{3}{5}$$

A probabilidade do A_2 depende da ocorrência do A_1 ?

- Se ocorreu A_1, então temos $P(A_2/A_1)$

$S = \{B, B, A, A\}$

$$P(A_2/A_1) = \frac{\# A_2/A_1}{\# S} = \frac{2}{4}$$

$A_2/A_1 = \{B, B\}$

- Se não ocorreu A_1, então temos $P(A_2/\bar{A}_1)$

$S = \{B, A, A, A\}$

$$P(A_2/\bar{A}_1) = \frac{\# A_2/\bar{A}_1}{\# S} = \frac{1}{4}$$

$A_2/\bar{A}_1 = \{B\}$

Se a bola **não for reposta**, a probabilidade de ocorrência do A_2 fica **alterada** pela ocorrência ou não do A_1

$$P(A_2/A_1) \neq P(A_2/\bar{A}_1)$$

Eventos condicionados

Definição: dois eventos quaisquer, **A** e **B**, são condicionados quando a ocorrência de um **altera** a probabilidade de ocorrência do outro.

A probabilidade condicional de **A** é denotada por

P(A/B)

(lê-se probabilidade de A dado que ocorreu B)

A probabilidade condicional de **B** é denotada por

P(B/A)

A probabilidade do A_2 depende da ocorrência do A_1?

- Se ocorreu A_1, então temos $P(A_2/A_1)$

$S = \{B, B, A, A, A\}$

$A_2/A_1 = \{B, B\}$

$$P(A_2/A_1) = \frac{\# A_2/A_1}{\# S} = \frac{2}{5}$$

- Se não ocorreu A_1, então temos $P(A_2/\bar{A}_1)$

$S = \{B, B, A, A, A\}$

$A_2/\bar{A}_1 = \{B, B\}$

$$P(A_2/\bar{A}_1) = \frac{\# A_2/\bar{A}_1}{\# S} = \frac{2}{5}$$

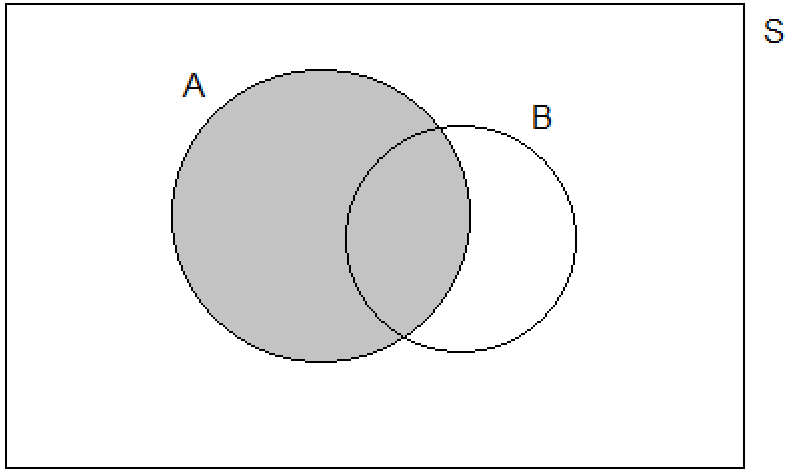
Se a bola **for reposta**, a probabilidade de ocorrência do A_2 **não é alterada** pela ocorrência ou não do A_1

$$P(A_2/A_1) = P(A_2/\bar{A}_1)$$

Eventos condicionados

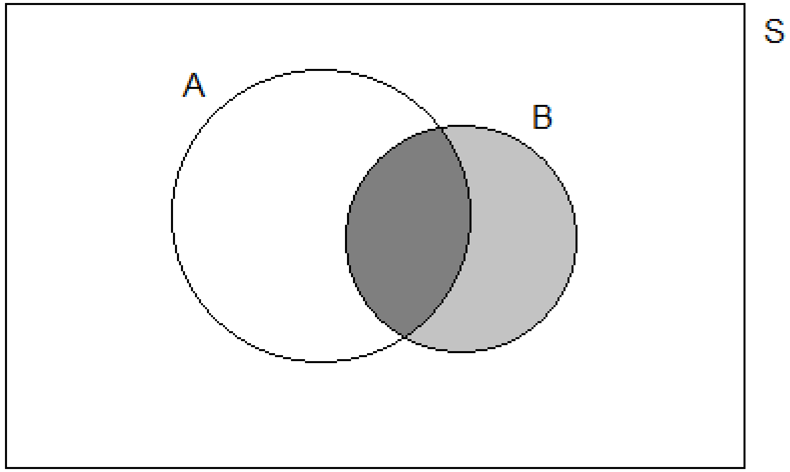
Definição: Dois eventos quaisquer, **A** e **B**, são condicionados quando a ocorrência de um **altera** a probabilidade de ocorrência do outro.

$$P(A/B) \neq P(A) \text{ e } P(B/A) \neq P(B)$$



$$P(A) = \frac{\text{medida de } A}{\text{medida de } S}$$

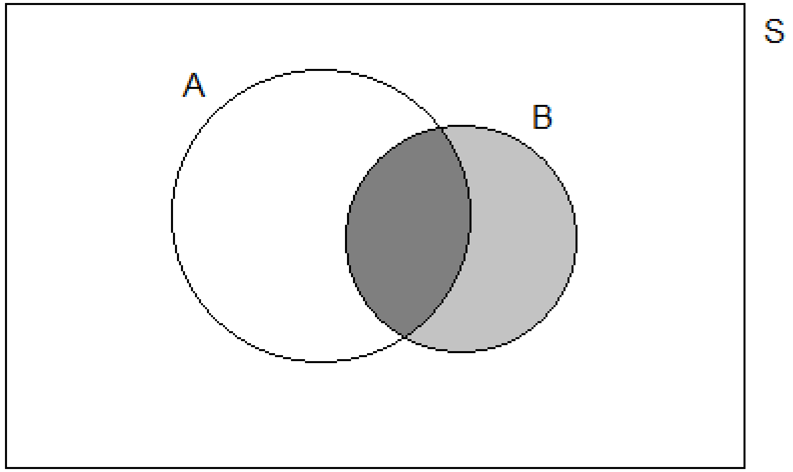
$$P(A/B) = ?$$



$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

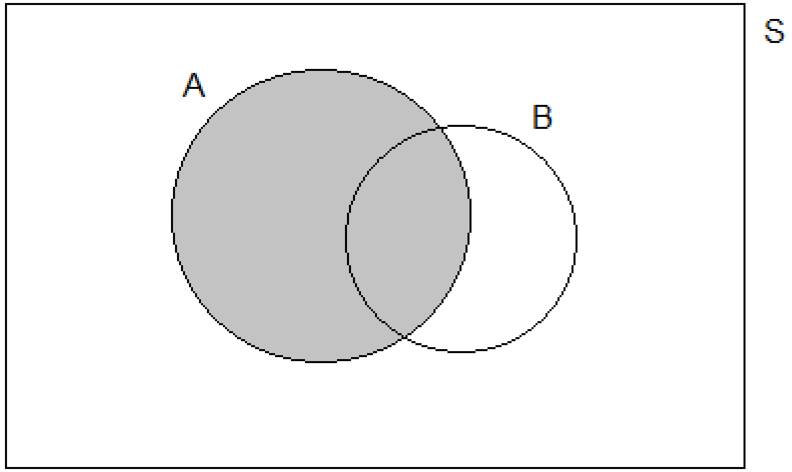
Eventos independentes

Probabilidade condicional de A



$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Probabilidade total de A

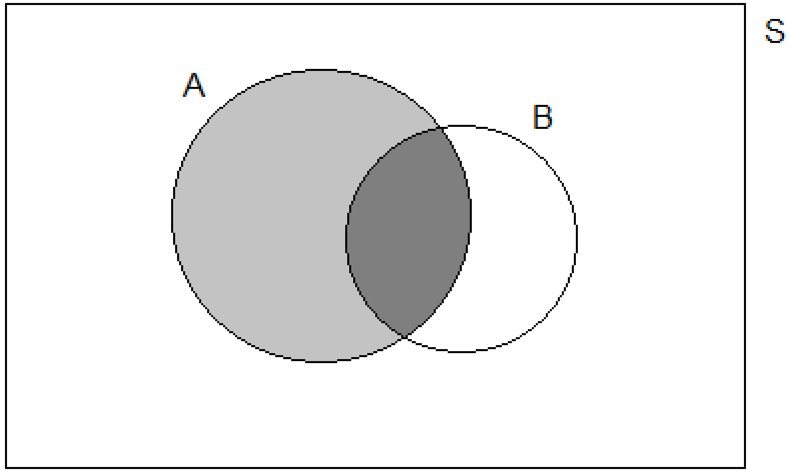


$$P(A) = \frac{\text{medida de } A}{\text{medida de } S}$$

Se **P(A/B) = P(A)**, os eventos A e B são **independentes**.

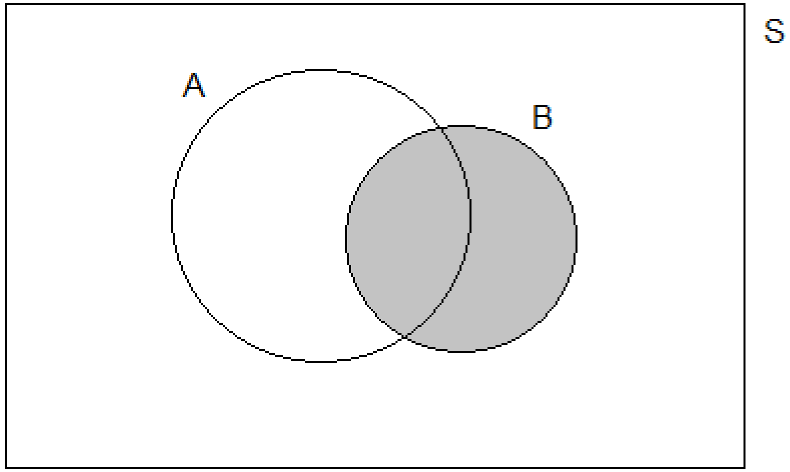
Eventos independentes

Probabilidade condicional de B



$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Probabilidade total de B

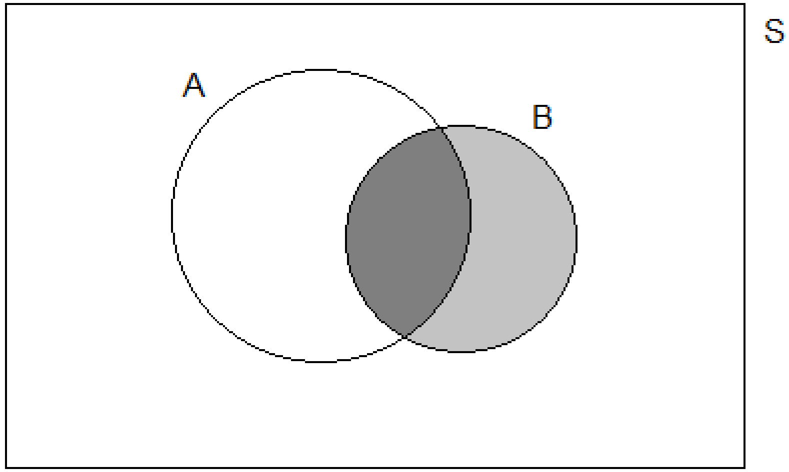


$$P(B) = \frac{\text{medida de } B}{\text{medida de } S}$$

Se **P(B/A) = P(B)**, os eventos A e B são **independentes**.

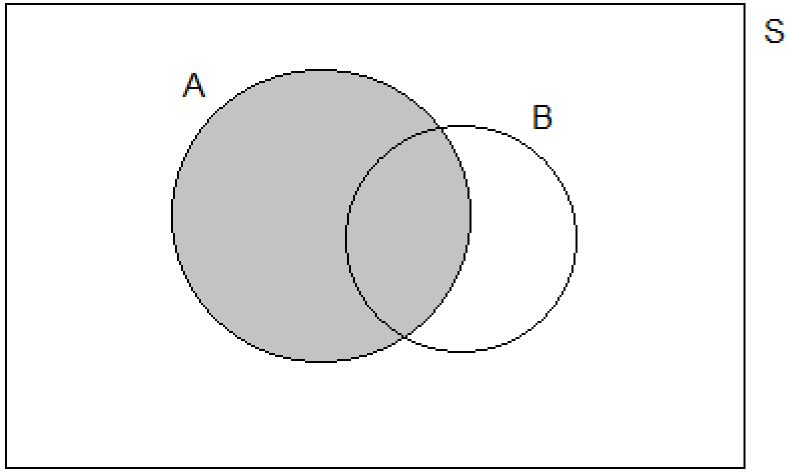
Eventos condicionados

Probabilidade condicional de A



$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Probabilidade total de A

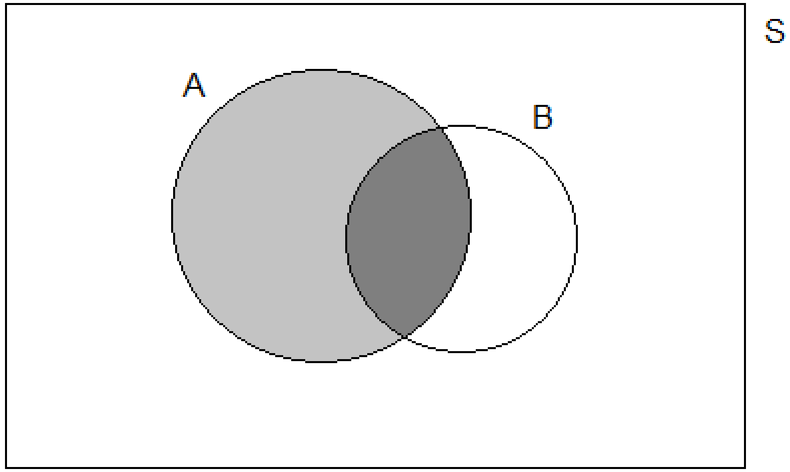


$$P(A) = \frac{\text{medida de } A}{\text{medida de } S}$$

Se **$P(A/B) \neq P(A)$**, os eventos A e B são **condicionados**.

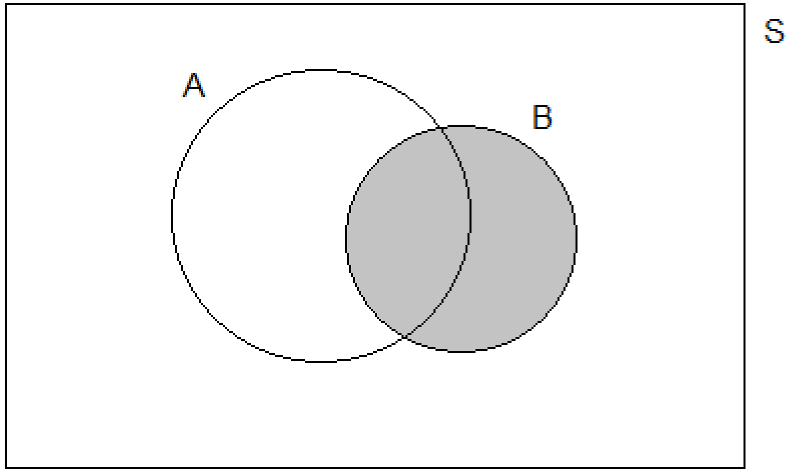
Eventos condicionados

Probabilidade condicional de B



$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Probabilidade total de B



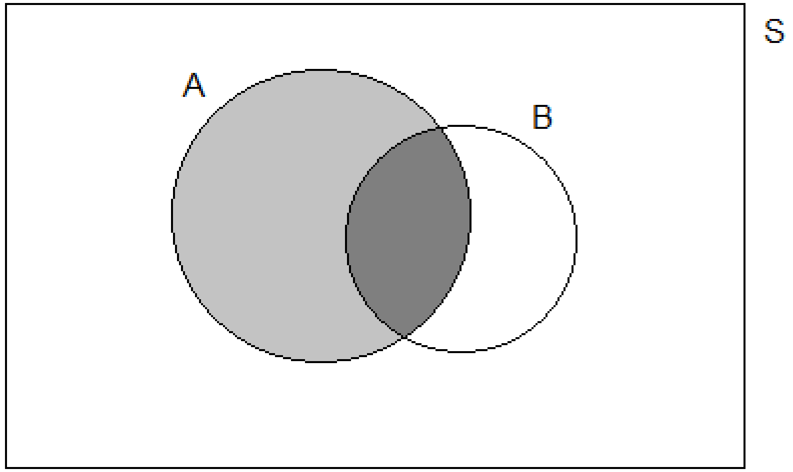
$$P(B) = \frac{\text{medida de B}}{\text{medida de S}}$$

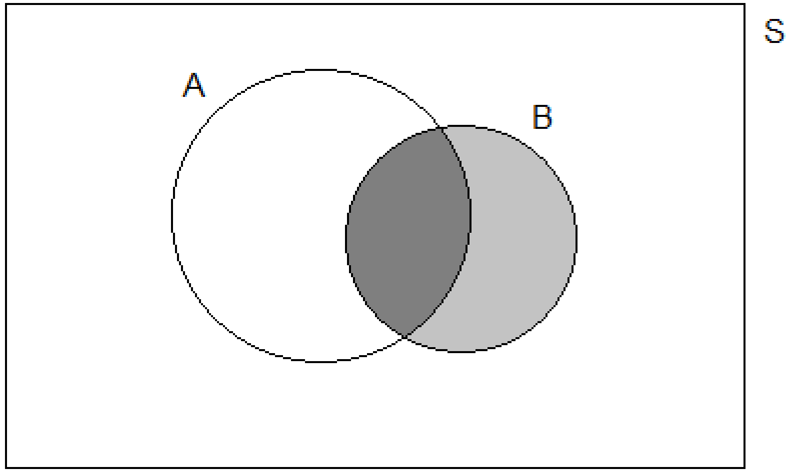
Se **P(B/A) ≠ P(B)**, os eventos A e B são condicionados.

6. Teorema do Produto das Probabilidades

Se **A** e **B** são dois eventos quaisquer, então

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{e} \quad P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$





6. Teorema do Produto das Probabilidades

Se **A** e **B** são dois eventos quaisquer, então

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{e} \quad P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Daí resulta que:

$$\mathbf{P(A \cap B) = P(A)\,P(B/A)} \quad \text{ou} \quad \mathbf{P(A \cap B) = P(B)\,P(A/B)}$$

Caso particular:

Se **A** e **B** são dois **eventos independentes**, então

$$P(B/A)=P(B) \quad e \quad P(A/B)=P(A)$$

Daí resulta que

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B/A) \quad ou \quad P(A \cap B) = P(B)\,P(A/B)$$

torna-se $P(A \cap B) = P(A)\,P(B) = P(B)\,P(A)$

A e B são independentes $\Leftrightarrow \begin{cases} P(B/A)=P(B) \text{ e } P(A/B)=P(A) \\ P(A \cap B)=P(A)\,P(B)=P(B)\,P(A) \end{cases}$

Teoremas para o cálculo de probabilidades

Teorema 1. $P(\varnothing)=0$

Teorema 2. $P(\bar{A})=1-P(A)$

Teorema 3. $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$

Teorema 4. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

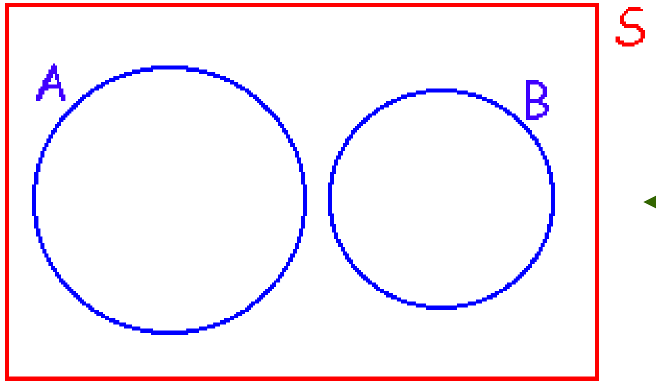
Teorema 5. $P(\overline{A\cup B}) = P(\bar{A}\cap\bar{B})$

$$P(\overline{A\cap B}) = P(\bar{A}\cup\bar{B})$$

Teorema 6. $P(A\cap B)=\begin{cases} P(A)\,P(B/A) \\ P(B)\,P(A/B) \end{cases}$

Eventos mutuamente exclusivos

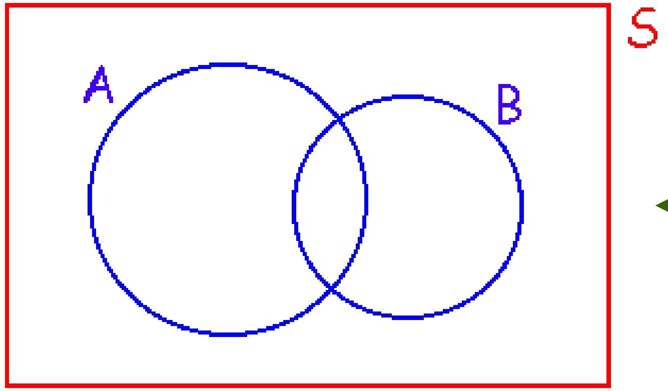
$A \cap B = \varnothing$



Grau máximo de dependência entre dois eventos: a ocorrência de um **impede** a ocorrência do outro

Eventos interseccionados

$A \cap B \neq \varnothing$



Condicionados: a ocorrência de um **altera** a probabilidade de ocorrência do outro

Independentes: a ocorrência de um **não altera** a probabilidade de ocorrência do outro

A intersecção é condição necessária (mas não suficiente) para a independência.

Exercício proposto:

Um grupo de pessoas é constituído de 60 homens e 40 mulheres. Sabe-se que 45 desses homens e 30 dessas mulheres votaram numa determinada eleição. Tomando-se, aleatoriamente, uma dessas pessoas, calcule a probabilidade de:

a) ser homem;
b) ser mulher;
c) ter votado;
d) não ter votado;
e) ser homem, sabendo-se que votou;
f) ser mulher, sabendo-se que não votou;
g) ter votado, sabendo-se que é mulher;
h) não ter votado, sabendo-se que é homem.

	Votou	Não votou	Totais
Homem	45	15	60
Mulher	30	10	40
Totais	75	25	100

Eventos

H = ser homem

M = ser mulher

V = ter votado

NV = não ter votado

a) $P(H) = \frac{\#H}{\#S} = \frac{60}{100} = 0{,}6$

b) $P(M) = \frac{\#M}{\#S} = \frac{40}{100} = 0{,}4$

c) $P(V) = \frac{\#V}{\#S} = \frac{75}{100} = 0{,}75$

d) $P(NV) = \frac{\#NV}{\#S} = \frac{25}{100} = 0{,}25$

e) $P(H/V) = \frac{P(H \cap V)}{P(V)} = \frac{45/100}{75/100} = \frac{45}{75}$

f) $P(M/NV) = \frac{P(M \cap NV)}{P(NV)} = \frac{10/100}{25/100} = \frac{10}{25}$

g) $P(V/M) = \frac{P(V \cap M)}{P(M)} = \frac{30/100}{40/100} = \frac{30}{40}$

h) $P(NV/H) = \frac{P(NV \cap H)}{P(H)} = \frac{15/100}{60/100} = \frac{15}{60}$

Teorema de Bayes

Thomas Bayes
(1702 –1761)

- Reverendo presbiteriano que viveu no início do século 18 na Inglaterra
- Estudou teologia na Escócia e assumiu uma paróquia numa cidade vizinha a Londres
- Em 1736 publicou seu primeiro e único livro de matemática
- Dois anos após sua morte, foi encontrado entre seus papéis um artigo com a demonstração do teorema
- Após sua publicação, o trabalho caiu no esquecimento, do qual só foi resgatado pelo matemático francês Laplace, que o revelou ao mundo em 1812

PHILOSOPHICAL
TRANSACTIONS

An Essay towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances. By the Late Rev. Mr. Bayes, F. R. S. Communicated by Mr. Price, in a Letter to John Canton, A. M. F. R. S.

Mr. Bayes and Mr. Price

Phil. Trans. 1763 53, 370-418, published 1 January 1763

quodque folum, certa nitri figna præbere, fed plura concurrere debere, ut de vero nitro producto dubium non relinquatur.

LII. *An Effay towards folving a Problem in the Doctrine of Chances. By the late Rev. Mr.* Bayes, *F. R. S. communicated by Mr.* Price, *in a Letter to* John Canton, *A. M. F. R. S.*

Dear Sir,

Read Dec. 23, 1763. I Now fend you an effay which I have found among the papers of our deceafed friend Mr. Bayes, and which, in my opinion, has great merit, and well deferves to be preferved. Experimental philofophy, you will find, is nearly interefted in the fubject of it; and on this account there feems to be particular reafon for thinking that a communication of it to the Royal Society cannot be improper.

He had, you know, the honour of being a member of that illuftrious Society, and was much efteemed by many in it as a very able mathematician. In an introduction which he has writ to this Effay, he fays, that his defign at firft in thinking on the fubject of it was, to find out a method by which we might judge concerning the probability that an event has to happen, in given circumftances, upon fuppofition that we know nothing concerning it but that, under the fame circum-

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS RS-BRASIL

Profª. Clause Piana

Mr. Bayes has thought fit to begin his work with a brief demonſtration of the general laws of chance. His reaſon for doing this, as he ſays in his introduction, was not merely that his reader might not have the trouble of ſearching elſewhere for the principles on which he has argued, but becauſe he did not know whither to refer him for a clear demonſtration of them. He has alſo made an apology for the peculiar definition he has given of the word *chance* or *probability*. His deſign herein was to cut off all diſpute about the meaning of the word, which in common language is uſed in different ſenſes by perſons of different opinions, and according as it is applied to *paſt* or *future* facts. But whatever different ſenſes it may have, all (he obſerves) will allow that an expectation depending on the truth of any *paſt* fact, or the happening of any *future* event, ought to be eſtimated ſo much the more valuable as the fact is more likely to be true, or the event more likely to happen. Inſtead therefore, of the proper ſenſe of the word *probability*, he has given that which all will allow to be its proper meaſure in every caſe where the word is uſed. But it is time to conclude this letter. Experimental philoſophy is indebted to you for ſeveral diſcoveries and improvements; and, therefore, I cannot help thinking that there is a peculiar propriety in directing to you the following eſſay and appendix. That your enquiries may be rewarded with many further ſucceſſes, and that you may enjoy every every valuable bleſſing, is the ſincere wiſh of, Sir,

your very humble ſervant,

Newington-Green,
Nov. 10, 1763.

Richard Price.

SEC-

Downloaded from http://rstl.royalsocietypublishing.org/ on
October 6, 2016

PROBLEM.

Given the number of times in which an unknown event has happened and failed: *Required* the chance that the probability of its happening in a ſingle trial lies ſomewhere between any two degrees of probability that can be named.

SECTION I.

DEFINITION 1. Several events are *inconſiſtent*, when if one of them happens, none of the reſt can.

2. Two events are *contrary* when one, or other of them muſt; and both together cannot happen.

3. An event is ſaid to *fail*, when it cannot happen; or, which comes to the ſame thing, when its contrary has happened.

4. An event is ſaid to be determined when it has either happened or failed.

5. The *probability of any event* is the ratio between the value at which an expectation depending on the happening of the event ought to be computed, and the value of the thing expected upon it's happening.

6. By *chance* I mean the ſame as probability.

7. Events are independent when the happening of any one of them does neither increaſe nor abate the probability of the reſt.

PROP. 1.

When ſeveral events are inconſiſtent the probability of the happening of one or other of them is the ſum of the probabilities of each of them.

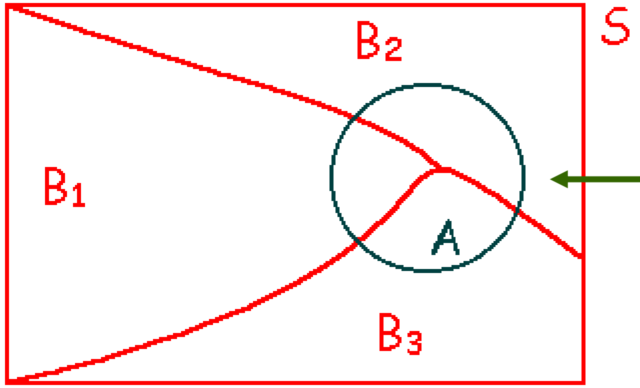
Suppoſe

Teorema de Bayes

Seja S um espaço amostral, com n partições, onde está definido o evento A.

n=3

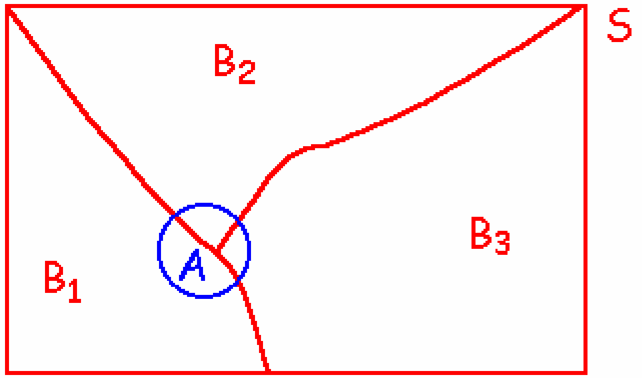
$B_1 \cup B_2 \cup B_3 = S$



Evento de interesse

$$\left.\begin{array}{l} B_1 \cap B_2 = \varnothing \\ B_1 \cap B_3 = \varnothing \\ B_2 \cap B_3 = \varnothing \end{array}\right\} B_i \cap B_j = \varnothing$$

Exemplo: Em uma fábrica de parafusos, as máquinas A, B e C produzem 25%, 35% e 40% do total produzido. Da produção de cada máquina, 5%, 4% e 2%, respectivamente, são defeituosos.



S = produção total da fábrica

B_1 = produção da máquina A

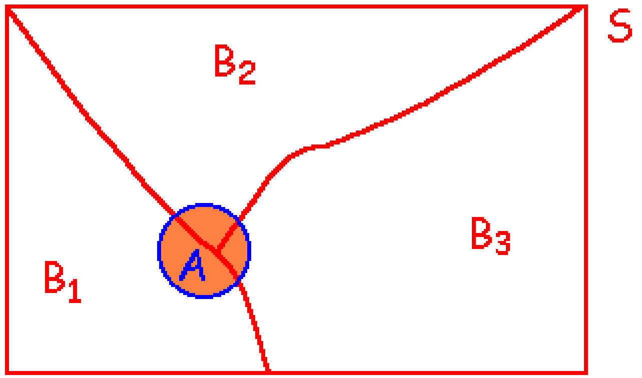
B_2 = produção da máquina B

B_3 = produção da máquina C

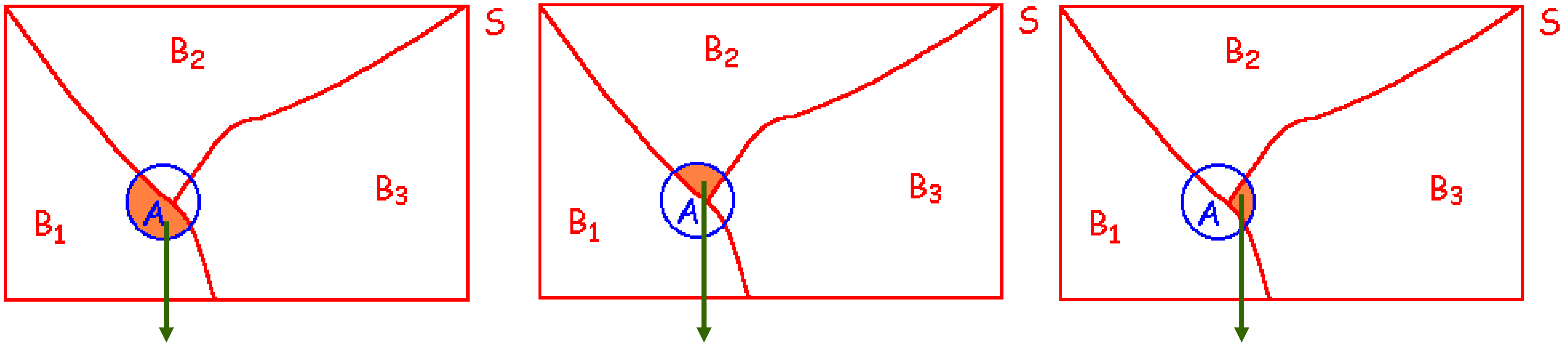
A = produção defeituosa

Se escolhemos ao acaso um parafuso desta fábrica, qual é a probabilidade de que este parafuso seja defeituoso?

Se escolhemos ao acaso um parafuso desta fábrica, qual é a probabilidade de que este parafuso seja defeituoso?

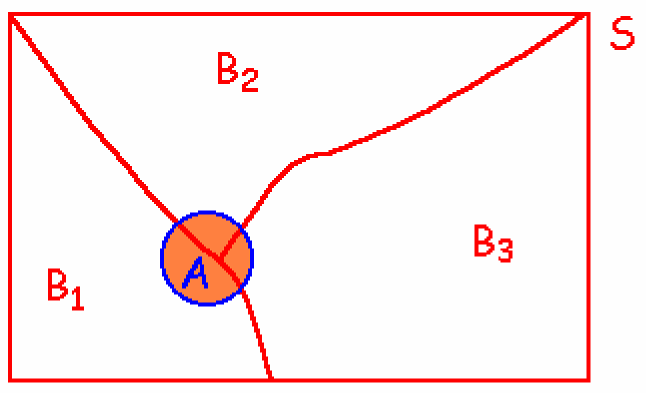


$P(A)$?



$B_1 \cap A$ $B_2 \cap A$ $B_3 \cap A$

$$A = (B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A) \cup (B_3 \cap A)$$



$$A = (B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A) \cup (B_3 \cap A)$$

$$P(A) = ?$$

$$P(A) = P[(B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A) \cup (B_3 \cap A)]$$

$$P(A) = P(B_1 \cap A) + P(B_2 \cap A) + P(B_3 \cap A)$$

$$P(B_1 \cap A) = P(B_1) \,.\, P(A/B_1)$$

$$P(B_2 \cap A) = P(B_2) \,.\, P(A/B_2)$$

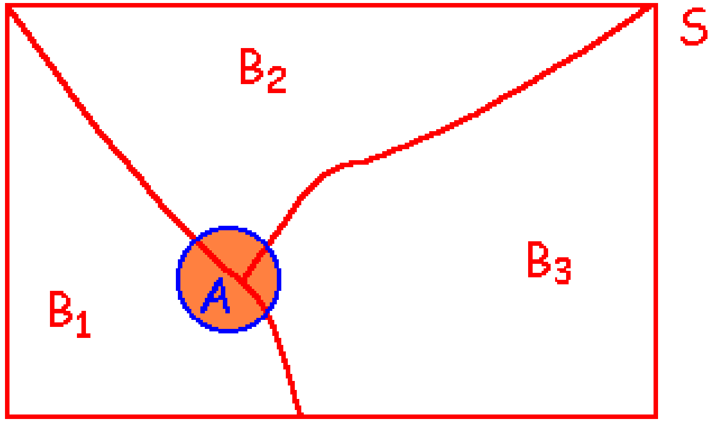
$$P(B_3 \cap A) = P(B_3) \,.\, P(A/B_3)$$

$$P(A) = P(B_1 \cap A) + P(B_2 \cap A) + P(B_3 \cap A)$$

$$P(A) = P(B_1) \,.\, P(A/B_1) + P(B_2) \,.\, P(A/B_2) + P(B_3) \,.\, P(A/B_3)$$

$$P(A) = P(B_1) . P(A/B_1) + P(B_2) . P(A/B_2) + P(B_3) . P(A/B_3)$$

Exemplo: Em uma fábrica de parafusos, as máquinas A, B e C produzem 25%, 35% e 40% do total produzido. Da produção de cada máquina, 5%, 4% e 2%, respectivamente, são defeituosos.



$P(B_1)= 0,25$

$P(B_2)= 0,35$

$P(B_3)= 0,40$

Probabilidade de ser defeituoso dado que foi fabricado pela máquina A $\rightarrow$ $P(A/B_1) = 0,05$

Probabilidade de ser defeituoso dado que foi fabricado pela máquina B $\rightarrow$ $P(A/B_2) = 0,04$

Probabilidade de ser defeituoso dado que foi fabricado pela máquina C $\rightarrow$ $P(A/B_3) = 0,02$

$P(B_1) = 0,25$ $\qquad$ $P(A/B_1) = 0,05$

$P(B_2) = 0,35$ $\qquad$ $P(A/B_2) = 0,04$

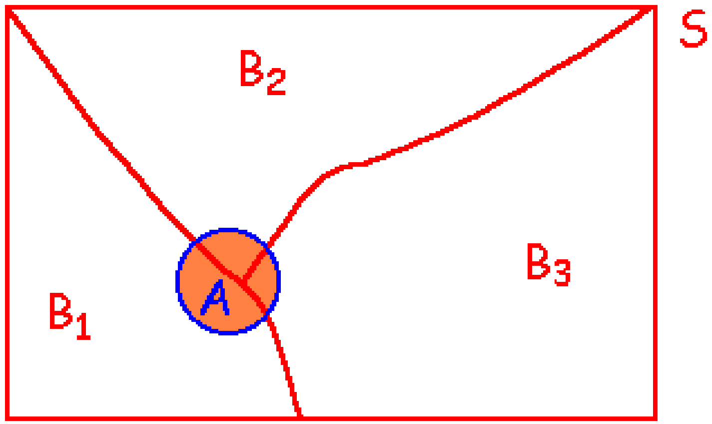
$P(B_3) = 0,40$ $\qquad$ $P(A/B_3) = 0,02$

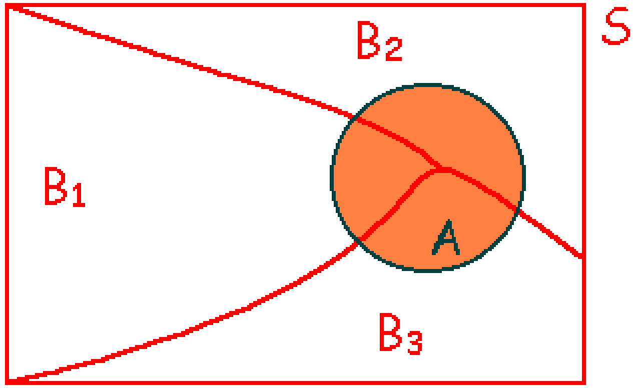
$$P(A) = P(B_1)\,.\,P(A/B_1) + P(B_2)\,.\,P(A/B_2) + P(B_3)\,.\,P(A/B_3)$$

$$P(A) = 0,25\,.\,0,05 + 0,35\,.\,0,04 + 0,40\,.\,0,02$$

$$P(A) = 0,0345$$

3,45% da produção de parafusos desta fábrica é defeituosa





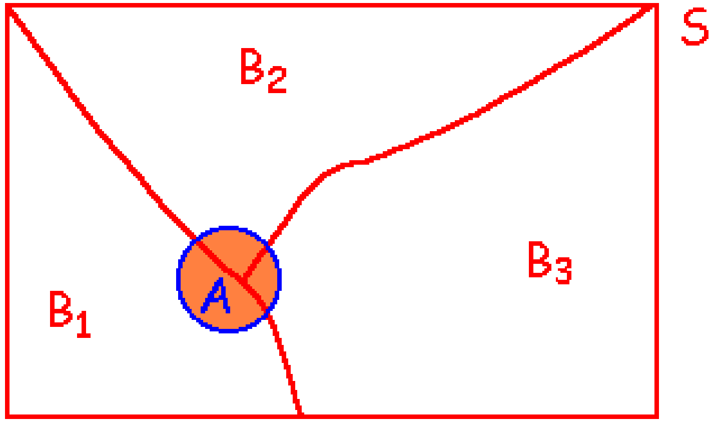
$$P(A) = P(B_1) \,.\, P(A/B_1) + P(B_2) \,.\, P(A/B_2) + P(B_3) \,.\, P(A/B_3)$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(B_i).P(A/B_i)$$

Teorema da probabilidade total:

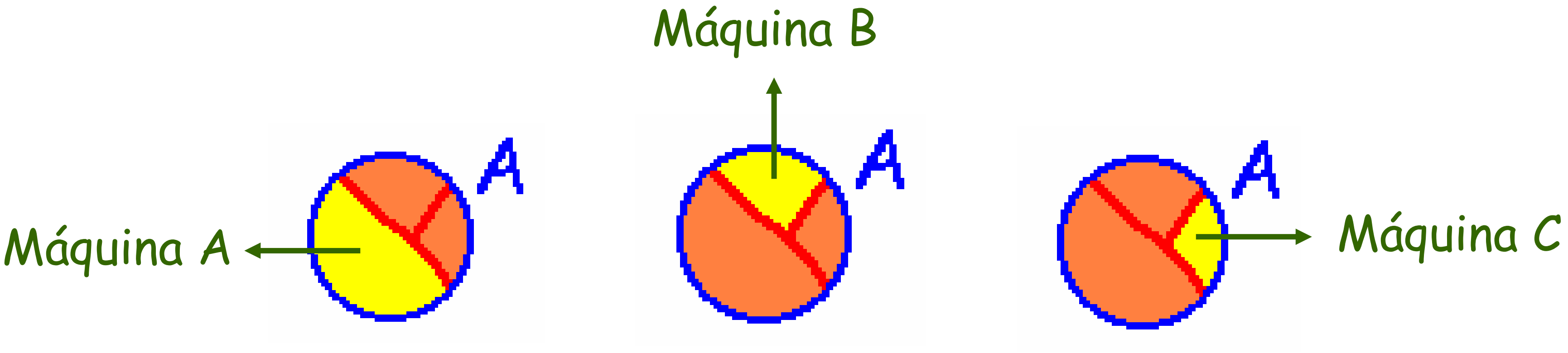
$$P(A) = P(B_1) \,.\, P(A/B_1) + P(B_2) \,.\, P(A/B_2) + ... + P(B_n) \,.\, P(A/B_n)$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i).P(A/B_i)$$

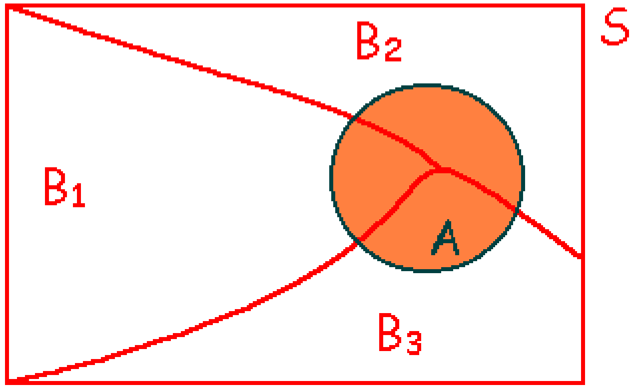


B_1 = máquina A
B_2 = máquina B
B_3 = máquina C

Escolhe-se ao acaso um parafuso e verifica-se que ele é defeituoso. Qual é a probabilidade de que seja da máquina A, da máquina B e da máquina C?



$P(B_1/A) = ?$ $P(B_2/A) = ?$ $P(B_3/A) = ?$

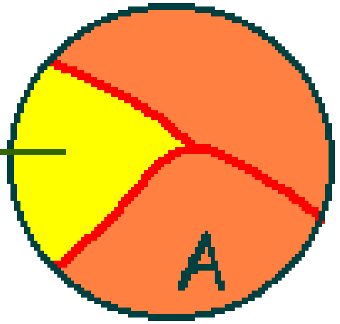


Qual é a probabilidade de ocorrer B_1, sabendo-se que ocorreu A?

Probabilidade condicionada:

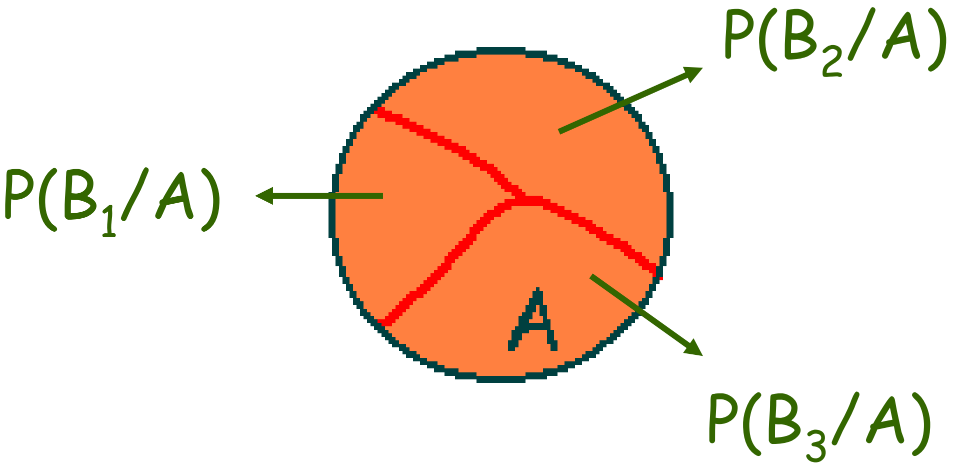
$$P(B_1/A) = ?$$

$P(B_1/A)$



$$P(B_1/A) = \frac{P(B_1 \cap A)}{P(A)}$$

$$P(B_1/A) = \frac{P(B_1).P(A/B_1)}{P(A)}$$



Teorema de Bayes:

$$P(B_i/A) = \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B_i).P(A/B_i)}{P(A)}$$

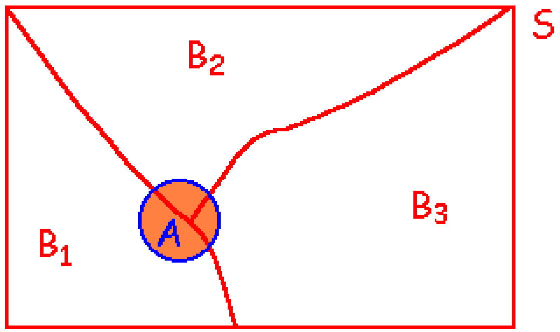
Teorema de Bayes

$$P(B_i/A) = \frac{P(B_i)\,.\,P(A/B_i)}{P(A)}$$

Teorema da probabilidade total

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i).P(A/B_i)$$

Exemplo: Em uma fábrica de parafusos, as máquinas A, B e C produzem 25%, 35% e 40% do total produzido. Da produção de cada máquina, 5%, 4% e 2%, respectivamente, são defeituosos.



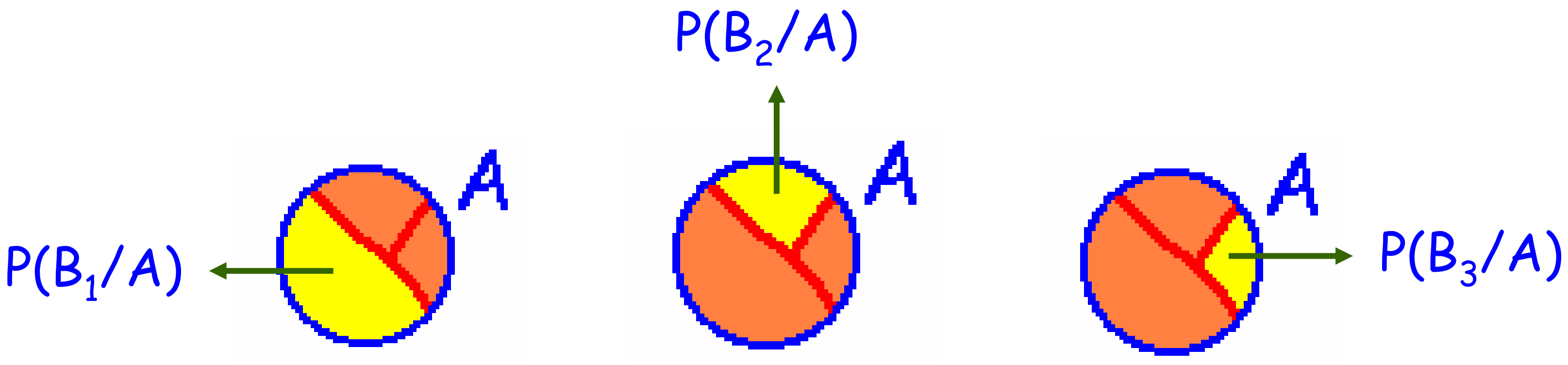
B_1 = produção da máquina A

B_2 = produção da máquina B

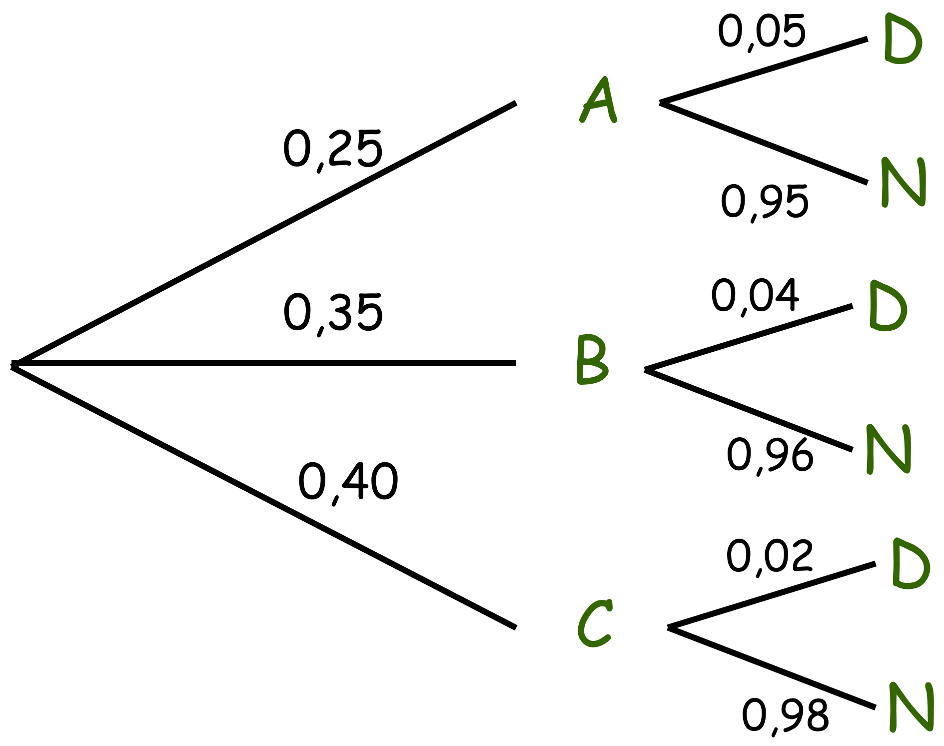
B_3 = produção da máquina C

A = produção defeituosa

Escolhe-se ao acaso um parafuso e verifica-se que ele é defeituoso. Qual é a probabilidade de que seja da máquina A, da máquina B e da máquina C?



Resolução com o uso do diagrama em árvore



$$P(D) = 0{,}25 \times 0{,}05 + 0{,}35 \times 0{,}04 + 0{,}40 \times 0{,}02 = 0{,}0345$$

$$P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0{,}25 \times 0{,}05}{0{,}0345} = 0{,}3623$$

$$P(B/D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{0{,}35 \times 0{,}04}{0{,}0345} = 0{,}4058$$

$$P(C/D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{0{,}40 \times 0{,}02}{0{,}0345} = 0{,}2319$$

Profª. Clause Piana

Exercício proposto:

Um satélite meteorológico envia um conjunto de códigos binários ('0' ou '1') para descrever o desenvolvimento de uma tempestade. Entretanto, interferências diversas no sinal emitido pelo satélite podem provocar erros de transmissão.

Suponha que uma certa mensagem binária contendo 80% de dígitos '0' tenha sido transmitida e que exista uma probabilidade de 85% de que um dado '0' ou '1' tenha sido recebido corretamente.

Qual é a probabilidade de ter sido emitido um dígito '0', se houve a recepção de um dígito '1'?

Teoremas para o cálculo de probabilidades

Teorema 1. $P(\varnothing)=0$

Teorema 2. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Teorema 3. $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$

Teorema 4. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

Teorema 5.
$$\left.\begin{aligned} P(\overline{A\cup B}) &= P(\bar{A}\cap \bar{B}) \\ P(\overline{A\cap B}) &= P(\bar{A}\cup \bar{B}) \end{aligned}\right\} \text{ Morgan}$$

Teorema 6. $P(A\cap B)= P(A)\, P(B/A)$ ou $P(A\cap B)= P(B)\, P(A/B)$

Teorema 7.
$$\left.\begin{aligned} P(B_i/A) &= \frac{P(B_i)\,.\,P(A/B_i)}{P(A)} \\ P(A) &= \sum_{i=1}^{n} P(B_i).P(A/B_i) \end{aligned}\right\} \text{ Bayes}$$

Suponha que um indivíduo seja selecionado aleatoriamente da população de todos os homens adultos que vivem no Brasil.

Considere os seguintes eventos:

A = o indivíduo tem mais de 1,80 m de altura

B = o indivíduo é jogador profissional de basquete

Você acha que as probabilidades abaixo são iguais?

$P(A/B)$ e $P(B/A)$

Se acha que não, qual seria maior? Por quê?

Estatística bayesiana

- Atualmente, a análise bayesiana é amplamente utilizada na ciência e na indústria.

- A teoria de Bayes mostra que a probabilidade de que A ocorra se B ocorrer geralmente difere da probabilidade que B ocorra se A ocorrer: $P(A/B) \neq P(B/A)$.

- Não levar em conta esse fato é um erro muito comum em várias áreas, particularmente na medicina e no direito.

- Nos círculos jurídicos americanos, o erro da inversão costuma ser chamado de falácia da acusação, pois frequentemente advogados de acusação usam esse argumento para levar o júri a condenar suspeitos com base em provas frágeis.

Bibliografia

MLODINOW, L. **O andar do bêbado. Como o acaso determina nossas vidas**. Rio de Janeiro: Editora Zahar, 2009, 264p.

NAGHETTINI, M.; PINTO, E. J. de A. **Hidrologia estatística.** Belo Horizonte: CPRM, 2007. 552 p.

SILVEIRA JUNIOR, P. ; MACHADO, A.A. ; ZONTA, E.P.; SILVA, J.B. da. **Curso de Estatística** v.1. Pelotas: Universidade Federal de Pelotas, 1992, 135p.

SINGH, Simon **O Último Teorema de Fermat**. Rio de Janeiro: Editora Record, 1998, 324p.

Sistema Galileu de Educação Estatística. Disponível em: http://www.galileu.esalq.usp.br/topico.html