UNIDADE III - Elementos de probabilidades

3.1. Probabilidade no espaço básico
   3.1.1. Introdução
   3.1.2. Conceitos fundamentais
   3.1.3. Conceitos de probabilidade
   3.1.4. Teoremas para o cálculo de probabilidades
   3.1.5. Probabilidade condicional e independência
3.2. Variáveis aleatórias
   3.2.1. Introdução e conceito
   3.2.2. Variáveis aleatórias discretas
   3.2.3. Variáveis aleatórias contínuas
   3.2.4. Variáveis aleatórias discretas bidimensionais
3.3. Distribuições de probabilidade
   3.3.1. Distribuições de probabilidade de variáveis discretas
   3.3.2. Distribuições de probabilidade de variáveis contínuas

Profª. Clause Piana

3.1.1 Introdução

- Probabilidade e Estatística
- História da probabilidade
- Modelos matemáticos

ESTATÍSTICA - Divisão

ESTATÍSTICA DESCRITIVA

INFERÊNCIA ESTATÍSTICA

PROBABILIDADE

AMOSTRAGEM

Trata do resumo e da apresentação de dados

Fornece métodos para o estudo de populações por meio de amostras

De 3000 a.C. até o século XIX
Estatística Descritiva

↓

Organização, resumo e apresentação de dados

A partir do século XIX
Desenvolvimento da teoria das probabilidades

↓

Estruturação orgânica da Estatística

↓

Criação de técnicas de amostragem

↓

Inferência Estatística

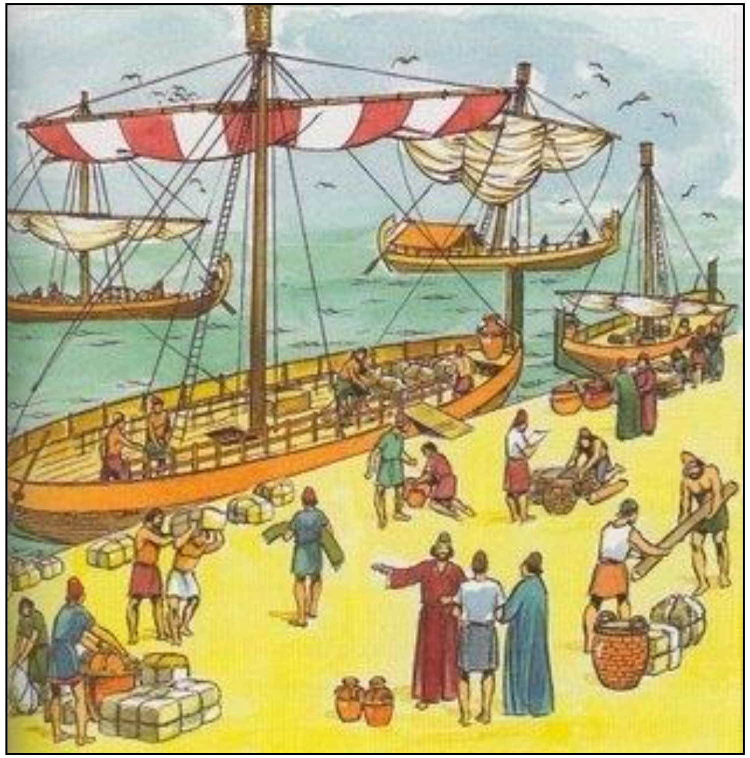
Um pouco de história...

- A noção de probabilidade tem a sua origem mais remota relacionada não só à prática de jogos ditos "de azar" mas também, antes disso, à instituição do seguro que foi usado já pelas civilizações mais antigas, a fim de protegerem sua atividade comercial.
- Vinte e três séculos antes de Cristo, na Babilônia, quando as caravanas atravessavam o deserto para comercializar camelos em cidades vizinhas, surgiram as primeiras modalidades de seguros.

  Como era comum alguns animais morrerem durante o percurso, todos os cameleiros, cientes do grande risco, firmavam um acordo no qual pagariam para substituir o camelo de quem o perdesse. Além de uma atitude solidária por parte do grupo, já era uma forma primária de seguro.

Um pouco de história...

- No ramo da navegação, também foi adotado o princípio de seguro entre os hebreus e fenícios, cujos barcos navegavam através dos mares Egeu e Mediterrâneo. Existia entre os navegadores um acordo que garantia a quem perdesse um navio, a construção de outro, pago pelos demais participantes da mesma viagem.



O **cálculo das probabilidades** parece ter nascido, enquanto tal, na Idade Média, com as primeiras tentativas de matematização dos jogos de azar, muito difundidos na época. É sabido que desde sempre os jogos foram praticados como apostas mas também para prever o futuro, decidir conflitos, dividir heranças, etc.

Devem-se aos algebristas italianos **Pacioli**, **Cardano** e **Tartaglia** (séc. XVI) as primeiras considerações matemáticas acerca dos jogos e das apostas. Eles limitam-se, no entanto, a resolver alguns problemas concretos mas ainda sem demonstração de teoremas, embora façam já comparação de frequência de ocorrências e estimativas de ganhos.

Luca **Pacioli**
(1445 -1517)

Girolamo **Cardano**
(1501-1576)

Nicollo **Tartalgia**
(1499-1557)

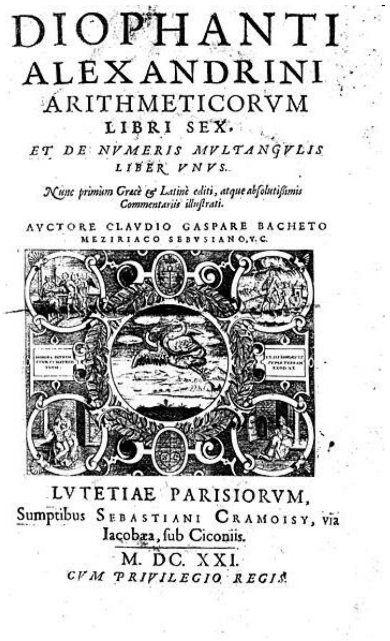
➪ Mas a contribuição decisiva para o início da Teoria das Probabilidades foi dado pela correspondência trocada entre os matemáticos franceses **Blaise Pascal** e seu amigo **Pierre de Fermat**, em que ambos, por diferentes caminhos, chegam à solução correta do célebre ***Problema da divisão das apostas***, em 1654.

Este problema teria sido posto a Pascal pelo cavaleiro De Méré (considerado por alguns autores jogador inveterado e por outros, filósofo e homem de letras) quando viajava em sua companhia. Sem que Pascal e Fermat o soubessem, este problema era basicamente o mesmo que, um século antes, havia interessado também Pacioli, Tartaglia e Cardano.

Blaise Pascal
(1623 – 1662)

Pierre de Fermat
(1601 - 1665)

A importância de Fermat para a matemática...



DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX.
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
Nunc primùm Græcè & Latinè editi, atque absolutissimis
Commentariis illustrati.
AVCTORE CLAVDIO GASPARE BACHETO
MEZIRIACO SEBVSIANO, V.C.
LVTETIAE PARISIORVM,
Sumptibus SEBASTIANI CRAMOISY, via
Iacobæa, sub Ciconiis.
M. DC. XXI.
CVM PRIVILEGIO REGIS.

O que mais interessava a Fermat, na verdade, era um ramo da Matemática chamado teoria dos números, que tem poucas aplicações práticas claras.

É da teoria dos números seu famoso teorema, conhecido como Último Teorema de Fermat.

O teorema foi escrito nas margens do livro Aritmética de Diofante, seguido de uma frase:

“Eu tenho uma demonstração realmente maravilhosa para esta proposição, mas esta margem é muito estreita para contê-la”.

Era um costume de Fermat escrever nas margens dos livros e foi graças ao seu filho mais velho que suas anotações não se perderam para sempre.

Depois de passar cinco anos recolhendo cartas e anotações de seu pai, Clément-Samuel publica em 1670 a Aritmética de Diofante contendo observações de Pierre de Fermat, cuja página 61 continha o teorema.

Teorema de Pitágoras: num triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos

$$x^2 + y^2 = z^2$$

O Último Teorema de Fermat

$$x^3 + y^3 \neq z^3$$

$$x^4 + y^4 \neq z^4$$

$$\cdots$$

$$x^n + y^n \neq z^n$$

Não existe solução em números inteiros para a equação

$$x^n + y^n = z^n, \ \text{para } n>2$$

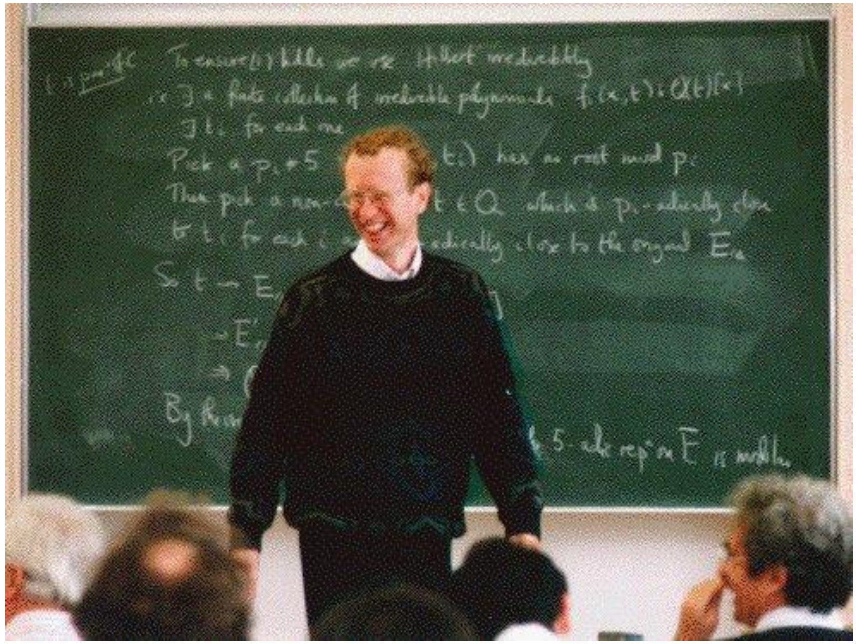
Há quem duvide que Fermat tenha dito a verdade, já que não se sabe ao certo se ele de fato conhecia alguma demonstração ou equivocou-se ao apenas acreditar que poderia demonstrar.

Por mais de três séculos, praticamente todos os grandes expoentes da Matemática debruçaram-se sobre o assunto.

Com o advento dos computadores foram testados milhões de algarismos com diferentes valores para x, y, z e n e a igualdade $x^n + y^n = z^n$ não se verificou.

Assim, empiricamente se comprova que Fermat tinha razão. Mas e a demonstração?

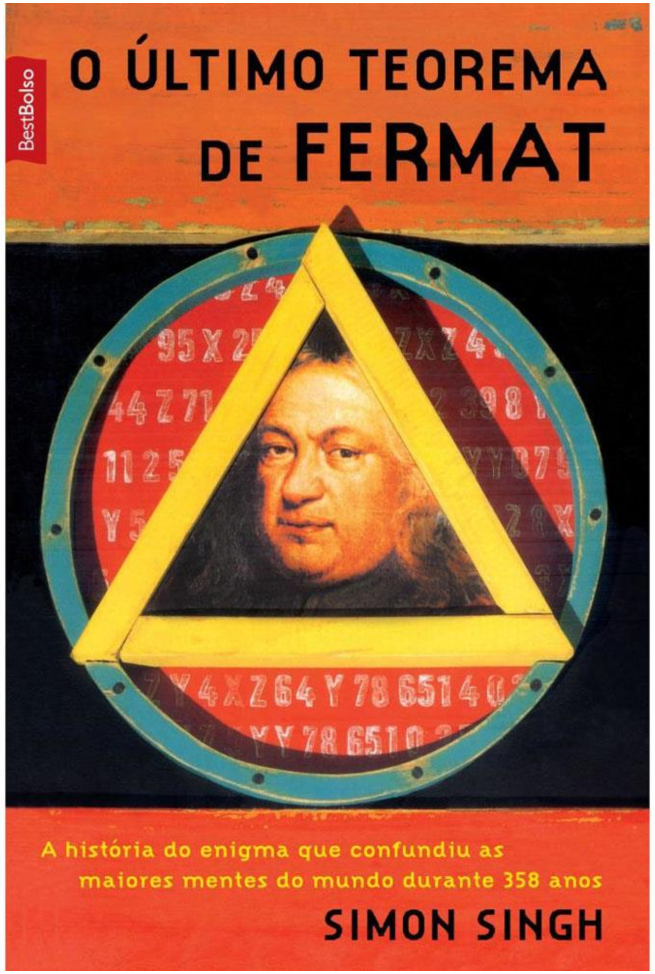
O teorema desafiou matemáticos por todo o mundo durante 358 anos, até que **Andrew Wiles**, um matemático inglês, conseguiu demonstrá-lo em 1995.

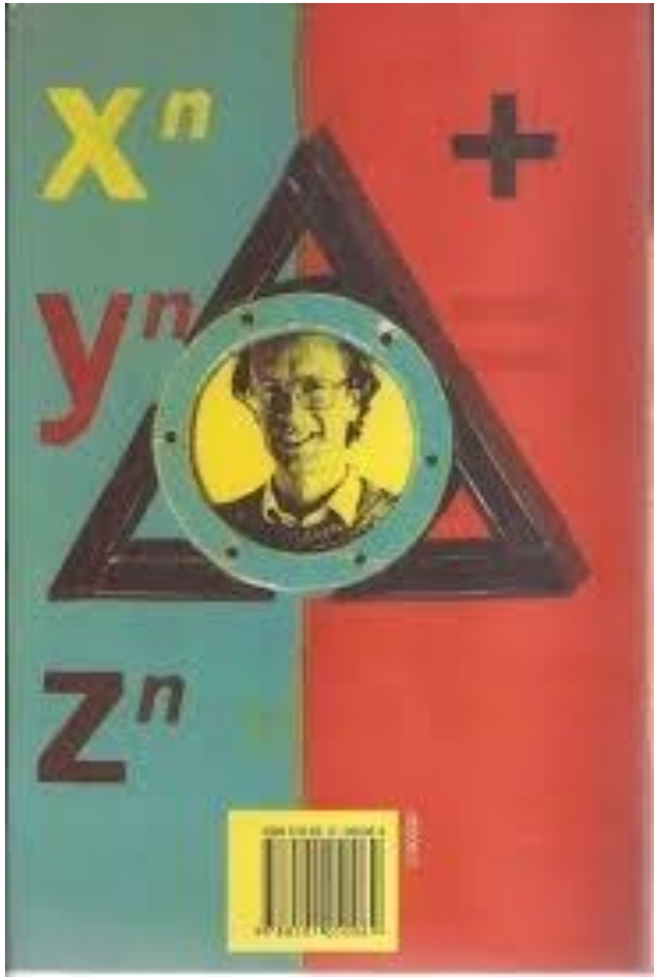


Wiles utilizou conceitos avançadíssimos, com os quais Fermat nem poderia ter imaginado; desta forma, se Fermat realmente conhecia alguma demonstração, certamente esta seria diferente (e mais simples) que a de Wiles.

Assim, chegou ao fim uma história épica na busca do Santo Graal da Matemática.

As histórias de Pierre de Fermat e de Andrew Wiles
são contadas em livro e em documentário da BBC.





SINGH, Simon **O Último Teorema de Fermat**.
Rio de Janeiro: Editora Record, 1998, 324p.

Profª. Clause Piana

⇨ O avanço das probabilidades (início séc. XIX) → estudos do francês Laplace e do alemão Gauss

Ambos matemáticos e astrônomos, em trabalhos individuais, chegaram ao mesmo resultado: a distribuição normal

Distribuições de probabilidades

⬇

espinha dorsal da teoria estatística

⬇

processos de inferência

⬇

aplicações de distribuições de probabilidades

Pierre-Simon Laplace (1749 - 1827)

Carl Friedrich Gauss (1777 -1855)

Matemática

Criação de modelos

Representações da realidade em estudo

Simplificar, descrever, facilitar a interpretação

Modelos Probabilísticos

Modelos Determinísticos

Modelo determinístico: é aquele em que ao conhecermos as variáveis de entrada ($x_1, x_2, \ldots, x_k$) é possível determinar o resultado (y), usando uma função

$$y = f(x_1, x_2, \ldots x_k)$$

⇨ Em **fenômenos determinísticos** existe a **certeza** do resultado que ocorrerá

⇨ **Física clássica** → fenômenos determinísticos

Exemplo 1: O deslocamento de um objeto é definido pela expressão

$$s = vt$$

, onde: s: **deslocamento**
t: **tempo**
v: **velocidade**

Exemplo 2: Lei de Ohm

$$y = \frac{x_1}{x_2}$$

, onde: y: **fluxo da corrente elétrica**
x_1: **tensão**
x_2: **resistência**

Modelo aleatório, probabilístico ou estocástico: é aquele em que, mesmo conhecendo as variáveis de entrada, não é possível determinar o seu resultado.

- ⇨ Existe um **componente aleatório** e só é possível determinar a **chance** de ocorrência de um resultado.

- ⇨ **Biologia** $\rightarrow$ fenômenos probabilísticos

Exemplo 1: nascimento de um bovino.

Não é possível conhecer o sexo do animal antes do nascimento. Só é possível determinar a probabilidade associada a cada sexo: 0,5 para fêmea e 0,5 para macho.

Exemplo 2: descrição do número de pessoas que chegam numa fila por segundo.

Admitindo que a taxa média de chegada por segundo é λ, a probabilidade de chegar exatamente X pessoas é dada por

$$p(x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$$

, onde: X: **número de pessoas**

e: **2,718**

3.1.2 Conceitos fundamentais

- Experimento aleatório
- Espaço amostral
- Evento ou ocorrência
- Ponto amostral
- Álgebra de eventos
- Eventos especiais
- Análise combinatória

Conceitos fundamentais

Experimento aleatório (ou probabilístico): é aquele cujo resultado pode não ser o mesmo, ainda que seja repetido sob condições idênticas.

Principais características:

- o experimento pode ser repetido indefinidamente sob condições inalteradas;
- é sempre possível descrever o conjunto de todos os resultados;
- quando o experimento é realizado um grande número de vezes, uma configuração definida ou regularidade surgirá.

Descrição do experimento → **ação** e **observação**

A **modelagem de um experimento aleatório** implica em responder três questões fundamentais:

- ✓ Quais as suas possíveis formas de ocorrência?
- ✓ Quais são as chances de cada ocorrência?
- ✓ De que forma se pode calcular essas chances?

Exemplos de experimentos aleatórios:

E_1: **Ação:** jogar um dado de seis faces
observação: face voltada para cima

E_2: **Ação:** selecionar uma carta do baralho
observação: valor e naipe da carta

E_3: **Ação:** lançar uma moeda até que apareça cara
observação: número de lançamentos

E_4: **Ação:** acender uma lâmpada
observação: tempo decorrido até que ela se apague

E_5: **Ação:** lançar uma moeda e um dado simultaneamente
observação: valor da face do dado e da face da moeda voltados para cima

Espaço amostral (S)

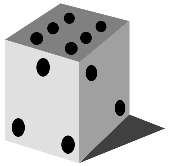
É o conjunto de **todos os possíveis resultados** de um experimento aleatório.

⇨ É o **conjunto universo** relativo aos resultados de um experimento.

A cada experimento aleatório está associado um conjunto de resultados possíveis ou espaço amostral.

Exemplos de espaços amostrais:

E_1: Jogar um dado e observar a face voltada para cima.



S_1={1, 2, 3, 4, 5, 6} ← enumerável e finito

E_2: Selecionar uma carta do baralho e observar o seu valor e naipe.

S_2={ás de ouro,..., rei de ouro, ás de paus,..., rei de paus,..., ás de espada,..., rei de espada, ás de copas,..., rei de copas} ← enumerável e finito

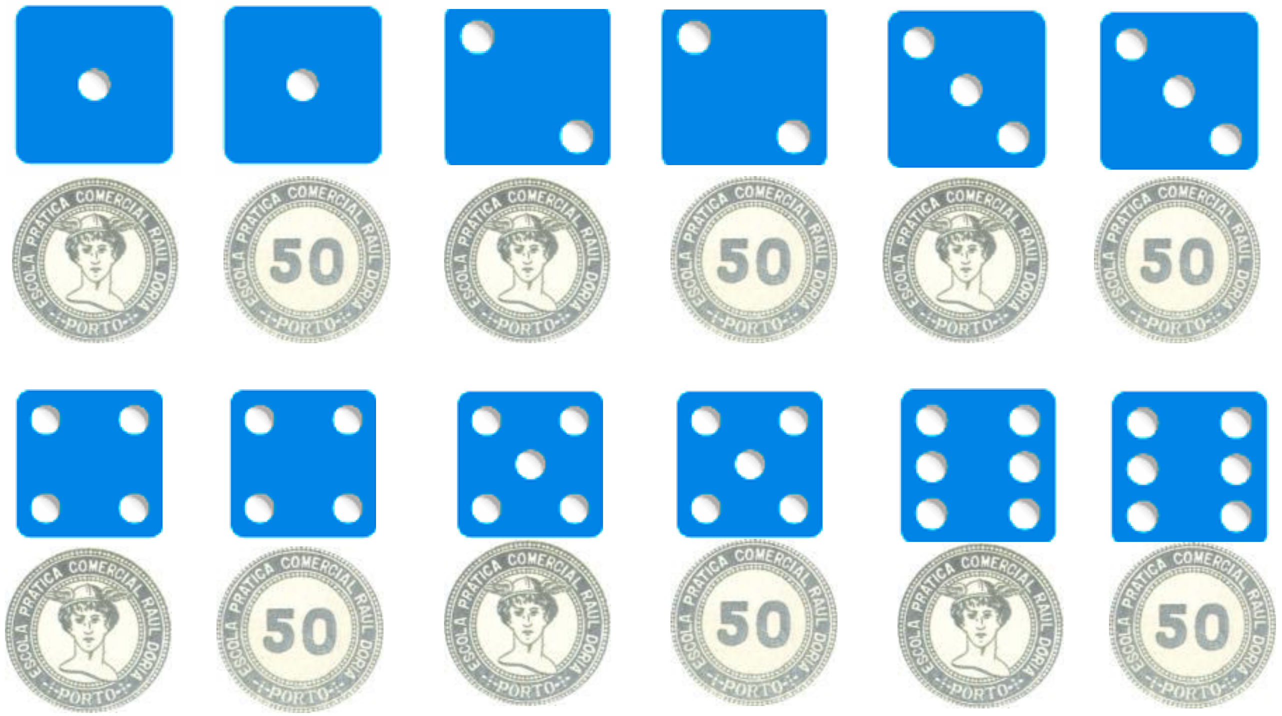
E_3: Lançar uma moeda até que apareça cara e observar o número de lançamentos.

$S_3=\{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$ ← enumerável e infinito

E_4: Acender uma lâmpada e observar o tempo decorrido até que ela se apague.

$S_4=\{t;\ t \geq 0\}$ ← contínuo e infinito

E_5: Lançar uma moeda e um dado e observar o valor da face do dado e a face da moeda voltados para cima.



c=cara
k=coroa

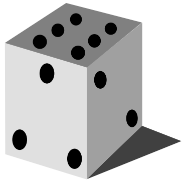
S_5={1c, 1k, 2c, 2k, 3c, 3k, 4c, 4k, 5c, 5k, 6c, 6k} ← enumerável e finito

Evento ou ocorrência: é todo conjunto particular de resultados de **S** ou ainda todo subconjunto de **S**.

⇨ É designado por uma letra maiúscula (A, B, C).

⇨ A todo evento será possível associar uma probabilidade.

Exemplo: Lançamento de um dado



Conjunto universal → S={1, 2, 3, 4, 5, 6} ← **Espaço amostral**

Subconjuntos

- A = {1, 2, 3}
- B = Ocorrência de faces pares
- C = {5}

Eventos

Ponto amostral: é qualquer resultado particular de um experimento aleatório

⇨ Todo espaço amostral e todo evento são constituídos por pontos amostrais.

Exemplo:

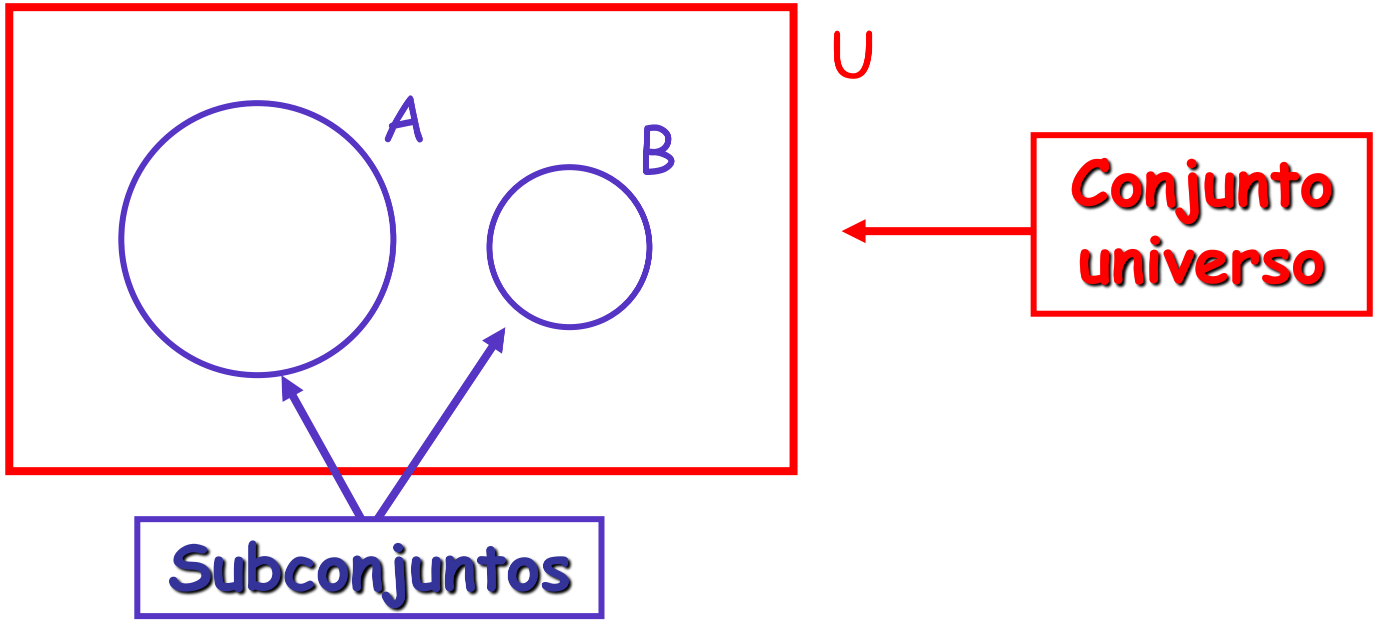
S={1,2,3,4,5,6} ← **seis pontos amostrais**

A = {1,3,5} ← **três pontos amostrais**

B = {5,6} ← **dois pontos amostrais**

Representação geométrica de conjuntos

Diagrama de Venn

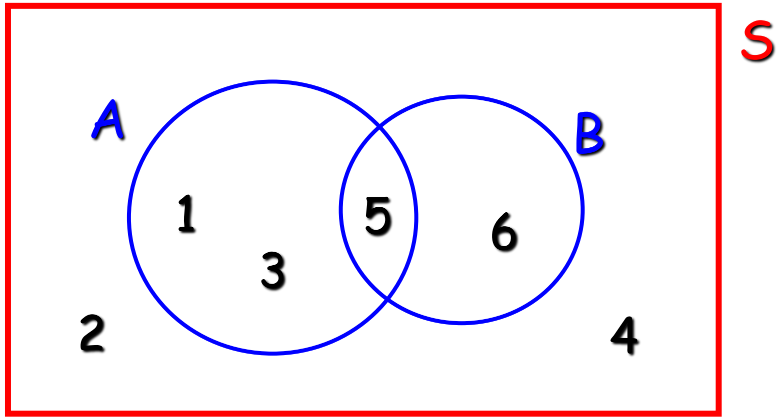


O **diagrama de Venn** é útil para dar intuição geométrica sobre a relação entre conjuntos.

Álgebra de Eventos

Como o espaço amostral S e os eventos são conjuntos, as mesmas operações realizadas com conjuntos são válidas para os eventos.

Exemplo: **A** e **B** são eventos de **S**

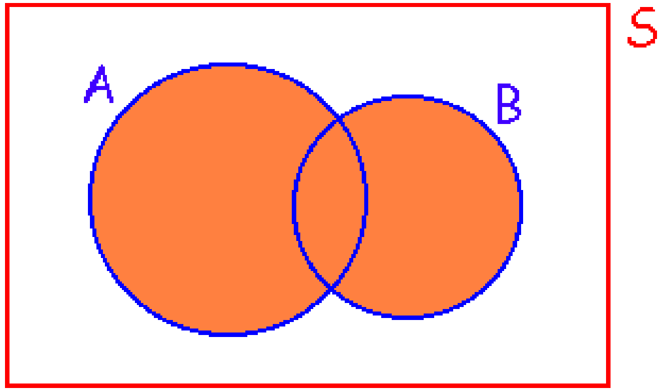


S={1,2,3,4,5,6}

A={1,3,5}

B={5,6}

⇨ **União:** Ocorre $A \cup B$, se ocorrer **A ou B** (ou ambos).



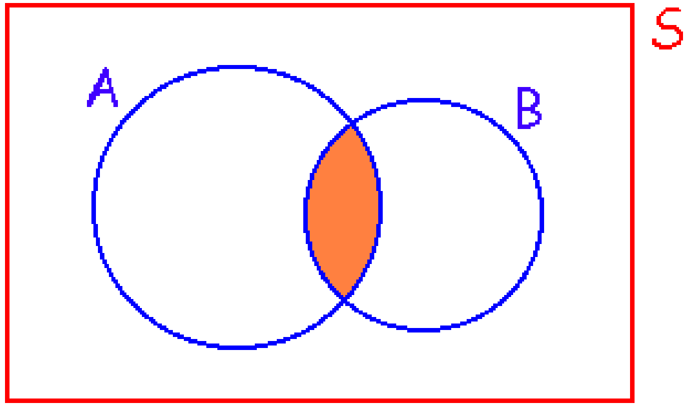
$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A = \{\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{5}\}$

$B = \{\mathbf{5}, \mathbf{6}\}$

$A \cup B = \{1, 3, 5, 6\}$

⇨ **Intersecção:** Ocorre $A \cap B$, se ocorrer **A e B**.



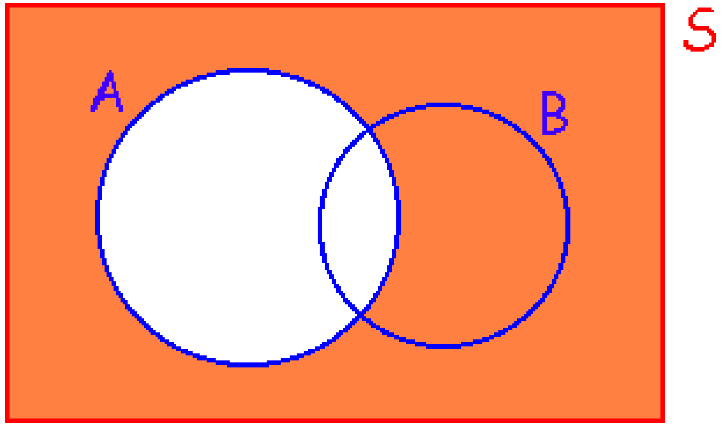
$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A = \{1, 3, \mathbf{5}\}$

$B = \{\mathbf{5}, 6\}$

$A \cap B = \{5\}$

⇨ **Complemento:** Ocorre $\bar{A}$, se ocorrer **S**, mas **não** ocorrer **A**.

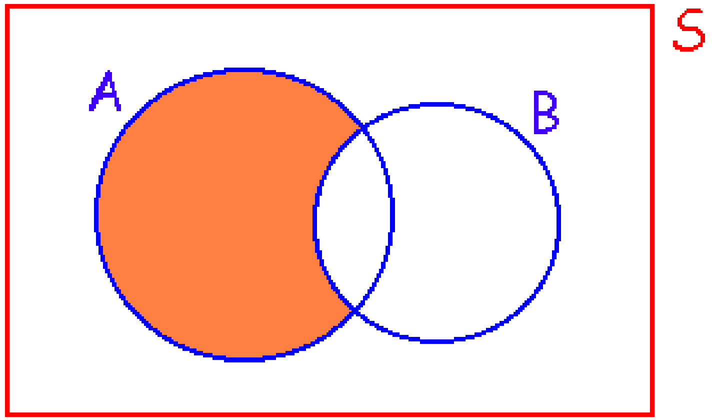


$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A = \{1, 3, 5\}$

$\bar{A} = \{2, 4, 6\}$

⇨ **Diferença:** Ocorre **A-B**, se ocorrer **A**, mas **não** ocorrer **B**.



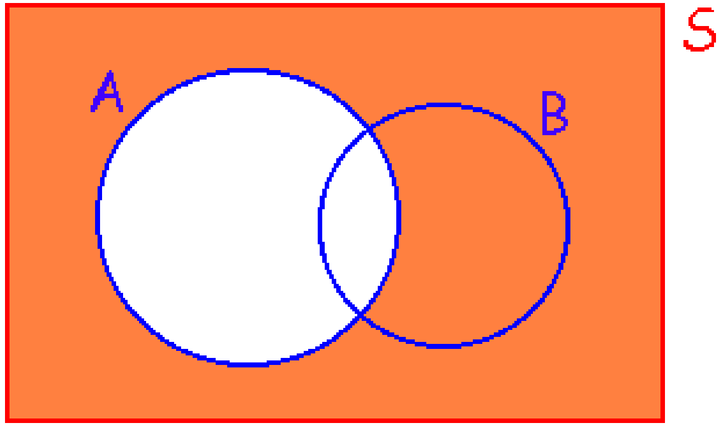
$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A = \{1, 3, 5\}$

$B = \{5, 6\}$

$A - B = \{1, 3\}$

⇨ **Complemento:** Ocorre $\bar{A}$, se ocorrer **S**, mas **não** ocorrer **A**.

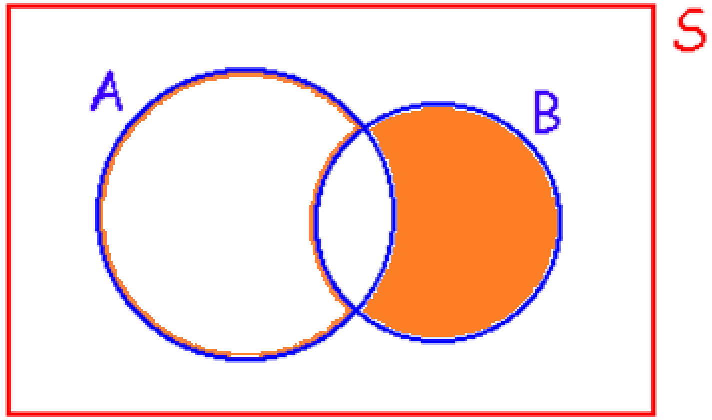


$S = \{1, \mathbf{2}, 3, \mathbf{4}, 5, \mathbf{6}\}$

$A = \{1, 3, 5\}$

$\bar{A} = \{2,4,6\}$

⇨ **Diferença:** Ocorre **A-B**, se ocorrer **A**, mas **não** ocorrer **B**.



$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A = \{\mathbf{1}, \mathbf{3}, 5\}$

$B = \{5, 6\}$

$A-B=\{1,3\}$ $B-A=\{6\}$

Eventos Especiais

Evento Impossível: é aquele evento que nunca irá ocorrer, é também conhecido como o conjunto vazio ($\varnothing$).

⇨ É um evento porque é subconjunto de qualquer conjunto, portanto, é subconjunto de S ($\varnothing \subset S$).

Exemplo: $A = \{(x, y);\ x^2 + y^2 < 0\}$

Evento Certo: é aquele evento que ocorre toda vez que se realiza o experimento, portanto, esse evento é o próprio S.

⇨ É um evento porque todo conjunto é subconjunto de si mesmo ($S \subset S$).

Exemplo: $B = \{(x, y);\ x^2 + y^2 \geq 0\}$

Para $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, temos k eventos possíveis:

Evento impossível

$A_1 = \{\ \} = \varnothing$	$A_8 = \{1, 1\}$	$A_{15} = \{2, 6\}$	$A_{22} = \{1, 2, 3\}$
$A_2 = \{1\}$	$A_9 = \{1, 2\}$	$A_{16} = \{3, 4\}$	$A_{23} = \{1, 2, 4\}$
$A_3 = \{2\}$	$A_{10} = \{1, 3\}$	$A_{17} = \{3, 5\}$	$A_{24} = \{1, 2, 5\}$
$A_4 = \{3\}$	$A_{11} = \{1, 4\}$	$A_{18} = \{3, 6\}$	$A_{25} = \{1, 2, 6\}$
$A_5 = \{4\}$	$A_{12} = \{1, 5\}$	$A_{19} = \{4, 5\}$	...
$A_6 = \{5\}$	$A_{13} = \{1, 6\}$	$A_{20} = \{4, 6\}$	$A_{63} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$A_7 = \{6\}$	$A_{14} = \{2, 5\}$	$A_{21} = \{5, 6\}$	$A_{64} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Evento certo

Conjunto das partes de S:

$$\mathcal{P}(S)=\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, ..., \{1, 2, 3, 4, 5\}, S\}$$

Eventos mutuamente exclusivos:

Dois eventos A e B associados a um mesmo espaço amostral S, são mutuamente exclusivos quando a ocorrência de um **impede** a ocorrência do outro.

⇨ Na teoria dos conjuntos, correspondem aos conjuntos **disjuntos**, que não possuem elementos comuns ($A \cap B = \emptyset$).

Exemplos:

Exp.1. Lançamento de uma moeda e observação do resultado

$S=\{c,k\}$

A = Ocorrência de cara $A = \{c\}$

B = Ocorrência de coroa $B = \{k\}$

A e B são mutuamente exclusivos

Exp.2. Lançamento de um dado e observação da face voltada para cima

$$S=\{1,2,3,4,5,6\}$$

$A = \{1, 3, 5\}$

$B = \{5, 6\}$

$C = \{2, 4, 6\}$

$A \cap B=\{5\}$ $\rightarrow$ A e B não são mutuamente exclusivos

$A \cap C=\varnothing$ $\rightarrow$ A e C são mutuamente exclusivos

$B \cap C=\{6\}$ $\rightarrow$ B e C não são mutuamente exclusivos

Exercício proposto:

1. Em um experimento aleatório que consiste em plantar três sementes e observar a germinação, especifique o espaço amostral **S** e os seguintes eventos:

A: duas sementes germinam

B: pelo menos uma semente germina

C: nenhuma semente germina

Resolução:

1. Em um experimento aleatório que consiste em plantar três sementes e observar a germinação, especifique o espaço amostral S e os seguintes eventos:

A: duas sementes germinam
B: pelo menos uma semente germina
C: nenhuma semente germina

G: semente germina
N: semente não germina

S = {GGG, GGN, GNG, NGG, GNN, NGN, NNG, NNN}

A = {GGN, GNG, NGG}

B = {GGG, GGN, GNG, NGG, GNN, NGN, NNG}

C = {NNN}

$A \cap B$ = {GGN, GNG, NGG} $\rightarrow$ A e B não são mutuamente exclusivos

$A \cap C = \varnothing$ $\rightarrow$ A e C são mutuamente exclusivos

$B \cap C = \varnothing$ $\rightarrow$ B e C são mutuamente exclusivos

Análise combinatória

Técnicas de contagem → determinar o número de elementos de um conjunto ou o número de resultados possíveis de um experimento.

Seja **A** um conjunto com **n** elementos distintos entre si.

$$A = \{ a, b, c, d\}$$

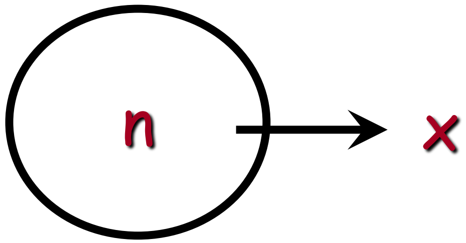
Se são retirados **x** elementos do conjunto **A** é possível formar grupos de três tipos:

- Permutações
- Arranjos
- Combinações

$$\text{ordem} \left\{ \begin{array}{l} (b, c) \ \text{e} \ (c, b) \\ \\ (a, b, c) \ \text{e} \ (a, c, b) \end{array} \right.$$

$$\text{natureza} \left\{ \begin{array}{l} (b, c) \ \text{e} \ (b, d) \\ \\ (a, b, c) \ \text{e} \ (a, b, d) \end{array} \right.$$

Permutações: grupos que se distinguem apenas pela **ordem** dos seus elementos. Todos os grupos têm os mesmos elementos.



n: número de elementos distintos
x: número de elementos retirados

Os grupos serão permutações somente quando **x = n**

Como calcular?

O número de permutações possíveis de **n** elementos é dado por

$$P_n = n! \text{ grupos}$$

Exemplo: A = { a, b, c, d}   n = 4 e x = 4

Quantos permutações de quatro elementos é possível formar?

{(a, b, c, d), (a, b, d, c), (a, c, b, d), (a, c, d, b), ...

$$P_4 = 4! = 24 \text{ grupos}$$

{(a, b, c, d), (a, b, d, c), (a, c, b, d), (a, c, d, b), (a, d, b, c), (a, d, c, b),
(b, a, c, d), (b, a, d, c), (b, c, a, d), (b, c, d, a), (b, d, a, c) (b, d, c, a),
(c, a, b, d), (c, a, d, b), (c, b, a, d), (c, b, d, a), (c, d, a, b), (c, d, b, a),
(d, a, b, c), (d, a, c, b), (d, b, a, c), (d, b, c, a), (d, b, a, c)}

Arranjos: grupos que se distinguem pela **ordem** e pela **natureza** dos seus elementos.

Condição: $x<n$

Como calcular?

Se $x<n$, o número de arranjos de n, tomados x a x, é dado por

$$A_n^x = \frac{n!}{(n-x)!} \quad \text{grupos}$$

$$A_n^x = \frac{n!}{(n-x)!} \text{ grupos}$$

Exemplo: $A = \{ a, b, c, d \}$ $n = 4$ e $x = 2$

Quantos arranjos de dois elementos é possível formar?

{(a, b) , (b, a) , (a, c) , (c, a), ...

$$A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!} = 12 \text{ grupos}$$

{(a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (a, d), (d, a), (b, c), (c, b), (b, d), (d, b), (c, d), (d, c)}

Combinações: grupos que se distinguem apenas pela **natureza** dos seus elementos.

Condição: **$x<n$**

Como calcular?

Se $x<n$, o número de combinações de n, tomados x a x, é dado por

$$C_n^x = \frac{n!}{x!(n-x)!} \text{ grupos}$$

$$C_n^x = \frac{n!}{x!(n-x)!} \text{ grupos}$$

Exemplo: **A = { a, b, c, d}** **n = 4 e x = 2**

Quantas combinações de dois elementos é possível formar?

{(a, b) , (a, c) , (a, d), ...

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!\ 2!} = 6 \text{ grupos}$$

{(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (c, d)}

Permutações → ordem → (x = n)

$$P_n = n! \text{ grupos}$$

Arranjos → ordem e natureza → (x < n)

$$A_n^x = \frac{n!}{(n-x)!} \text{ grupos}$$

Combinações → natureza → (x < n)

$$C_n^x = \frac{n!}{x!(n-x)!} \text{ grupos}$$

Relação entre Combinação e Arranjo

$$C_n^x = \frac{1}{x!}\frac{n!}{(n-x)!}$$

$$C_n^x = \frac{1}{x!}A_n^x$$

3.1.3 Conceitos de probabilidade

1. Conceito clássico ou probabilidade "a priori"

2. Frequência relativa ou probabilidade "a posteriori"

3. Conceito axiomático

4. Probabilidade geométrica ou calculada como área

Conceitos de probabilidade

Jogos de azar

Teoria das probabilidades

Conceito clássico ou probabilidade "a priori"

Pierre-Simon Laplace (1749-1827)

1812 → **Teoria Analítica das Probabilidades**

→ sistematizou os conhecimentos da época

1. Conceito clássico ou probabilidade "a priori"

Definição: Seja **E** um experimento aleatório e **S** o espaço amostral a ele associado, com **n pontos amostrais**, todos equiprováveis.

Se existe, em **S**, **m pontos favoráveis** à realização de um evento **A**, então a probabilidade de **A**, indicada por **P(A)**, será:

$$P(A)=\underbrace{\overset{\text{pontos favoráveis}}{\frac{m}{n}}}_{\text{pontos possíveis}}=\frac{\#A}{\#S}\quad\begin{array}{l}\leftarrow \text{número de elementos de } A\\ \leftarrow \text{número de elementos de } S\end{array}$$

Pressuposições básicas:

1. O espaço amostral S é **enumerável** e **finito**.
2. Os resultados do espaço amostral S são todos **equiprováveis**.

Exemplo:

Exp.: Lançar uma moeda **não viciada** duas vezes e observar a face voltada para cima em cada lançamento.

S = {cc, ck, kc, kk}

p(cc) = p(kc) = p(ck) = p(kk)

A = ocorrência de uma cara

A = {ck,kc}

$S=\{cc, ck, kc, kk\}$ #S = número de elementos de S = 4

$A=\{ck, kc\}$ #A = número de elementos de A = 2

n = número de pontos possíveis = **#S=4**

m = número de pontos favoráveis à ocorrência de A = **#A=2**

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\#A}{\#S} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

A probabilidade de ocorrer uma cara em dois lançamentos de uma moeda não viciada é $\frac{1}{2}$.

Outra situação:

O espaço amostral se refere ao **número de caras** que pode ocorrer em dois lançamentos de uma moeda não viciada.

$S=\{0,1,2\}$ $\#S=3$

$A=\{1\}$ $\#A=1$

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{\#A}{\#S}=\cancel{\frac{1}{3}}$$

Não é possível usar o conceito clássico para calcular a probabilidade de A

As pressuposições foram atendidas?

$S=\{0,1,2\}$

$$p(0) = p(kk) = \frac{1}{4}$$

$$p(1) = p(kc) + p(ck) = \frac{1}{2}$$

$$p(2) = p(cc) = \frac{1}{4}$$

Espaço amostral não equiprovável

⇨ Para usar o **conceito clássico** no cálculo das probabilidades, é recomendável partir sempre do **espaço amostral básico** (mais detalhado) do experimento que, geralmente, é não numérico.

Espaço amostral básico

S = {cc, ck, kc, kk} ← enumerável, mas não numérico

Espaço amostral numérico

S = {0, 1, 2}

Exercício proposto:

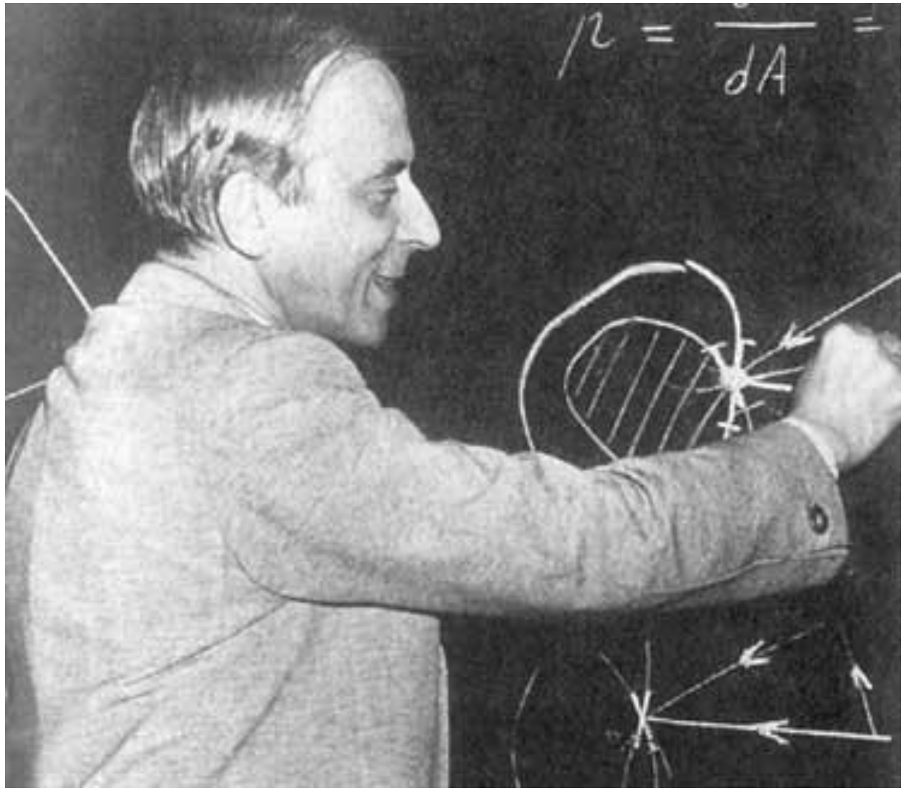
Dez estudantes de um colégio são selecionados para formar a equipe de basquete para a competição.

a) de quantas maneiras diferentes pode ser escolhida a equipe para entrar no primeiro jogo?
b) quantas dessas combinações incluem um estudante cujo nome é Afonso?
c) se a escolha é feita por sorteio, qual é a probabilidade de Afonso fazer parte da equipe neste primeiro jogo?

2. Frequência relativa ou probabilidade “a posteriori”

O conceito de freqüência relativa como estimativa de probabilidade surgiu através do físico austríaco Richard Von Mises

Richard Von Mises
(1883-1953)



2. Frequência relativa ou probabilidade "a posteriori"

Definição: Seja **E** um experimento aleatório e **A** um evento.

Se após **n repetições** do experimento **E** (sendo n suficientemente grande), forem observados **m resultados favoráveis** ao evento **A**, então uma **estimativa** da probabilidade **P(A)** é dada pela frequência relativa

$$f = \frac{m}{n} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{ocorrências de } A \\ \leftarrow \text{repetições de } E \end{array}$$

⇨ O conceito de probabilidade "a posteriori" é baseado no princípio estatístico da estabilidade (Lei dos grandes números):

"À medida que o número de repetições do experimento (n) aumenta, a freqüência relativa *f* se aproxima de P(A)."

⇨ **n** deve ser suficientemente grande para que se possa obter um resultado com margem de erro razoável.

Define-se o erro desta estimativa pela expressão:

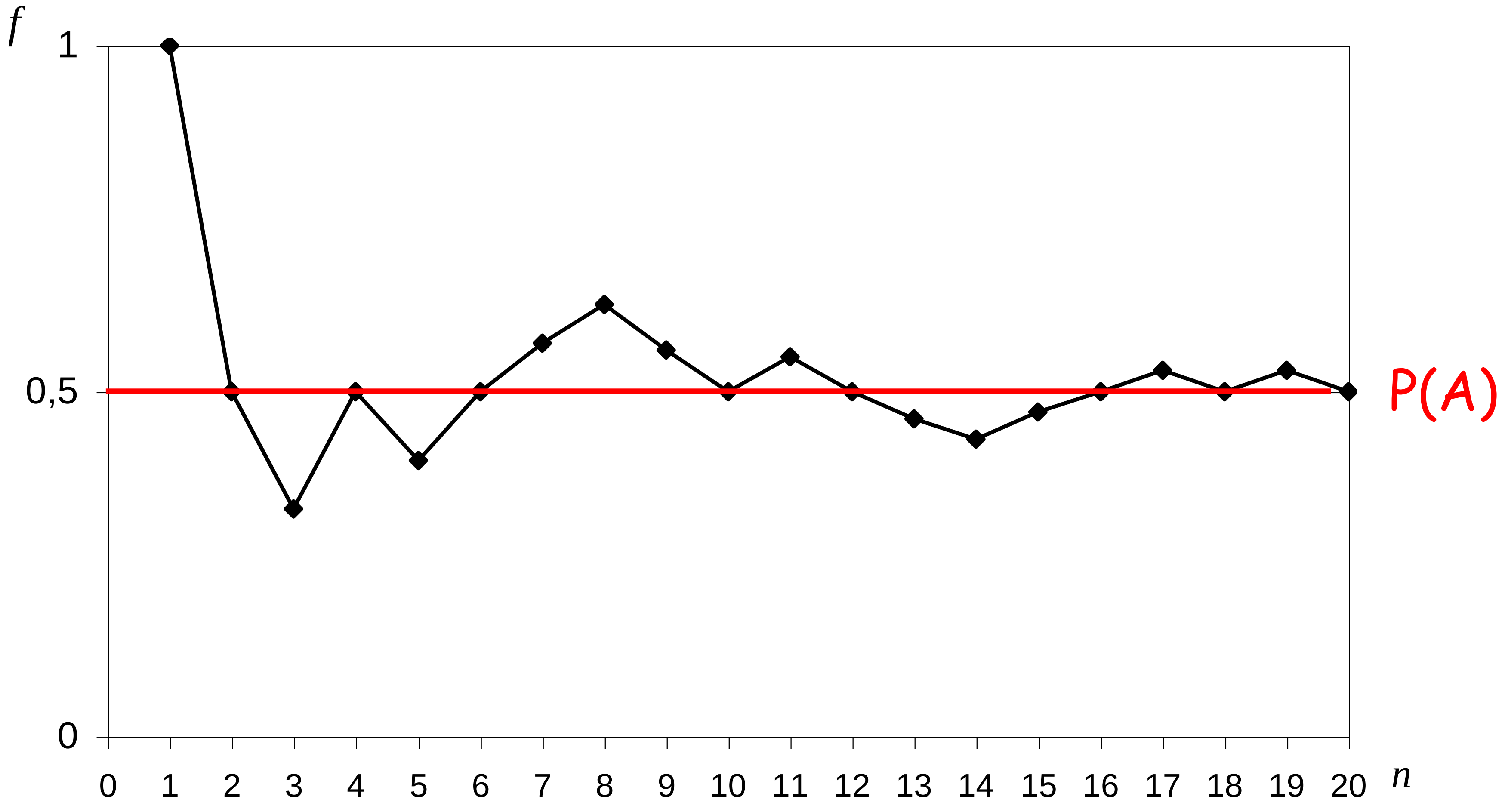
$$f - P(A) = \text{erro}$$

Exemplo: Lançamento de uma moeda honesta.

A = ocorrência de cara

$P(A) = 0{,}5$

Repetições do exper.	Resultado	Ocorrências de A	Freqüência relativa f
1	c	1	1
2	k	1	1/2
3	k	1	1/3
4	c	2	2/4
5	k	2	2/5
6	c	3	3/6
7	c	4	4/7
8	c	5	5/8
...	...	...	...
n	-	m	m/n



Estabilização da frequência relativa *f* quando n cresce.

Profª. Clause Piana

Exercícios propostos:

1. Em Sobral (CE), observaram-se seis anos de seca no período de 1901-66 (66 anos). Qual é a probabilidade de ser seco o próximo ano?

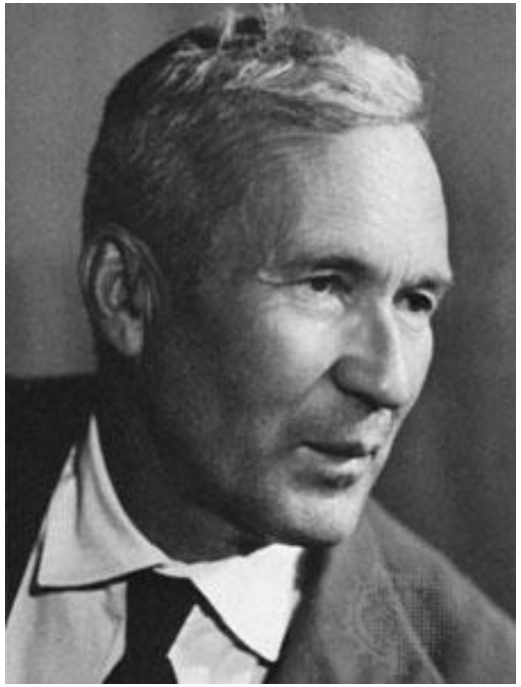
2. Em 660 lançamentos de uma moeda, foram observadas 310 caras. Qual é a probabilidade de, num lançamento dessa moeda, obter-se coroa?

3. Se os registros indicam que 504, dentre 813 lavadoras automáticas de pratos vendidas por uma grande loja de varejo, exigiram reparos dentro da garantia de um ano, qual é a probabilidade de uma lavadora dessa loja não exigir reparo dentro da garantia?

3. Conceito moderno ou axiomático

No século XX, Andrei Kolmogorov conceituou probabilidade através de **axiomas** rigorosos, tendo por base a teoria da medida.

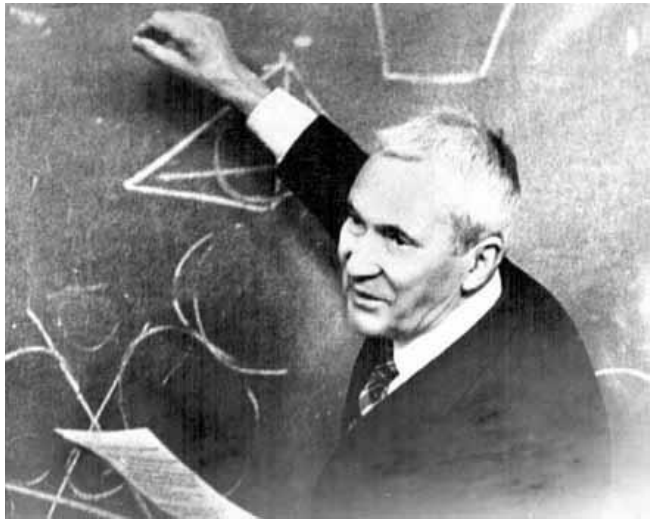
O problema da teoria da medida se divide basicamente em duas partes:



Andrei N. Kolmogorov
(1903–1987)

- Definir uma **medida** que associe a cada **conjunto** em um dado espaço um valor significativo do seu tamanho.

- Definir uma **teoria de integração** para as funções que assumem valores neste espaço.



3. Conceito moderno ou axiomático

Definição: Se **A** é um evento do espaço amostral **S**, então o número real **P(A)** será denominado probabilidade da ocorrência de **A**, se satisfizer os seguintes axiomas:

Axioma 1. $0 \leq P(A) \leq 1$

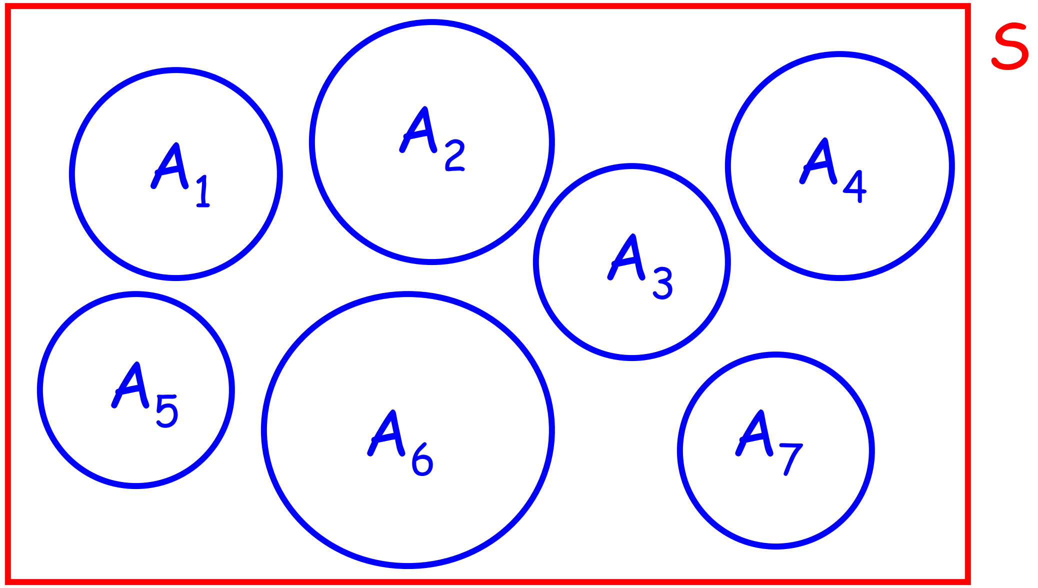
Axioma 2. $P(S)=1$

Axioma 3. Se **A** e **B** são eventos de **S** mutuamente exclusivos, então, $P(A \cup B) = P(A)+P(B)$

A e **B** são **mutuamente exclusivos** se e somente se $A \cap B = \varnothing$

⇨ O terceiro axioma pode ser generalizado para um número finito de eventos mutuamente exclusivos

Exemplo:



$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7) = P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_7) = \sum_{i=1}^{7} P(A_i)$$

Generalizando: $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

⇨ O conceito axiomático não fornece formas e sim **condições** para o cálculo das probabilidades.

Os conceitos "a priori" e "a posteriori" se enquadram no conceito axiomático.

Exemplos:

1. Lançamento de um dado honesto e observação da face voltada para cima

S={1,2,3,4,5,6}

A={2}

B={1,3,5}

A∪B={1,2,3,5}

Primeiro axioma

$$P(A) = \frac{\#A}{\#S} = \frac{1}{6}$$

$$P(B) = \frac{\#B}{\#S} = \frac{3}{6}$$

$$P(A \cup B) = \frac{\#A \cup B}{\#S} = 4/6$$

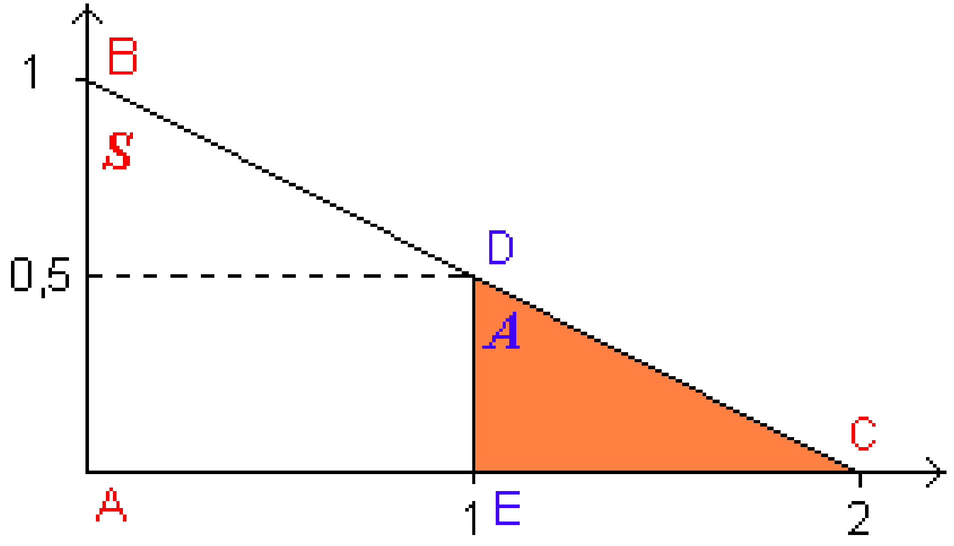
Terceiro axioma

P(A∪B)=P(A)+P(B)

P(A∪B)=1/6 + 3/6

P(A∪B)=4/6

2. Seja o triângulo **ABC** um espaço amostral **S** e o triângulo **CDE** um evento **A**. A probabilidade **P(A)** é obtida da seguinte forma



$$P(A) = \frac{\text{área de } A}{\text{área de } S}$$

$$P(A) = \frac{1/4}{1} = \frac{1}{4}$$

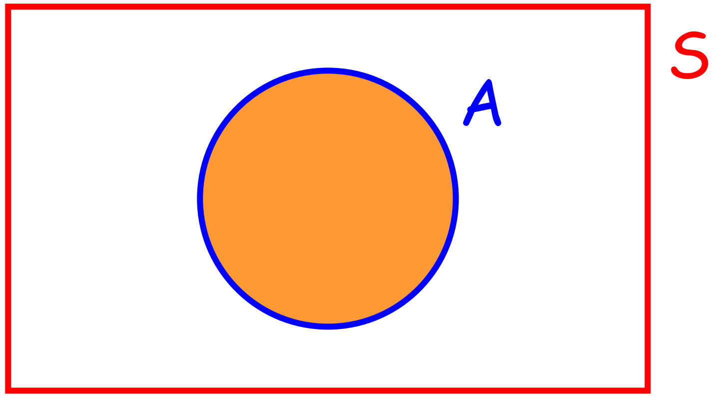
$$\text{área de } S = \frac{b \times h}{2} = \frac{2 \times 1}{2} = 1$$

$$\text{área de } A = \frac{b \times h}{2} = \frac{1 \times 0{,}5}{2} = \frac{1}{4}$$

Profª. Clause Piana

4. Probabilidade geométrica ou calculada como área

Definição: Seja S o espaço amostral associado a um experimento aleatório e A um evento de S. A probabilidade de A, indicada por P(A), será a razão entre a área de A e a área de S.



$$P(A) = \frac{\text{área de } A}{\text{área de } S}$$

3.1.4 Teoremas para o cálculo de probabilidades

1. Probabilidade do evento impossível

2. Probabilidade do complemento

3. Probabilidade da diferença

4. Probabilidade da união

5. Teorema de Morgan

Teorema 1. Se $\varnothing$ é um evento impossível, então $P(\varnothing)=0$.

Demonstração:

Se $A \cup \varnothing = A$, então $P(A \cup \varnothing) = P(A)$

$$P(A) + P(\varnothing) = P(A)$$

$$P(\varnothing) = P(A) - P(A)$$

$$P(\varnothing) = 0$$

$A \cap \varnothing = \varnothing$, então A e $\varnothing$ são **mutuamente exclusivos**

Teorema 2. Se $\bar{A}$ é o complemento de A, então $P(\bar{A})=1-P(A)$.

Demonstração:

Se $A \cup \bar{A} = S$, então $P(A \cup \bar{A}) = P(S)$

$$P(A) + P(\bar{A}) = P(S)$$

$$P(\bar{A}) = P(S) - P(A)$$

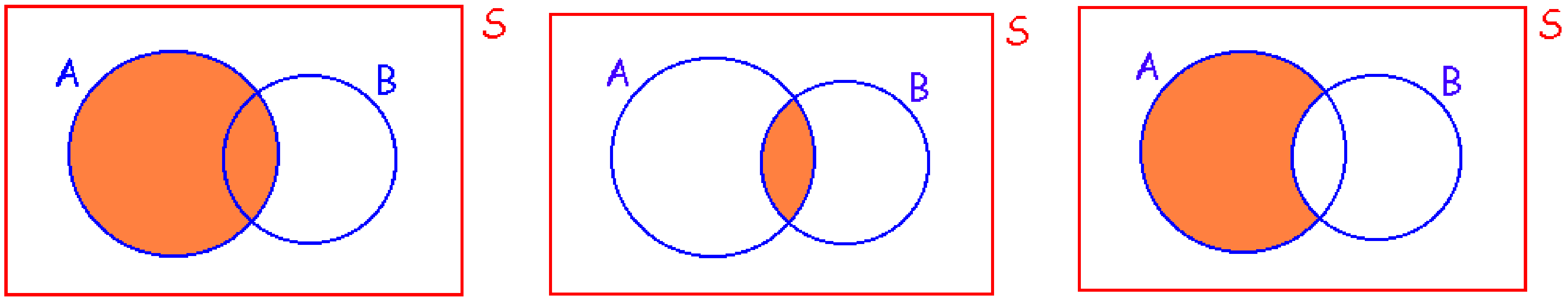
$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$A \cap \bar{A} = \varnothing$, então A e $\bar{A}$ são **mutuamente exclusivos**

Teorema 3. Se A e B são dois eventos quaisquer, então

$$P(A-B) = P(A)-P(A\cap B).$$

Demonstração:

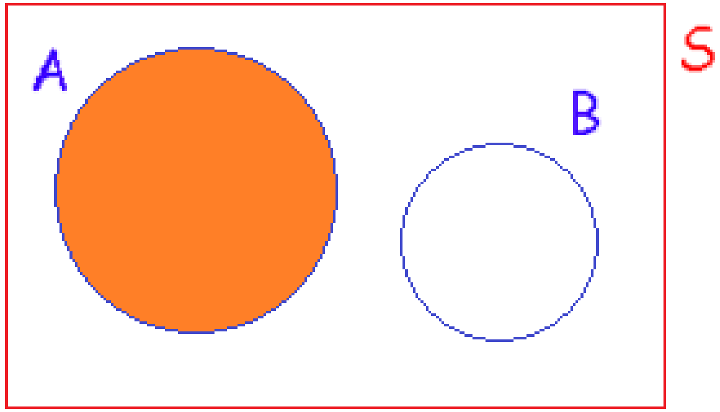


$P(A)$ $\quad - P(A\cap B)$ $\quad = P(A-B)$

Teorema 3. Se A e B são dois eventos quaisquer, então

$$P(A-B) = P(A)-P(A \cap B).$$

Se A e B são dois eventos mutuamente exclusivos



$$A \cap B = \varnothing$$

$$P(A \cap B) = 0$$

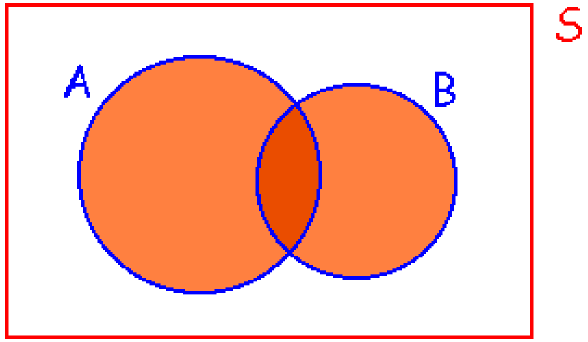
$$P(A-B) = P(A)$$

4. Teorema da Soma das Probabilidades

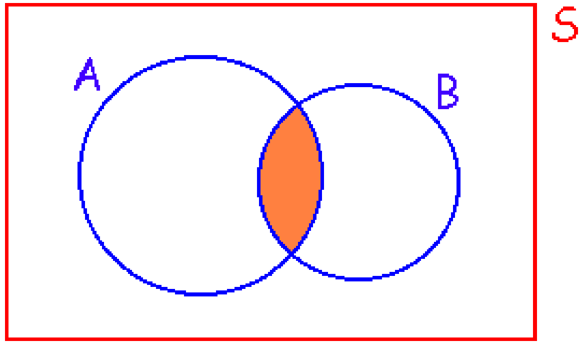
Se A e B são dois eventos quaisquer, então

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

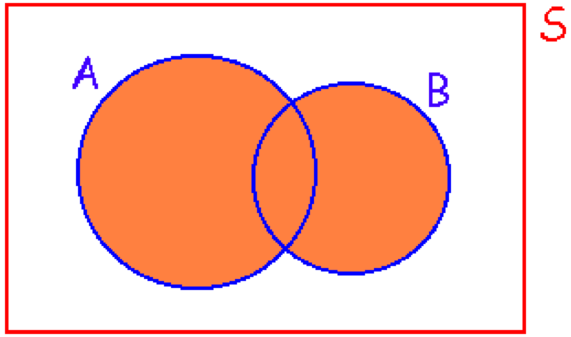
Demonstração:



$P(A)+P(B)$



$- P(A \cap B)$



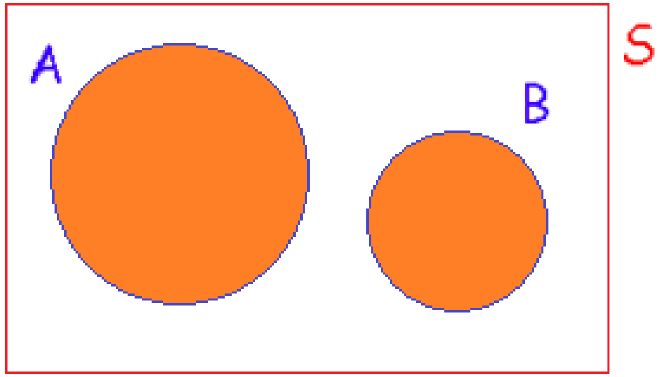
$= P(A \cup B)$

4. Teorema da Soma das Probabilidades

Se A e B são dois eventos quaisquer, então

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Se A e B são dois eventos mutuamente exclusivos



$$A \cap B = \varnothing$$

$$P(A \cap B) = 0$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Teoremas para o cálculo de probabilidades

Teorema 1. $P(\varnothing)=0$

Teorema 2. $P(\bar{A})=1-P(A)$

Teorema 3. $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$

Teorema 4. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

Exercício proposto:

A probabilidade de ocorrer um acidente em uma competição de carros é 0,18; a probabilidade de chover em um dia de competição é 0,28; e a probabilidade de ocorrer acidente e chuva em um dia de competição é 0,08.

Determine a probabilidade de:

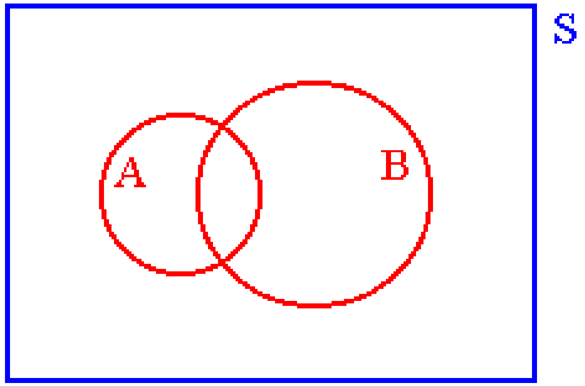
a) não ocorrer acidente na próxima competição;

b) chover ou ocorrer um acidente na próxima competição;

c) chover, mas não ocorrer acidente na próxima competição;

d) não chover e não ocorrer acidente na próxima competição.

Exercício proposto:



Sejam os eventos:

A: ocorrer um acidente em uma competição

B: ocorrer chuva em um dia de competição

$A \cap B$: ocorrer acidente e chuva em um dia de competição

Determine a probabilidade de:

a) não ocorrer acidente na próxima competição = $P(\bar{A})$

b) chover ou ocorrer um acidente na próxima competição = $P(B \cup A)$

c) chover, mas não ocorrer acidente na próxima competição = $P(B - A)$

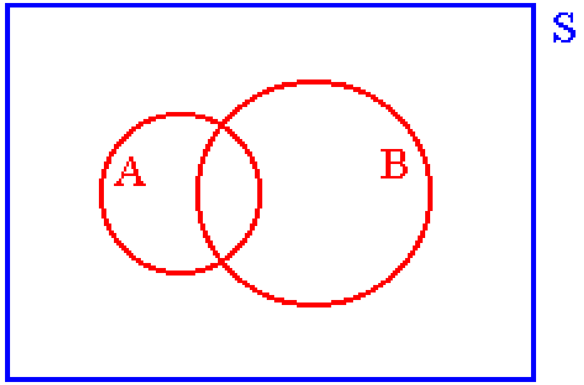
d) não chover e não ocorrer acidente na próxima competição = $P(\bar{B} \cap \bar{A})$

Sejam os eventos:

A: ocorrer um acidente em uma competição

B: ocorrer chuva em um dia de competição

A∩B: ocorrer acidente e chuva em um dia de competição

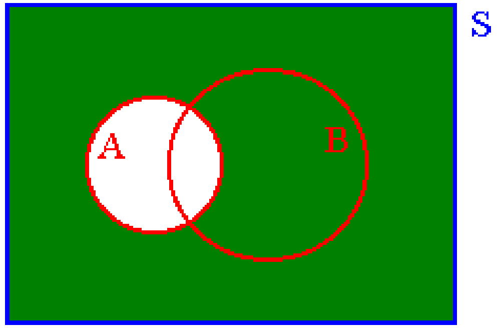


$P(A) = 0{,}18$

$P(B) = 0{,}28$

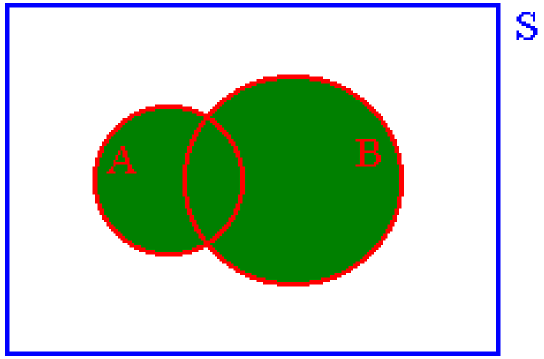
$P(A \cap B) = 0{,}08$

a) P(não ocorrer acidente na próxima competição)



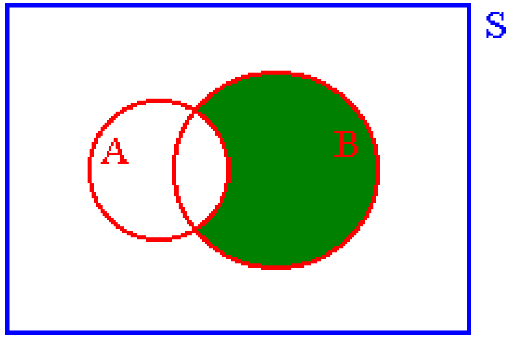
$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}18 = 0{,}82$

b) P(chover ou ocorrer um acidente)



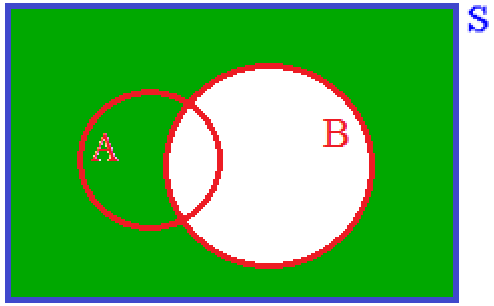
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= 0{,}18 + 0{,}28 - 0{,}08$$
$$= 0{,}38$$

c) P(chover, mas não ocorrer acidente)

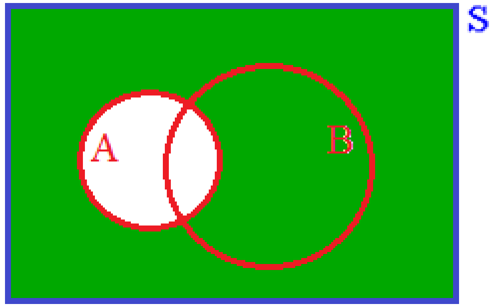


$$P(B-A) = P(B) - P(A \cap B)$$
$$= 0{,}28 - 0{,}08$$
$$= 0{,}20$$

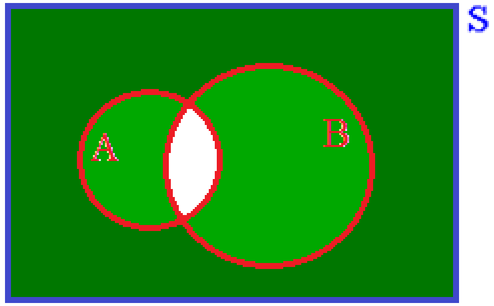
d) P(não chover e não ocorrer acidente)

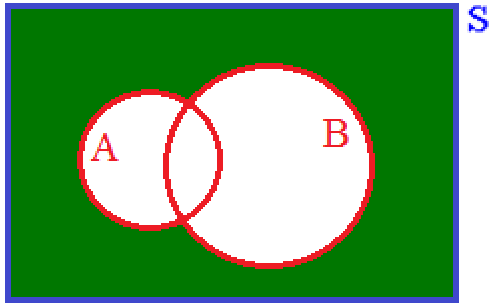


$\cap$



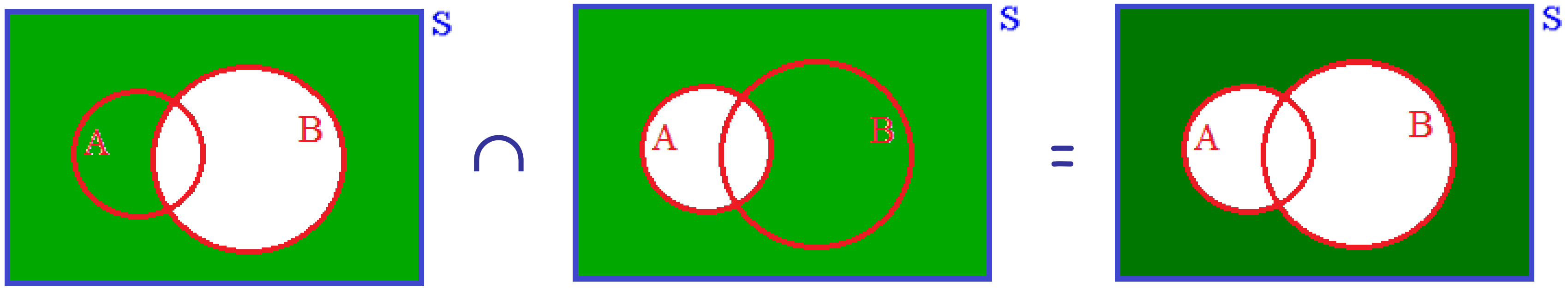
$\bar{B}$ $\bar{A}$





$\bar{A} \cap \bar{B}$

d) P(não chover e não ocorrer acidente)



Teorema de Morgan

$$\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$$

$$P(\overline{A \cup B}) = P(\bar{A} \cap \bar{B})$$

$$P(\overline{A \cap B}) = P(\bar{A} \cup \bar{B})$$

Generalização: Ao "aplicar" a barra sobre uma operação, esta muda seu sinal, restando uma barra para cada membro da operação.

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,38 = 0,62$$

Teoremas para o cálculo de probabilidades

Teorema 1. $P(\varnothing)=0$

Teorema 2. $P(\bar{A})=1-P(A)$

Teorema 3. $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$

Teorema 4. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

Teorema 5.

$$\left.\begin{aligned} P(\overline{A\cup B}) &= P(\bar{A}\cap\bar{B}) \\ P(\overline{A\cap B}) &= P(\bar{A}\cup\bar{B}) \end{aligned}\right\} \text{Teorema de Morgan}$$

$P(A\cap B)=?$

Bibliografia

MLODINOW, L. **O andar do bêbado. Como o acaso determina nossas vidas**. Rio de Janeiro: Editora Zahar, 2009, 264p.

NAGHETTINI, M.; PINTO, E. J. de A. **Hidrologia estatística**. Belo Horizonte: CPRM, 2007. 552 p.

SILVEIRA JUNIOR, P. ; MACHADO, A.A. ; ZONTA, E.P.; SILVA, J.B. da. **Curso de Estatística** v.1. Pelotas: Universidade Federal de Pelotas, 1992, 135p.

SINGH, Simon **O Último Teorema de Fermat**. Rio de Janeiro: Editora Record, 1998, 324p.

Sistema Galileu de Educação Estatística. Disponível em: http://www.galileu.esalq.usp.br/topico.html