Unidade II – Estatística descritiva

2.1. Apresentação de dados
- 2.1.1 Séries estatísticas
- 2.1.2 Tabelas
- 2.1.3 Gráficos

2.2. Distribuições de freqüências e gráficos
- 2.2.1 Tabelas de classificação simples
- 2.2.2 Tabelas de classificação cruzada

2.3. Medidas descritivas
- 2.3.1 Medidas de localização ou tendência central
- 2.3.2 Medidas separatrizes
- 2.3.3 Medidas de variação ou dispersão
- 2.3.4 Medidas de formato

2.4. Análise exploratória de dados

Profª. Clause Piana

Medidas descritivas

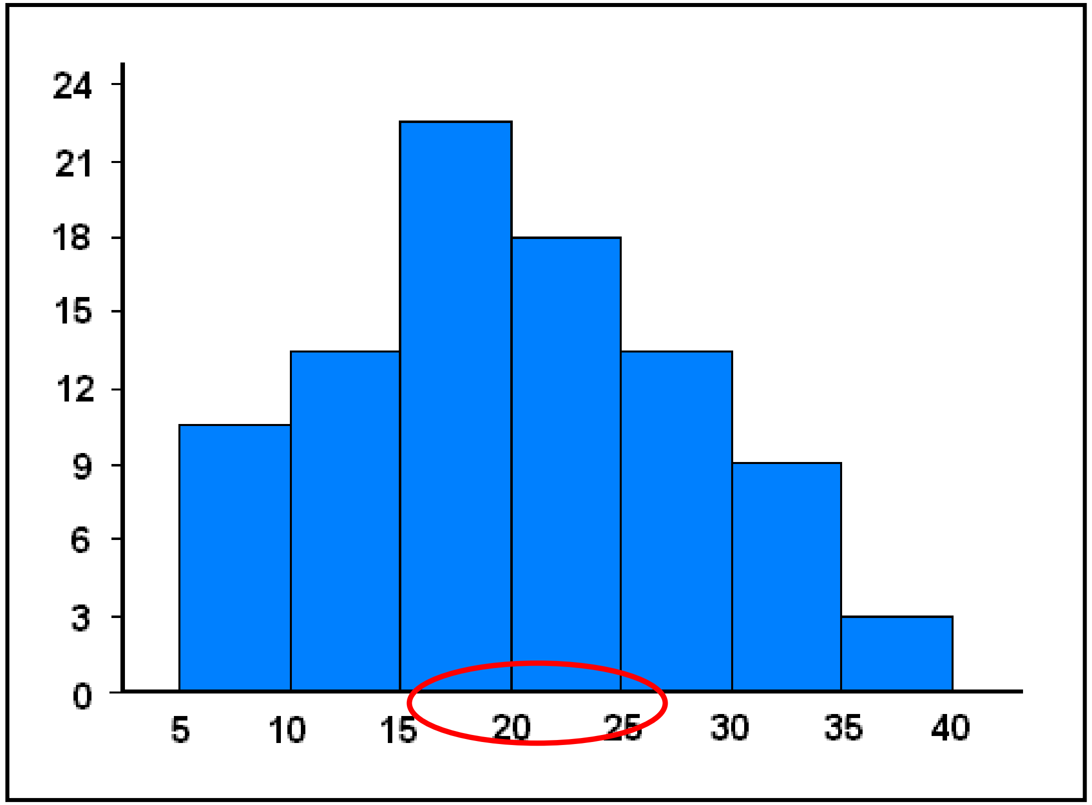
- São funções de valores de uma variável numérica

  Objetivo → reduzir um conjunto de dados numéricos a um pequeno grupo de valores que deve fornecer toda a informação relevante a respeito desses dados

- Podem ser classificadas em quatro grupos:
  - Medidas de localização ou tendência central
  - Medidas separatrizes
  - Medidas de variação ou dispersão
  - Medidas de formato

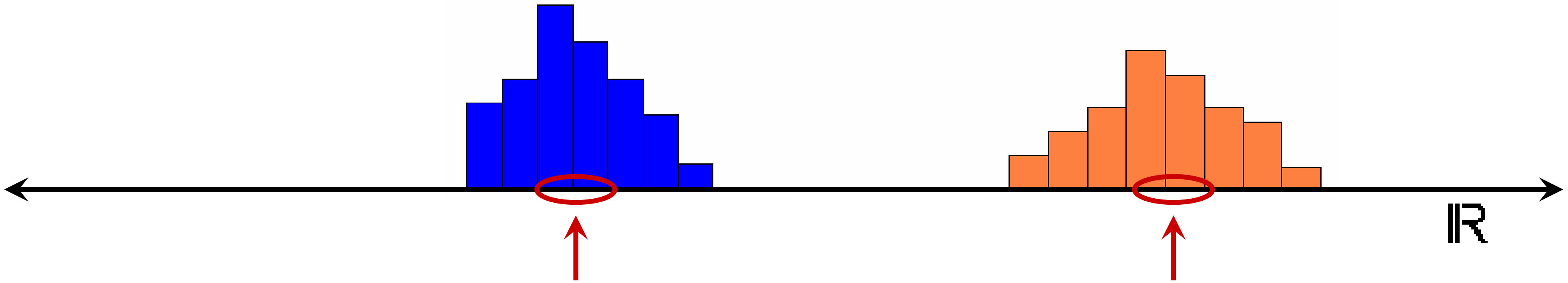
Medidas de localização ou tendência central: **caracterizam o centro** da distribuição.

Expectativa: centro contém a maior parte das observações



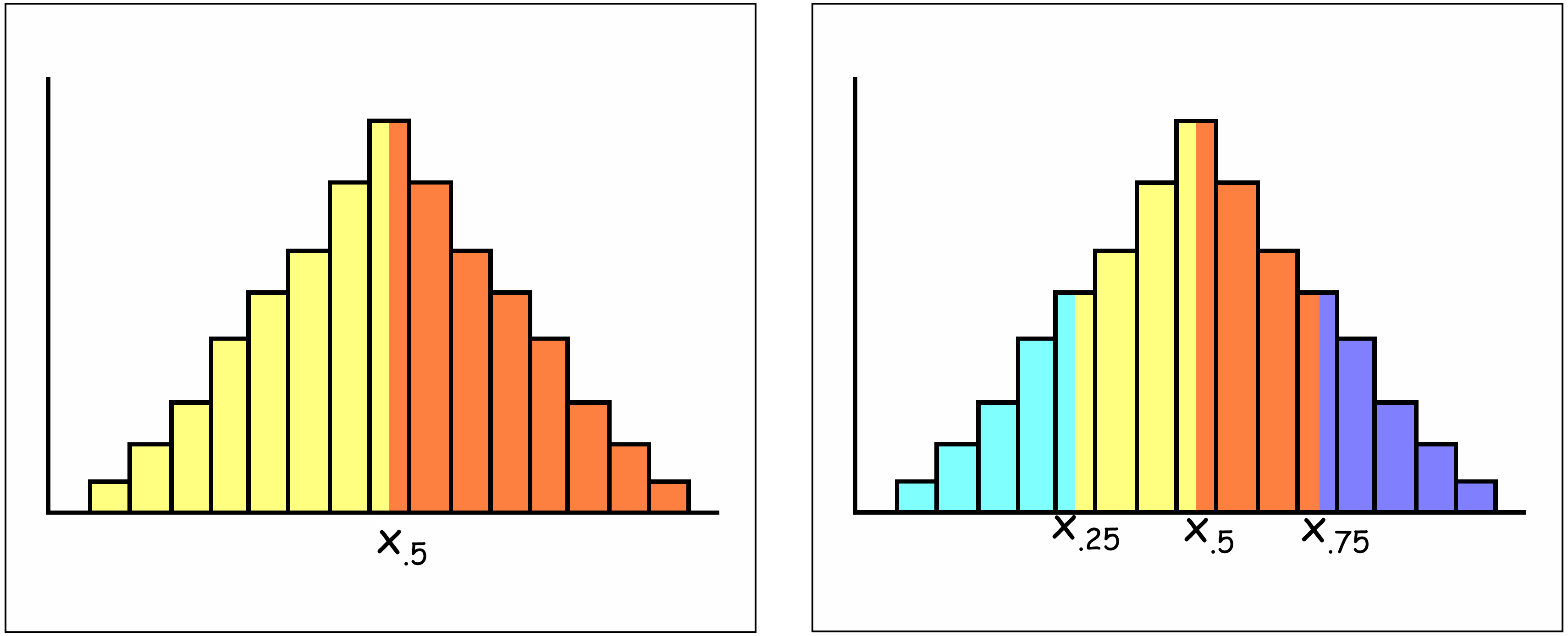
Medidas de localização ou tendência central:

caracterizam o centro da distribuição.

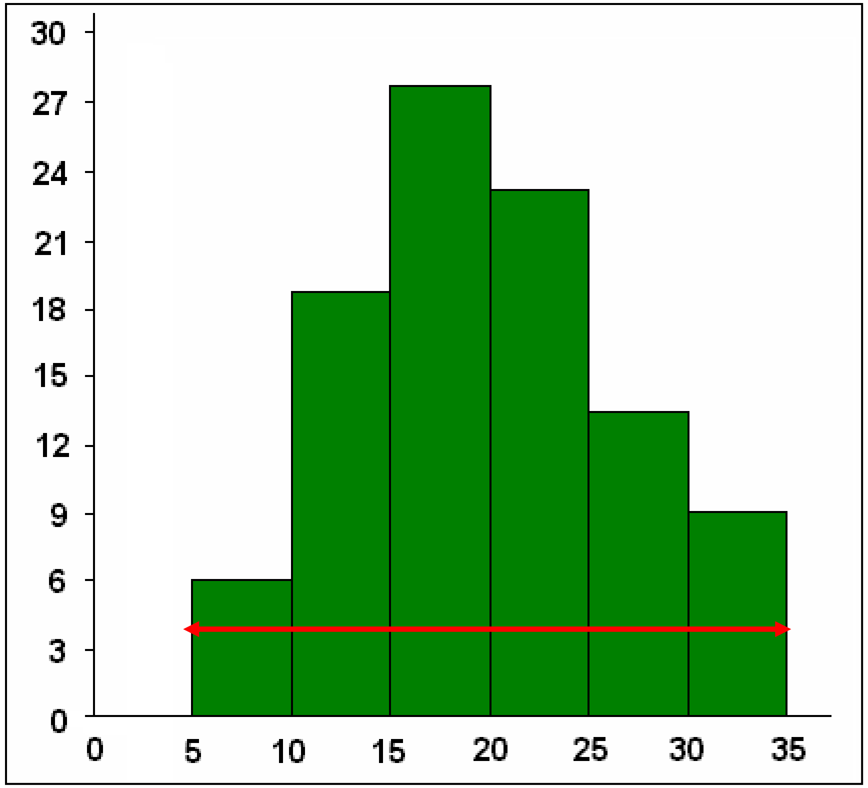


Localizam a distribuição na reta dos reais

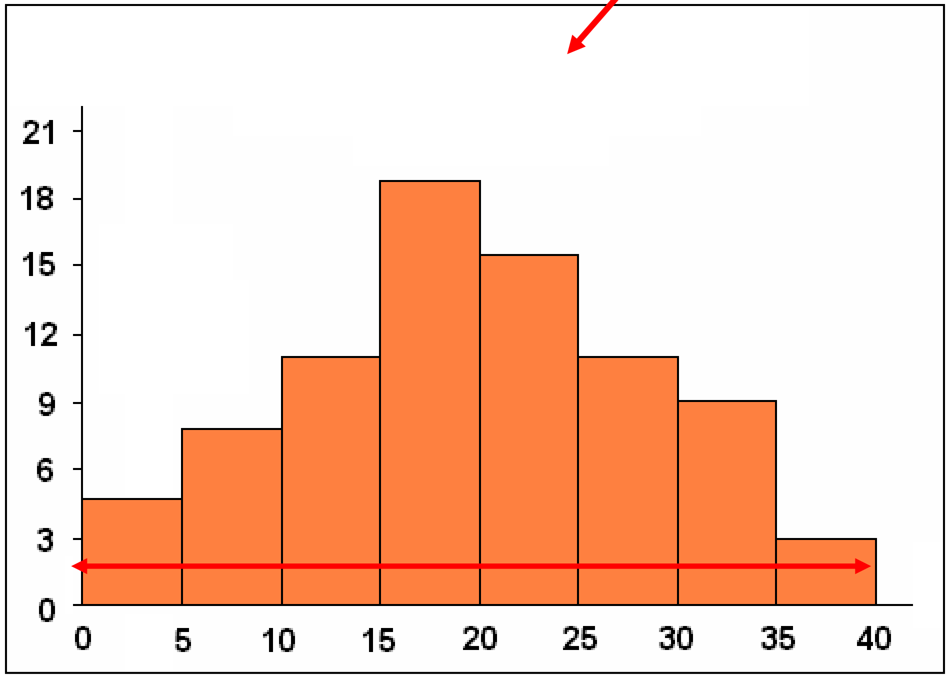
Medidas separatrizes: indicam limites para proporções de observações em um conjunto de dados ordenado



Medidas de variação ou dispersão: informam quanto os valores de um conjunto de dados diferem entre si.



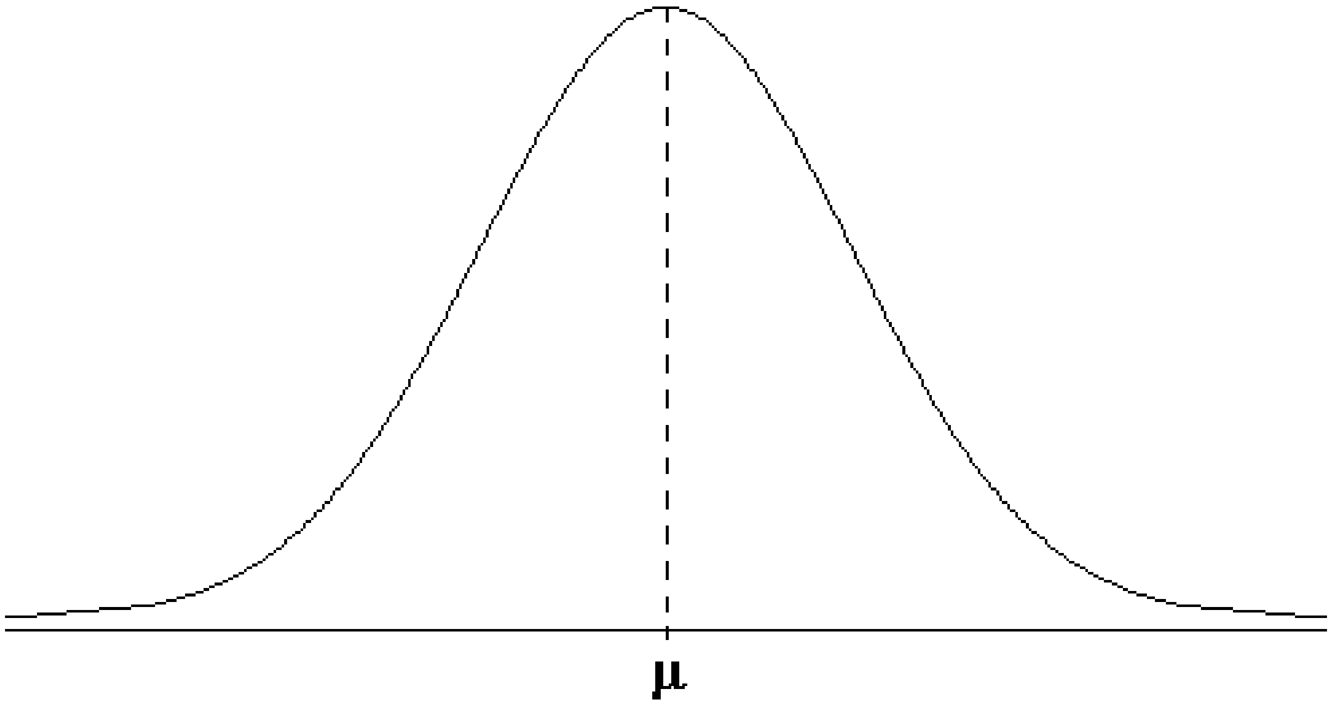
maior variação



Medidas de formato

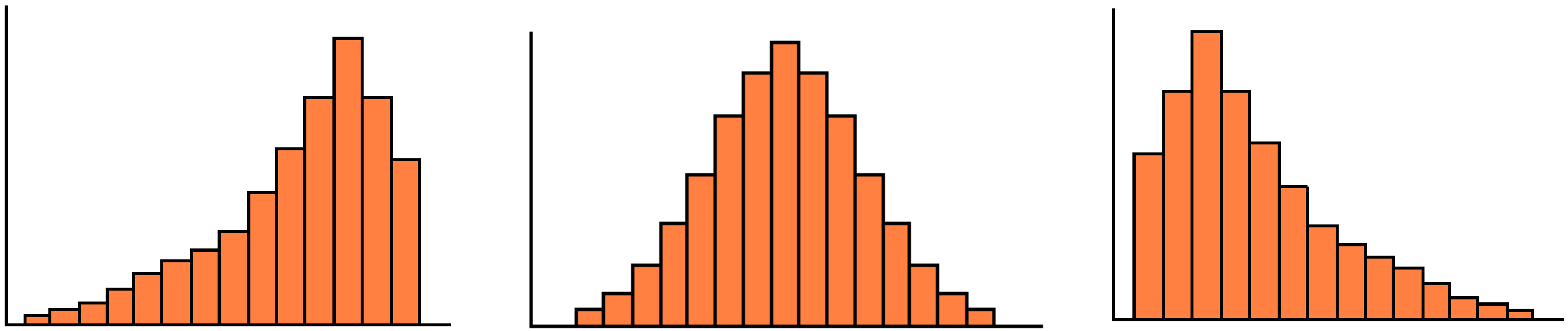
Assimetria: simetria da distribuição em relação à curva normal

Curva normal



Medidas de formato

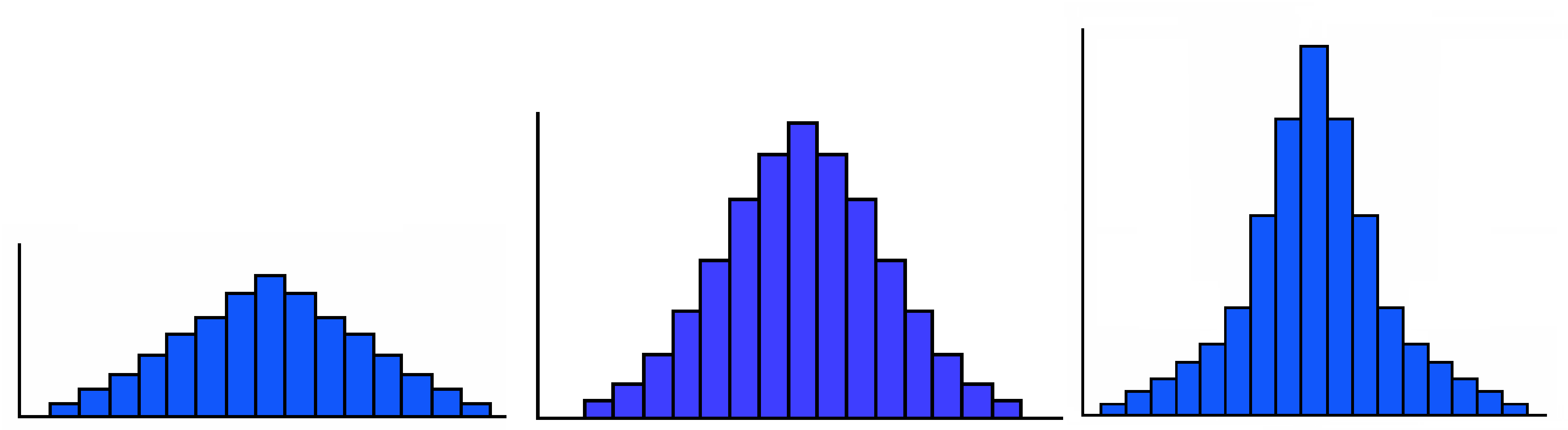
Assimetria: **simetria** da distribuição em relação à curva normal



assimétrica negativa   simétrica   assimétrica positiva

Medidas de formato

Curtose: achatamento da distribuição em relação à curva normal. Como se concentram as observações no centro ou nas caudas da distribuição?



Platicúrtica Mesocúrtica Leptocúrtica

Plat(i)- [Do gr. *platýs*]: 'chato', 'plano', 'largo'

Lept(o)- [Do gr. *leptós*]:'delgado', 'miúdo', 'magro', 'alongado'

Valores atípicos ou discrepantes

Estatura (m)

Jogadores de basquete	Jóqueis
2,08	1,58
1,98	1,62
1,95	1,68
2,03	1,55
2,10	1,57
1,93	1,60
atípico → 1,58	1,98 ← atípico

Atípico é o valor que está fora do padrão do contexto.

A caracterização de um valor como **atípico** depende do contexto.

Medidas descritivas

- Existe uma grande variedade de medidas descritivas, muitas delas competidoras entre si

- **Considerações na escolha da medida mais adequada:**
  - A medida é de fácil interpretação? É intuitiva?
  - Existem valores atípicos que podem afetá-la exageradamente?
  - **O propósito da análise é meramente descritivo ou planeja-se fazer inferências?**

Medidas de localização ou tendência central

Objetivo → indicar ou representar o **centro** de uma distribuição

Expectativa: centro contém a maior parte das observações

Medidas de localização mais utilizadas:

- Média aritmética
- Mediana
- Moda

Média aritmética

Medida mais conhecida e utilizada:

- ✓ facilidade de cálculo e de compreensão
- ✓ propriedades matemáticas e estatísticas

Definição: **Média aritmética** é uma **combinação linear** de todas as observações

Combinação linear: $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = \sum c_ix_i$

Conjunto de observações: $x_1, x_2, \ldots, x_n$

Conjunto de coeficientes: $c_1, c_2, \ldots, c_n$

Média aritmética

Os coeficientes são pesos (p_i).

$$p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n = \sum p_ix_i$$

Média aritmética

Simples → todos os pesos são iguais (p_i=p)

$$p_1 = p_2 = ... = p_n = p$$

$$px_1 + px_2 + ... + px_n = \sum px_i$$

Ponderada → as observações têm pesos diferentes

$$p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n = \sum p_ix_i$$

Média aritmética simples ($\bar{x}$)

Para um conjunto de n valores:

$x_i = x_1, x_2, \ldots, x_n$ $p_i = p = \frac{1}{n}$

$$\bar{x} = \sum \frac{1}{n} x_i = \frac{1}{n} \sum x_i = \frac{\sum x_i}{n}$$

soma de todos os valores

total de valores somados

Interpretação: se tivéssemos um total fixo e quiséssemos dividi-lo em n partes iguais, esse valor constante seria a média aritmética simples. A média é a quantidade comum a todos.

Exemplo:

X = peso (kg)

$x_i = 9, 7, 4, 5, 10$

$$\bar{x} = \frac{9+7+4+5+10}{5} = \frac{35}{5} = 7 \text{ kg}$$

Profª. Clause Piana

Média aritmética ponderada ($\bar{x}_p$)

Temos um conjunto de valores e um conjunto de pesos:

$x_i = x_1, x_2, \ldots, x_n$

$p_i = p_1, p_2, \ldots, p_n$, sendo $p_i > 0$ e $\sum p_i = 1$

$$\bar{x}_p = \frac{\sum x_i\, p_i}{\sum p_i}$$

soma de produtos de valores e pesos

soma dos pesos

Exemplo:

X = nota

x_i = 9, 4,5, 5, 10

p_i = 10, 10, 5, 5

$$\bar{x}_p = \frac{9 \times 10 + 4{,}5 \times 10 + 5 \times 5 + 10 \times 5}{10 + 10 + 5 + 5}$$

$$\bar{x}_p = \frac{210}{30} = 7$$

Propriedades algébricas da média aritmética

1ª propriedade: A média de um conjunto de dados que não varia, ou seja, cujos valores são uma constante, é a própria constante.

Verificação numérica:

$$x_i = 4, 4, 4, 4, 4$$

$$\bar{x} = 4$$

Demonstração:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum c}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{nc}{n} = c$$

$$\boxed{\bar{x} = c}$$

2ª propriedade: Ao somar (ou subtrair) uma constante **c** por todos os valores de um conjunto de dados, sua média também é somada (ou subtraída) por esta constante.

Verificação numérica:

x_i = 9, 7, 5, 10, 4 $\qquad \bar{x} = 7$

1. Somar c=2

x_i+2 = 11, 9, 7, 12, 6

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{x}_{x+2} &= 7+2 \\ \bar{x}_{x+c} &= \bar{x}+c \end{aligned}}$$

$$\bar{x}_{x+2} = \frac{\sum(x_i+2)}{n} = \frac{11+9+7+12+6}{5} = \frac{45}{5} = 9$$

Demonstração:

$$\bar{x}_{x+c} = \frac{\sum (x_i + c)}{n}$$

$$= \frac{\sum x_i + \sum c}{n}$$

$$= \frac{\sum x_i + nc}{n}$$

$$= \frac{\sum x_i}{n} + \frac{nc}{n} = \frac{\sum x_i}{n} + c = \bar{x} + c$$

$$\boxed{\bar{x}_{x+c} = \bar{x} + c}$$

3ª propriedade: Ao multiplicar (ou dividir) uma constante **c** por todos os valores de um conjunto de dados, sua média também é multiplicada (ou dividida) por esta constante.

Verificação numérica:

x_i = 9, 7, 5, 10, 4 $\quad\quad \bar{x} = 7$

Multiplicar por c=2

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{x}_{2x} &= 2 \times 7 \\ \bar{x}_{cx} &= c\bar{x} \end{aligned}}$$

$2x_i$ = 18, 14, 10, 20, 8

$$\bar{x}_{2x} = \frac{\sum 2x_i}{n} = \frac{18+14+10+20+8}{5} = \frac{70}{5} = 14$$

Demonstração:

$$\bar{x}_{cx} = \frac{\sum cx_i}{n}$$

$$= \frac{c\sum x_i}{n}$$

$$= c\,\frac{\sum x_i}{n} = c\,\bar{x}$$

$$\boxed{\bar{x}_{cx} = c\,\bar{x}}$$

4ª propriedade: A soma de todos os desvios em relação à média de um conjunto de valores é nula.

$$\underbrace{\sum(x_i - \bar{x})}_{\text{desvio}} = 0$$

diferença entre a observação e a média aritmética

Verificação numérica:

x_i = 9, 7, 5, 10, 4

$\bar{x} = 7$

i	x_i	$(x_i - \bar{x})$
1	9	2
2	7	0
3	5	-2
4	10	3
5	4	-3
Σ	35	0

Demonstração:

$$\sum(x_i - \bar{x}) = \sum x_i - \sum \bar{x}$$

$$= \sum x_i - n\bar{x}$$

$$= \sum x_i - n\frac{\sum x_i}{n}$$

$$= \sum x_i - \sum x_i = 0$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

$$\boxed{\sum(x_i - \bar{x}) = 0}$$

5ª propriedade: A soma dos quadrados dos desvios em relação a uma constante c é mínima quando c = $\bar{x}$.

$$\sum(x_i - c)^2 \leftarrow \boxed{\text{é mínima quando } c = \bar{x}}$$

Verificação numérica:

i	x_i	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - 5)^2$	$(x_i - 10)^2$
1	9	2	4	16	1
2	7	0	0	4	9
3	5	-2	4	0	25
4	10	3	9	25	0
5	4	-3	9	1	36
Σ	35	0	26	46	71

n = 5

$\bar{x} = 7$

Demonstração:

$$\sum(x_i - c)^2 = \sum(x_i - c + \overline{x} - \overline{x})^2$$
$$= \sum[(x_i - \overline{x}) + (\overline{x} - c)]^2$$
$$= \sum[(x_i - \overline{x})^2 + 2(x_i - \overline{x})(\overline{x} - c) + (\overline{x} - c)^2]$$
$$= \sum(x_i - \overline{x})^2 + \sum 2(x_i - \overline{x})(\overline{x} - c) + \sum(\overline{x} - c)^2$$
$$= \sum(x_i - \overline{x})^2 + 2(\overline{x} - c)\sum(x_i - \overline{x}) + n(\overline{x} - c)^2$$

$$\sum(x_i - c)^2 = \sum(x_i - \overline{x})^2 + n(\overline{x} - c)^2$$

quando $c = \overline{x} \quad \longrightarrow \quad n(\overline{x} - c)^2 = 0$

quando $c \neq \overline{x} \quad \longrightarrow \quad n(\overline{x} - c)^2 > 0$

i	x_i	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - 5)^2$	$(x_i - 10)^2$
1	9	2	4	16	1
2	7	0	0	4	9
3	5	-2	4	0	25
4	10	3	9	25	0
5	4	-3	9	1	36
Σ	35	0	26	46	71

Expressão geral: $\sum(x_i - c)^2 = \sum(x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - c)^2$

Para $c = \bar{x}$ $\sum(x_i - \bar{x})^2 = \sum(x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - \bar{x})^2$

$$= 26 + 5(7-7)^2 = 26$$

Para $c = 5$ $\sum(x_i - 5)^2 = \sum(x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - 5)^2$

$$= 26 + 5(7-5)^2 = 46$$

Para $c = 10$ $\sum(x_i - 10)^2 = \sum(x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - 10)^2$

$$= 26 + 5(7-10)^2 = 71$$

Propriedades algébricas da média aritmética

1ª propriedade: A média de um conjunto de dados que não varia, ou seja, cujos valores são uma constante, é a própria constante.

2ª propriedade: Ao somar (ou subtrair) uma constante **c** por todos os valores de um conjunto de dados, sua média também é somada (ou subtraída) por esta constante.

$$\bar{x}_{x+c} = \bar{x} + c$$

3ª propriedade: Ao multiplicar (ou dividir) uma constante **c** por todos os valores de um conjunto de dados, sua média também é multiplicada (ou dividida) por esta constante.

$$\bar{x}_{cx} = c\,\bar{x}$$

4ª propriedade: A soma de todos os desvios em relação à média de um conjunto de valores é nula.

$$\sum (x_i - \bar{x}) = 0$$

5ª propriedade: A soma dos quadrados dos desvios em relação a uma constante c é mínima quando c = $\bar{x}$.

$$\sum (x_i - c)^2 \longleftarrow \boxed{\text{é mínima quando } c = \bar{x}}$$

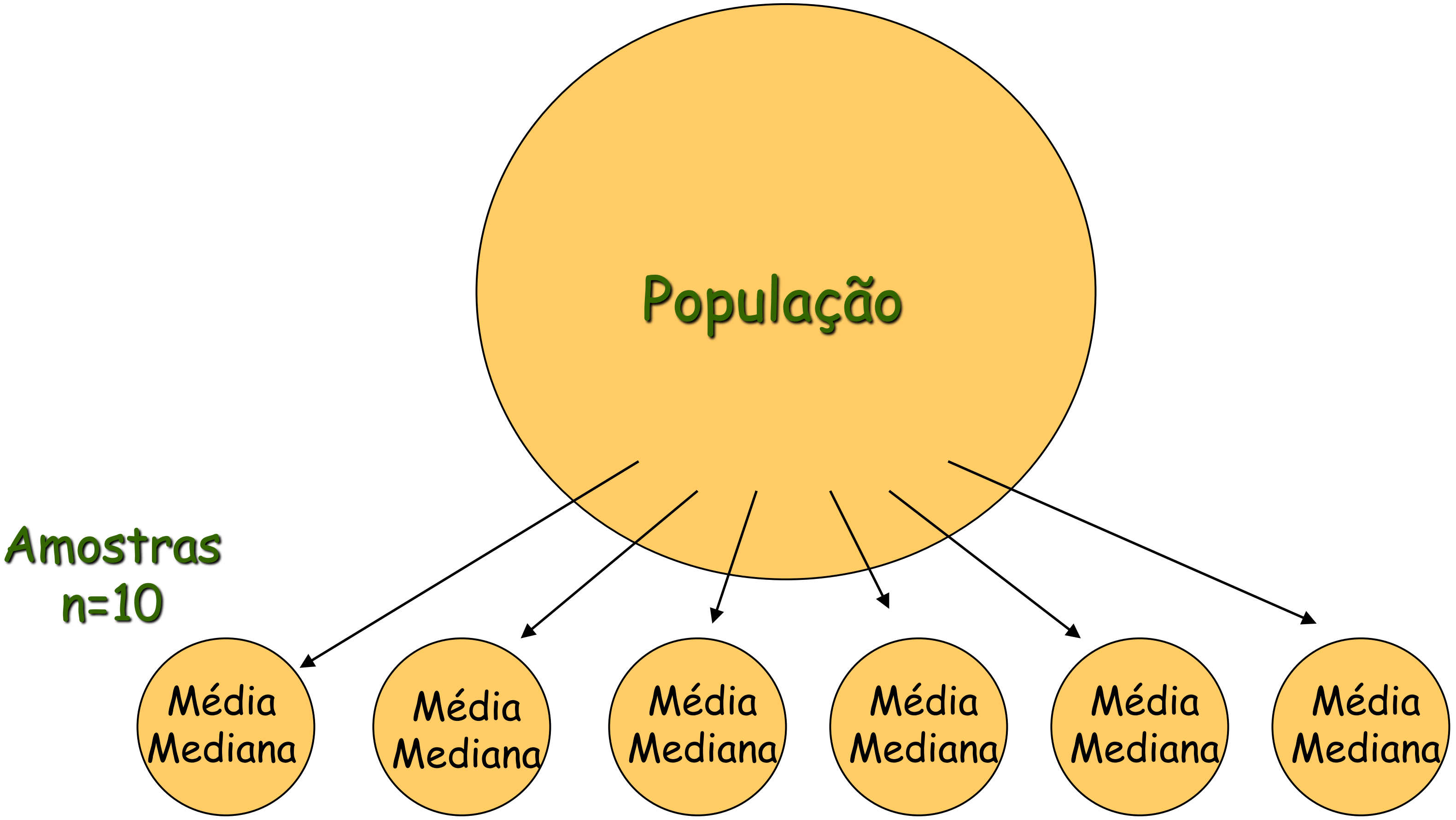
Propriedades estatísticas da média aritmética

As propriedades estatísticas da média aritmética necessitam de um conhecimento mais avançado para serem adequadamente compreendidas.

Entre as mais importantes, podemos destacar duas:

1. Se for considerado um grande número de conjuntos de dados de mesmo tamanho e obtidos no mesmo contexto, a média aritmética varia menos de um conjunto para o outro do que outras medidas de tendência central.
2. Quanto maior for o tamanho do conjunto de valores utilizado para a sua obtenção, menor é a sua variabilidade.
    - Isto comprova que a combinação das observações na forma da média aritmética possui uma variabilidade menor que um valor isolado.

Propriedades estatísticas da média

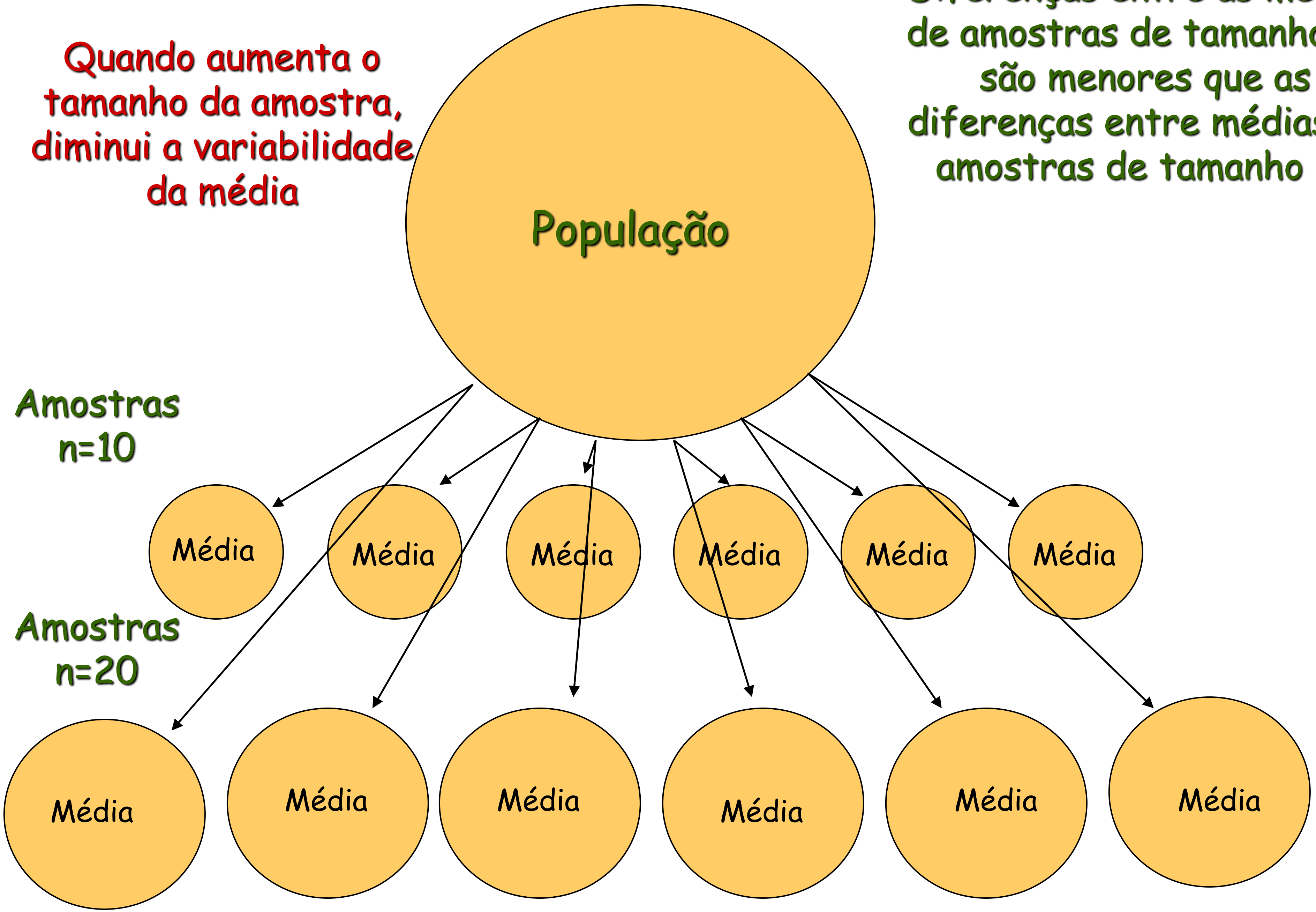


Diferenças entre as médias amostrais são menores que as diferenças entre as medianas.
A média varia menos entre as amostras.

Propriedades estatísticas da média

Quando aumenta o tamanho da amostra, diminui a variabilidade da média

Diferenças entre as médias de amostras de tamanho 20 são menores que as diferenças entre médias de amostras de tamanho 10



Mediana (Md ou $x_{.5}$)

É a medida que divide um conjunto de dados ordenado em duas partes aproximadamente iguais.

A proporção de, pelo menos, 0,5 dos valores é menor ou igual à mediana e, pelo menos, 0,5 é maior ou igual.

Conjunto de dados ordenado: $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \ldots \leq x_{(n)}$

Pelo menos 0,5 ou 50% Pelo menos 0,5 ou 50%

$x_{(1)}$ $x_{.5}$ $x_{(n)}$

Para obter a mediana:

1. Ordenar os dados
2. Determinar a posição da mediana

Dois casos:

n ímpar $\rightarrow$ um valor central

posição $\rightarrow$ $p = \frac{n+1}{2}$ $x_{.5} = x_{(P)}$

n par $\rightarrow$ dois valores centrais

posições $\left\{ p = \frac{n+1}{2} \begin{array}{l} \nearrow p_1 \\ \searrow p_2 \end{array} \right.$ $x_{.5} = \frac{x_{(P_1)} + x_{(P_2)}}{2}$

Quando **p** não é inteiro, tomamos os dois inteiros mais próximos.

Exemplo:

X = Peso (kg)

x_i = 5, 9, 7, 4, 12, 10

1. Ordenar os dados

$x_{(i)} = 4,\ 5,\ \boxed{7,\ 9},\ 10,\ 12$

2. Determinar a posição (p) da mediana

n = 6 (par)

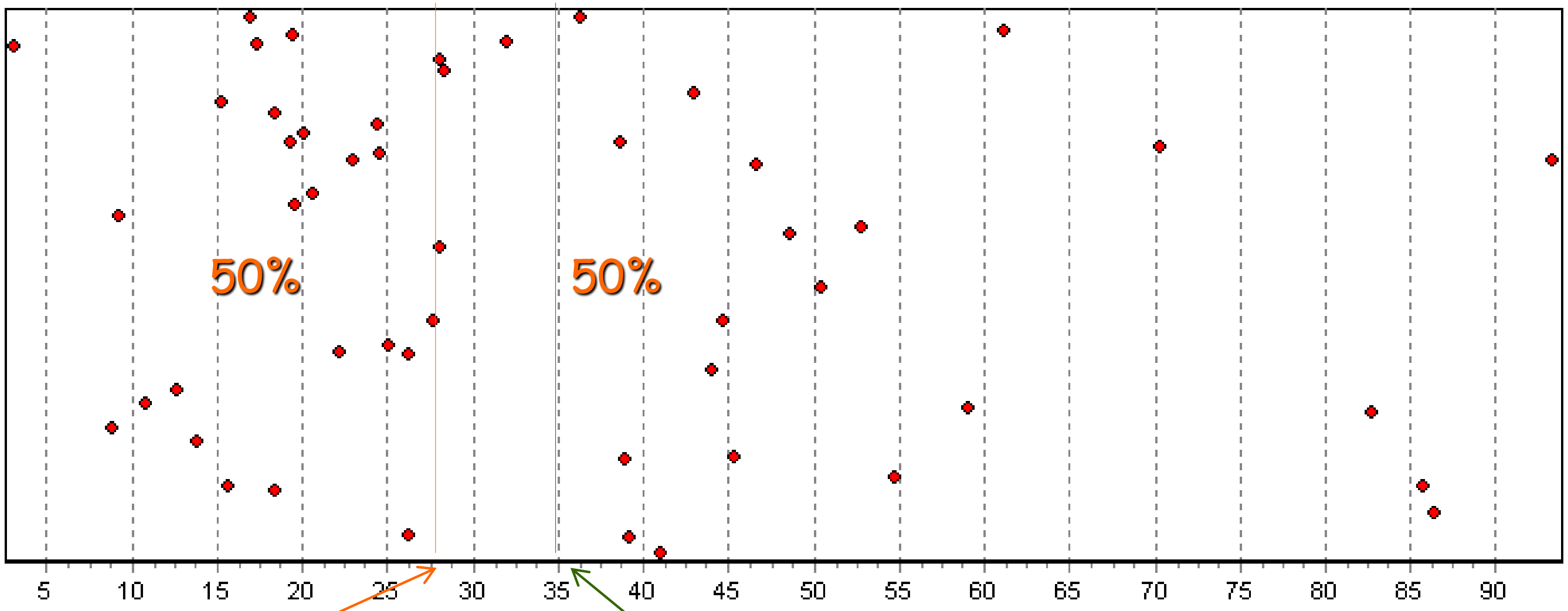
$$p = \frac{n+1}{2} = \frac{6+1}{2} = 3{,}5 \quad \begin{cases} p_1 = 3 \\ p_2 = 4 \end{cases}$$

$$x_{.5} = \frac{x_{(3)} + x_{(4)}}{2}$$

$$x_{.5} = \frac{7+9}{2} = 8$$

$$\boxed{x_{.5} = 8\,\text{kg}}$$

Valores gastos (em reais) pelas primeiras 50 pessoas que entraram em um determinado Supermercado, no dia 01/01/2000.



$x_{.5} = 27{,}86$ $\bar{x} = 34{,}78$

Pelo menos 50% dos valores é menor ou igual à mediana e, pelo menos, 50% dos valores é maior ou igual a mediana.

Moda (Mo)

- É o valor de **maior ocorrência** num conjunto de dados.
- É a única medida que **pode não existir** e, existindo, **pode não ser única**.

Exemplos:

Interpretação para variáveis discretas:

X = número de unidades defeituosas em um lote de produção

1. x_i = 5, 5, 3, 7, 9, 5, 4, 1   **Mo = 5**
2. x_i = 9, 5, 4, 5, 7, 1, 2, 2   **Mo = 2 e 5** (conjunto bimodal)
3. x_i = 1, 3, 8, 4, 5, 9, 2, 11   **não existe Mo** (conjunto amodal)

Interpretação para variáveis contínuas:

Valores gastos (em reais) pelas primeiras 50 pessoas que entraram em um determinado Supermercado, no dia 01/01/2000.

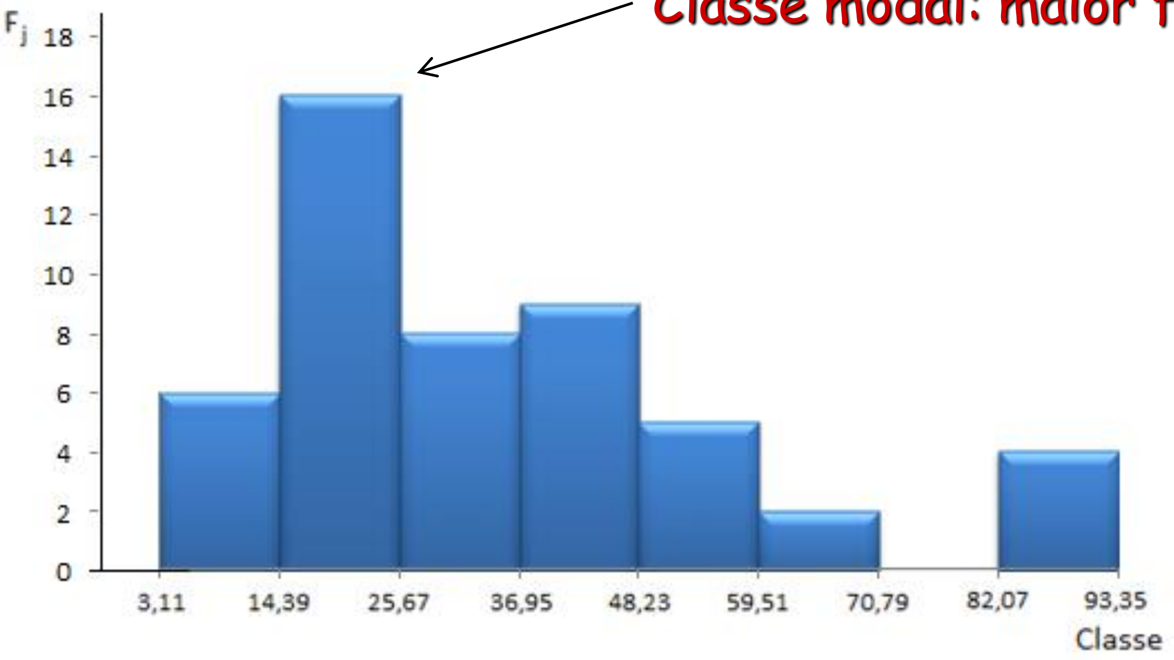
3,11	8,88	9,26	10,81	12,69	13,78	15,23	15,62	17,00	17,39
18,36	18,43	19,27	19,50	19,54	20,16	20,59	22,22	23,04	24,47
24,58	25,13	26,24	26,26	27,65	28,06	28,08	28,38	32,03	36,37
38,64	38,98	39,16	41,02	42,97	44,08	44,67	45,40	46,69	48,65
50,39	52,75	54,80	59,07	61,22	70,32	82,70	85,76	86,37	93,34

Valores de **variáveis contínuas**, em geral, não se repetem.

A moda tem importância apenas conceitual.

Ela está relacionada com o pico da distribuição

Classe modal: maior frequência



Moda é o ponto da distribuição onde temos a maior frequência.

Exercício proposto:

Foi registrado o número mensal de alarmes falsos disparados no período de um ano em uma determinada empresa. Os valores obtidos foram:

56 55 46 57 46 59 41 61 46 39 65 61

Para o conjunto de valores, calcule a média, a mediana e a moda.

Vantagens e desvantagens das três medidas

Média aritmética

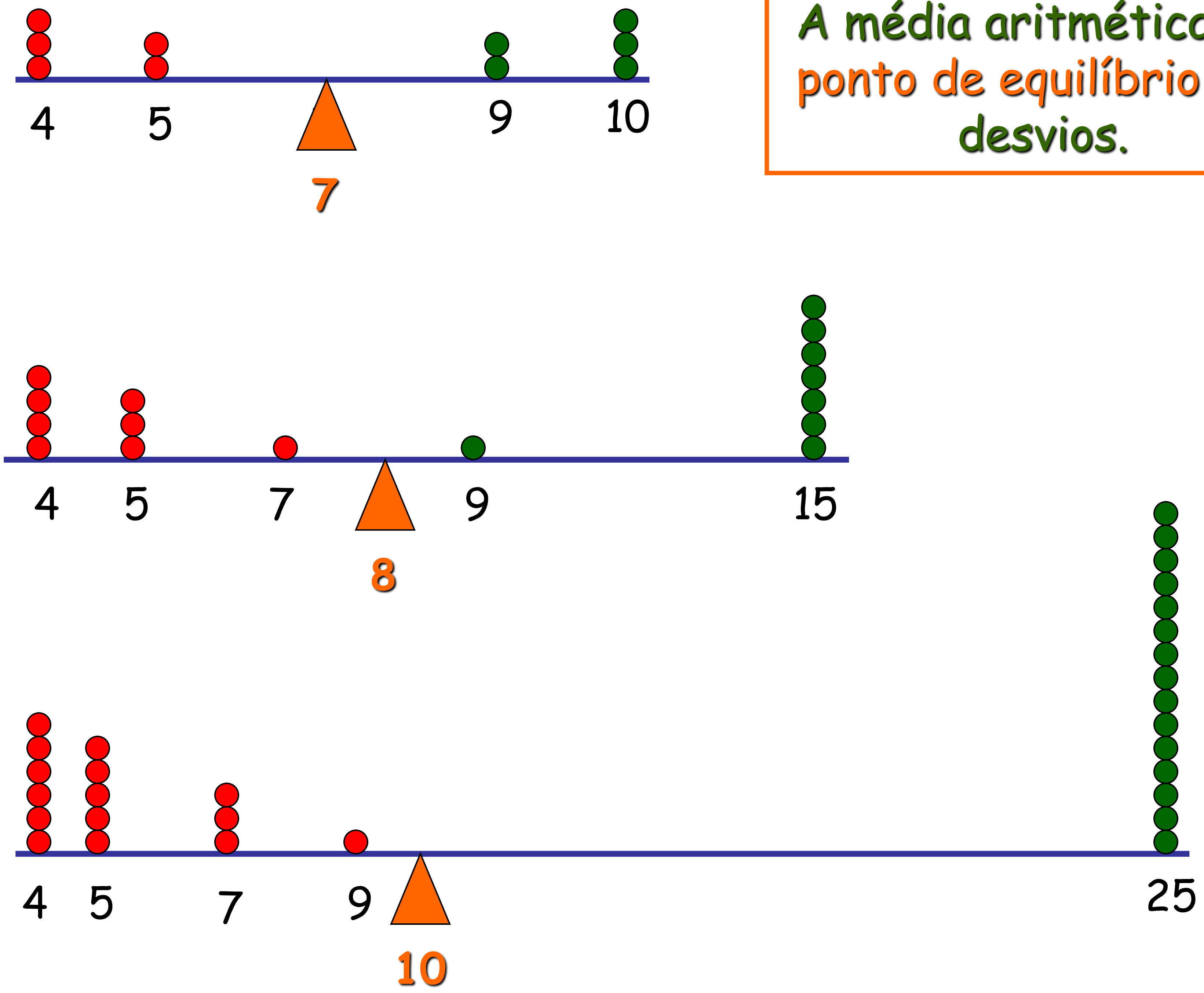
- No cálculo da média participam todos os valores observados.
- É uma medida de fácil interpretação e presta-se muito bem a tratamentos estatísticos adicionais.
- É um valor típico do conjunto de dados, podendo substituir todos os seus valores sem alterar o total.
- É mais representativa quando há simetria e maior frequência no centro.
- É o ponto de equilíbrio das observações.

Desvantagem: **É uma medida não resistente, ou seja, altamente influenciada por valores atípicos ou discrepantes.**

x_i	
9	7
7	7
5	7
10	7
4	7
35	35

$$\bar{x} = 7$$

A média aritmética é o ponto de equilíbrio dos desvios.



Mediana

- Define exatamente **o centro** de uma distribuição, mesmo quando os valores se distribuem assimetricamente em torno da média.
- Pode ser determinada mesmo quando não se conhece todos os valores do conjunto de dados.
- Pode ser utilizada para definir o meio de um número de objetos, propriedades ou qualidades que possam de alguma forma ser ordenados.
- É uma medida resistente, ou seja, não sofre influência de valores discrepantes.

Desvantagem: É uma medida que não se presta a cálculos matemáticos.

A mediana não é influenciada por valores atípicos, a média sim.

4 5 7 9 10

$$x_{.5} = 7$$
$$\bar{x} = 7$$

4 5 7 8 9 15

$$x_{.5} = 7$$
$$\bar{x} = 8$$

4 5 7 9 10 25

$$x_{.5} = 7$$
$$\bar{x} = 10$$

Moda

- É uma medida que têm existência real dentro do conjunto de dados e em grande número de vezes.
- Não exige cálculo, apenas uma contagem.
- Pode ser determinada também para variáveis qualitativas nominais.

Desvantagens:

Deixa sem representação todos os valores do conjunto de dados que não forem iguais a ela.

Não se presta a cálculos matemáticos.

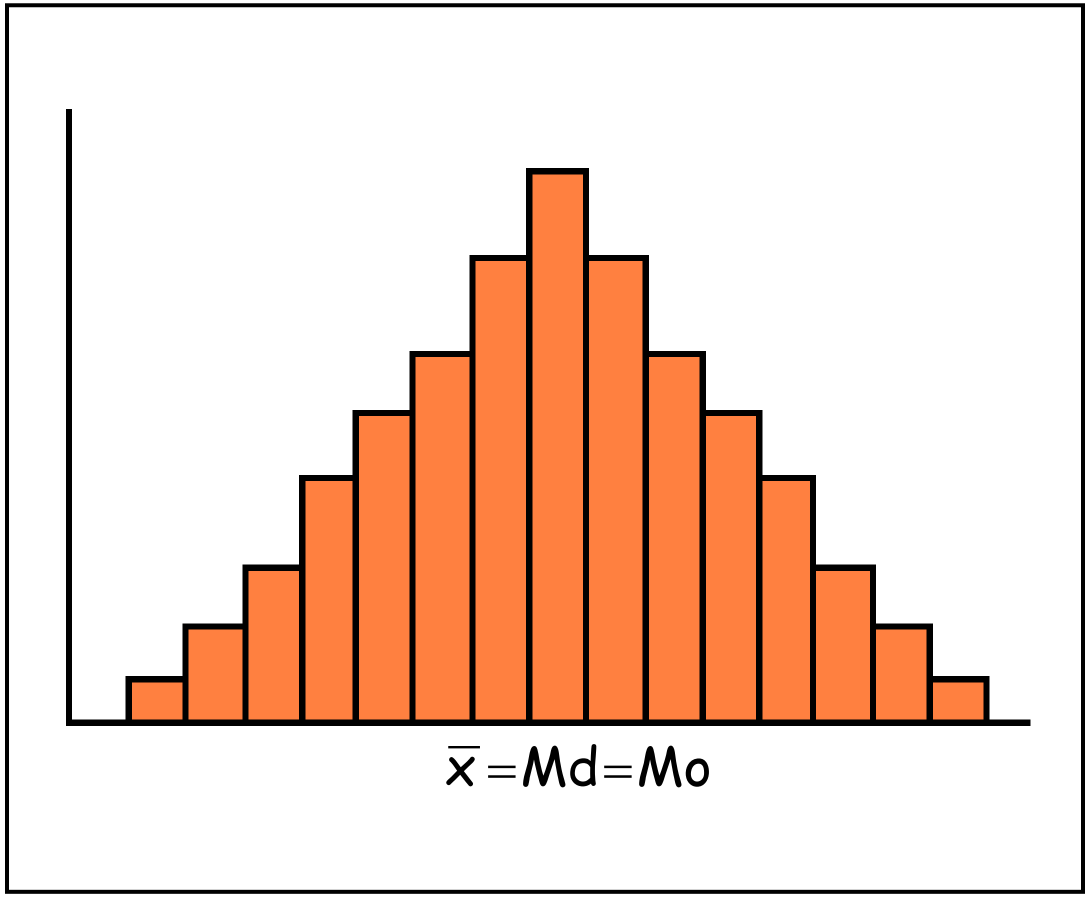
Pode não existir.

Variável categórica qualitativa nominal

Tipo de veículo	F_j
Carro de passageiro	248
Minivan	62
Caminhão de 2 eixos	42
Caminhão de multieixo	12
Moto	55
Barco a motor	9

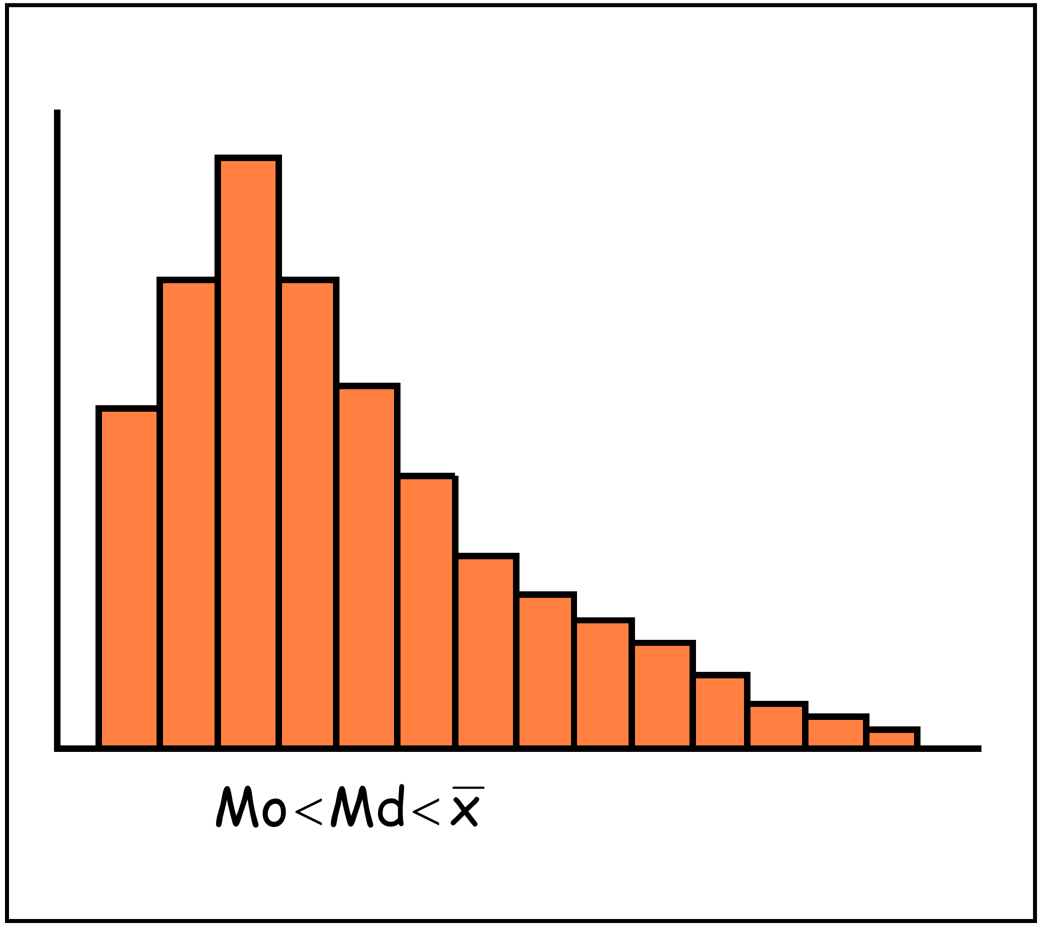
Classe Modal

Relação entre as três medidas

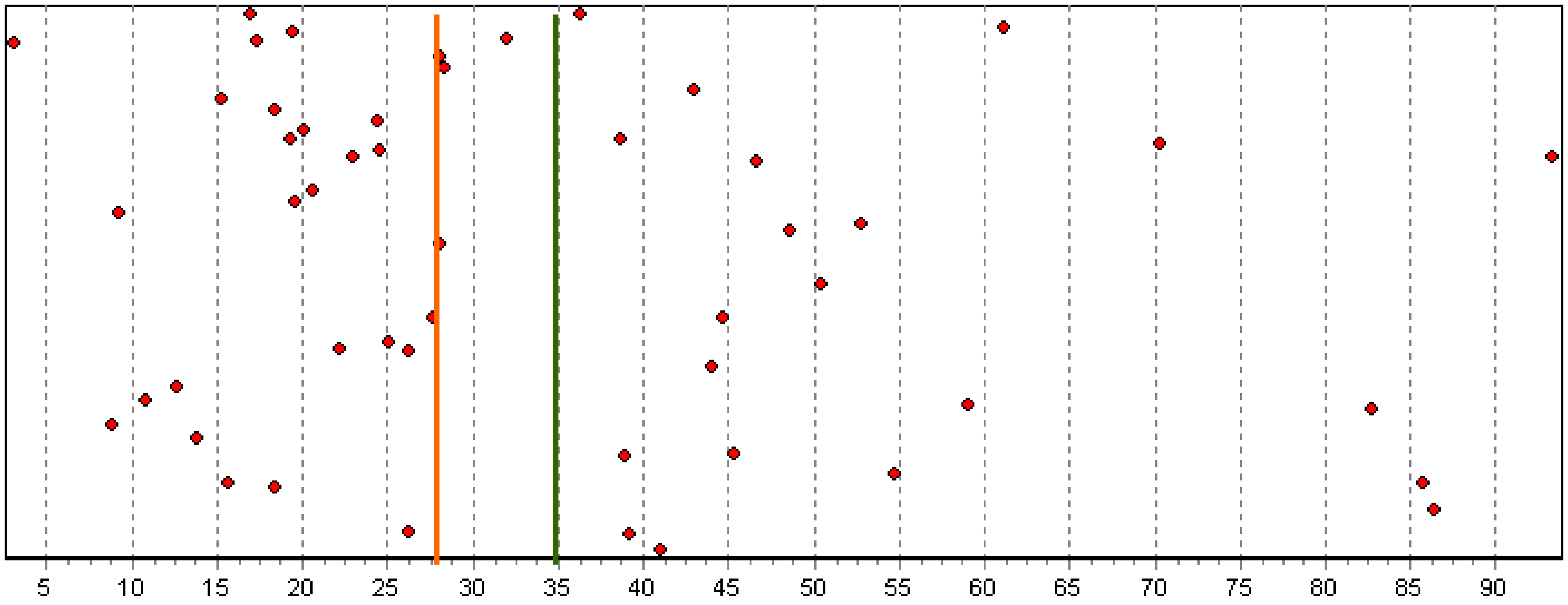


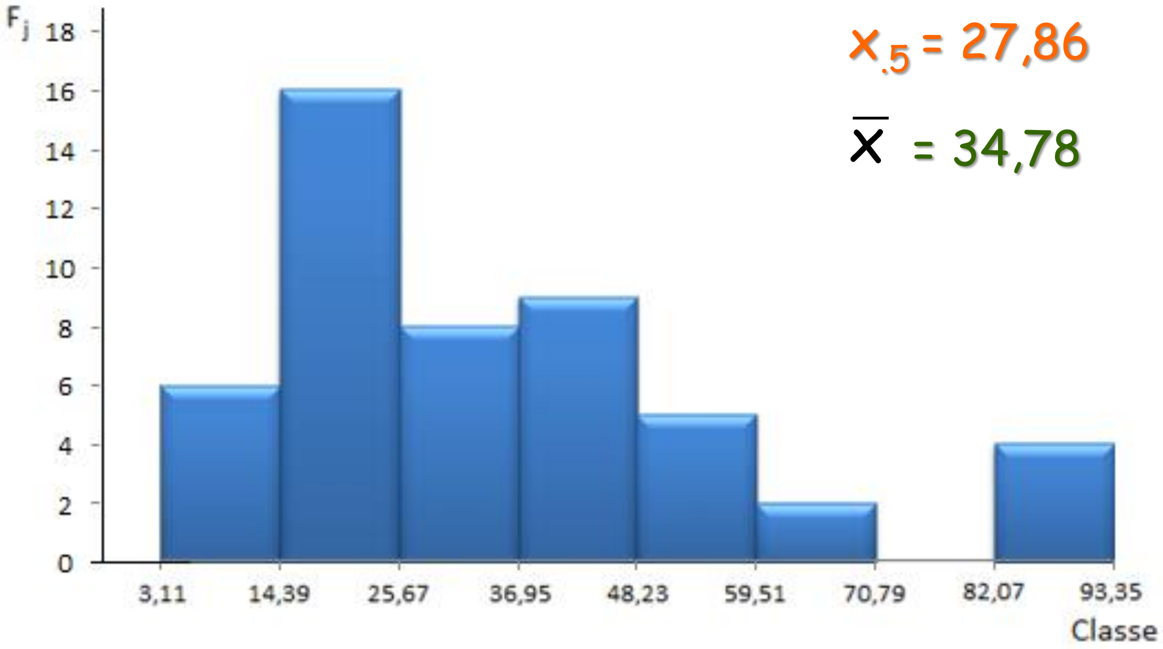
Distribuição unimodal simétrica

Relação entre as três medidas



Distribuição unimodal assimétrica positiva

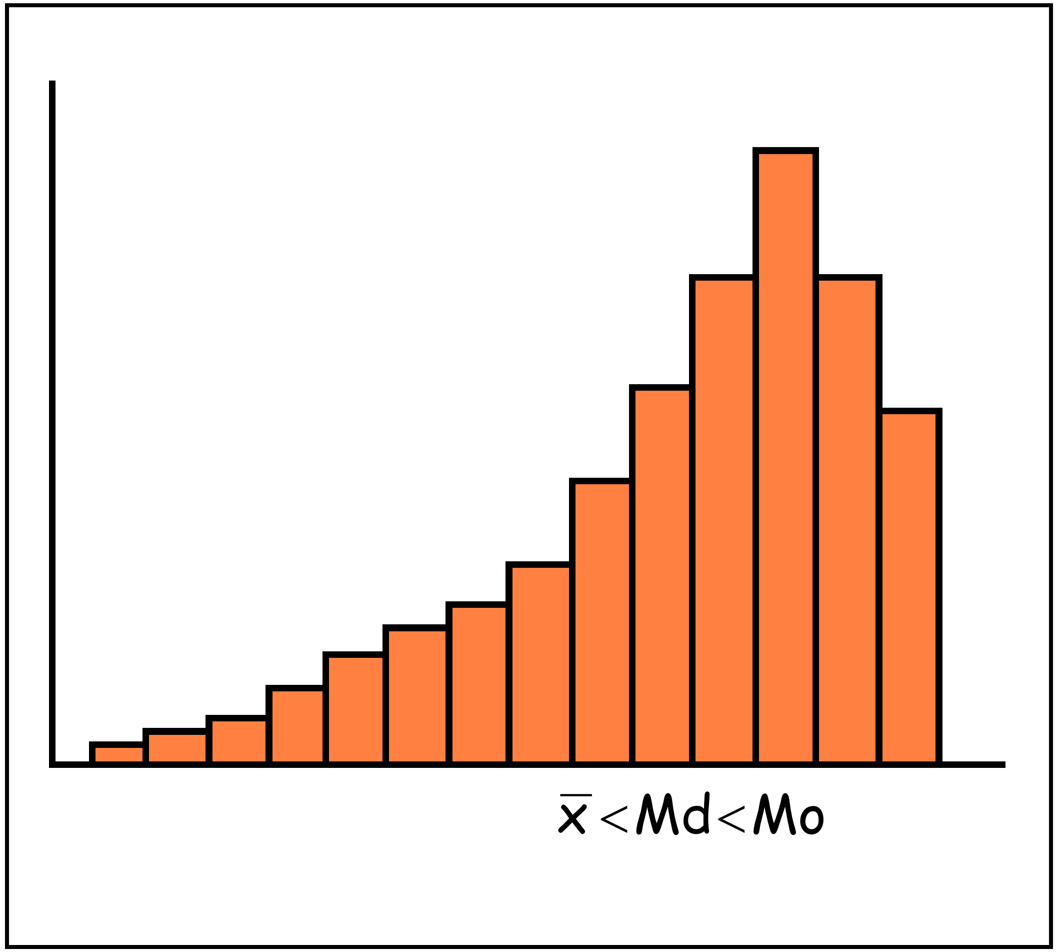




$x_{.5} = 27,86$

$\bar{X} = 34,78$

Relação entre as três medidas



Distribuição unimodal assimétrica negativa

Outras médias:

Média geométrica

Média harmônica

Média geométrica

⇨ Definida como a n-ésima raiz do produto de n valores

Simples: $$\bar{x}_g = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \ldots \times x_n} = \sqrt[n]{\prod x_i} = \left(\prod x_i\right)^{\frac{1}{n}}$$

Ponderada: $$\bar{x}_{gp} = \sqrt[\Sigma p_i]{x_1^{p_1} \times x_2^{p_2} \times \ldots \times x_n^{p_n}} = \sqrt[\Sigma p_i]{\prod x_i^{p_i}} = \left(\prod x_i^{p_i}\right)^{\frac{1}{\Sigma p_i}}$$

Sequência de valores em progressão geométrica:

7, 21, 63 → 21 é a média geométrica de 7 e 63

⇨ A média geométrica é definida somente para $x_i > 0$, para toda unidade de observação i.

⇨ Apropriada para calcular médias de razões, taxas de variação, índices econômicos e taxas de crescimento de microorganismos

Exemplo:

Se um investimento rende 10% no primeiro ano e 30% no segundo ano, qual o rendimento médio desse investimento?

Seja **100 reais** o montante aplicado inicialmente.

Após esses dois anos o montante será: **100×1,10×1,30 = 143**

Tomando a **média aritmética**, temos $\bar{x} = \frac{1,10 + 1,30}{2} = 1,20$

Calculando o montante ao final dos dois anos:

100×1,20×1,20 = 144

Tomando a **média geométrica**, temos $\bar{x}_g = \sqrt{1,10 \times 1,30} = 1,1958$

Calculando o montante ao final dos dois anos:

100×1,1958×1,1958 = 142,99

Média harmônica

- Definida como o inverso da média aritmética dos inversos dos n valores

Simples:

$$\bar{x}_h = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}} = \frac{n}{\sum \frac{1}{x_i}}$$

Ponderada:

$$\bar{x}_{hp} = \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{\frac{1}{x_1}p_1 + \frac{1}{x_2}p_2 + \ldots + \frac{1}{x_n}p_n} = \frac{\sum p_i}{\sum \frac{1}{x_i} p_i}$$

- A média harmônica é definida somente para $x_i \neq 0$, para toda unidade de observação i.
- Utilizada em teoria musical (freqüências musicais) e em outras situações especiais (Física e Economia).

Exemplo:

mais heterogêneo

Notas: 3, 6 e 9

Notas: 4, 7 e 7

$$\boxed{\bar{x} = \frac{3+6+9}{3} = 6}$$

$$\boxed{\bar{x} = \frac{4+7+7}{3} = 6}$$

$$\boxed{\bar{x}_h = \frac{3}{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}} = 4{,}9}$$

$$\boxed{\bar{x}_h = \frac{3}{\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}} = 5{,}6}$$

O candidato que tem notas mais homogêneas leva vantagem.

Em algumas situações, é a média harmônica que provê a correta noção de média.

Exemplo 1.

Se metade da **distância** de uma viagem é feita a 40 km por hora e a outra metade da distância a 60 km por hora, então a velocidade média para a viagem é dada pela média harmônica:

$$\bar{x}_h = \frac{2}{\frac{1}{40} + \frac{1}{60}} = 48$$

Isso significa que o tempo total para a viagem seria o mesmo, se toda a viagem fosse feita a 48 quilômetros por hora.

Note-se, entretanto, que se se tivesse viajado por metade do **tempo** em uma velocidade e a outra metade na outra velocidade, a média aritmética, nesse caso 50 km por hora, proveria a correta noção de média.

Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9dia_harm%C3%B4nica)

Exemplo 2.

Se um circuito elétrico contém duas resistências conectadas em paralelo, uma com uma resistência de 40 ohm e outra com 60 ohm, então, a média das duas resistências é:

$$\bar{x}_h = \frac{2}{\frac{1}{40} + \frac{1}{60}} = 48 \text{ ohm}$$

Isso significa que a resistência do circuito é a mesma que a de duas resistências de 48 ohm conectadas em paralelo.

Note-se que isso não deve ser confundido com sua resistência equivalente, 24 ohm, que é a resistência necessária para substituir as duas resistências em paralelo.
A resistência equivalente é igual a metade do valor da média harmônica de duas resistências em paralelo.

Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9dia_harm%C3%B4nica)

Exemplo 3.

Em finanças, a média harmônica é usada para calcular o custo médio de ações compradas durante um período.

Se um investidor compra 1000 reais em ações todo mês durante três meses e os preços na hora de compra são de 8 reais, 9 reais e 10 reais, então, o preço médio que o investidor pagou por ação é:

$$\bar{x}_h = \frac{3}{\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}} = 8{,}926 \text{ reais}$$

Note-se, entretanto, que se um investidor comprasse 1000 **ações** por mês, a média aritmética seria usada.

Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9dia_harm%C3%B4nica)

Relação entre as três médias

$$\bar{x}_h \leq \bar{x}_g \leq \bar{x}$$

Exemplo:

X = peso (kg) $\qquad$ x_i = 9, 7, 4, 5, 10

$$\bar{x} = \frac{9+7+4+5+10}{5} = 7 \text{ kg}$$

$$\bar{x}_g = \sqrt[5]{9 \times 7 \times 4 \times 5 \times 10} = 6{,}608 \text{ kg}$$

$$\bar{x}_h = \frac{5}{\frac{1}{9}+\frac{1}{7}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}} = 6{,}219 \text{ kg}$$

A igualdade só se verifica quando todos os valores do conjunto são iguais.

Bibliografia utilizada

SILVA, J. G. C. da. **Estatística Básica (versão preliminar).** Universidade Federal de Pelotas.

Silveira Junior, P. ; Machado, A.A. ; Zonta, E.P.; Silva, J.B. da. **Curso de Estatística** v.1. Pelotas: Universidade Federal de Pelotas, 1992, 135p.

Sistema Galileu de Educação Estatística. Disponível em: http://www.galileu.esalq.usp.br/topico.html