

Unidade IV - Inferência estatística

- 4.1. Introdução e histórico
- 4.2. Conceitos fundamentais
- 4.3. Distribuições amostrais e Teorema central do limite
- 4.4. Estimação de parâmetros
- 4.5. Testes de hipóteses
- 4.6. Quebras das pressuposições no processo de inferência
- 4.7. Testes de qui-quadrado

Teoria dos testes de hipóteses

Testes de hipóteses

- ⇒ Outro problema a ser resolvido pela Inferência Estatística é o de **testar uma hipótese**.
- ⇒ Feita uma afirmação a respeito de uma população (parâmetro) desejamos saber se os resultados experimentais (amostra) **contrariam tal afirmação**.
- ⇒ Muitas vezes, essa afirmação sobre a população é derivada de teorias desenvolvidas no campo do conhecimento por meio da observação e do raciocínio.
- ⇒ A adequação dessa teoria ao universo real pode ser verificada ou refutada pela amostra.
- ⇒ O objetivo do teste estatístico de hipótese é então fornecer uma metodologia que permita verificar se os dados amostrais trazem evidências que apoiam ou não a hipótese (estatística) formulada.

Teste de hipóteses

Procedimento estatístico onde se busca verificar uma hipótese a respeito da **população**, no sentido de aceitá-la ou rejeitá-la, a partir de **dados amostrais**, tendo por base a teoria das probabilidades.

Profa. Clause Piana

4

Algoritmo para construção de um teste de hipóteses

1. Definir as hipóteses estatísticas.
2. Fixar a taxa de erro aceitável.
3. Escolher a estatística para testar a hipótese e verificar as pressuposições para o seu uso.
4. Usar as observações da amostra para calcular o valor da estatística do teste.
5. Decidir sobre a hipótese testada e concluir.

Profa. Clause Piana

5

1. Hipóteses estatísticas

Hipóteses estatísticas

A hipótese estatística é uma suposição feita a respeito de um ou mais parâmetros (μ , σ^2 , π , etc.).

```

    graph TD
      A[Problema científico] -- Pergunta --> B[Hipótese de trabalho]
      B -- Resposta provisória --> C[Hipótese estatística]
  
```

Profa. Clause Piana 7

Existem dois tipos básicos de hipóteses estatísticas:

- ⇒ **Hipótese de nulidade (H_0)**: é a hipótese que está sob verificação. Esta hipótese supõe a igualdade dos parâmetros que estão sendo comparados.
- ⇒ **Hipótese alternativa (H_a)**: é a hipótese que será considerada caso a hipótese de nulidade seja rejeitada. Esta hipótese supõe que os parâmetros comparados são diferentes.

Situações comuns em testes de hipóteses a respeito de μ

- Comparação de uma média (μ) com um valor padrão (μ_0)
- Comparação entre duas médias (μ_1 e μ_2)

Profa. Clause Piana 8

■ Comparação de uma média (μ) com um valor padrão (μ_0)

```

    graph TD
      A[Uma população] --> B[Uma amostra]
      B --> C[Uma estimativa do parâmetro de interesse ( $\mu$ )]
      C --> D[Um valor conhecido e comprovado (valor padrão)]
  
```

Exemplo 1: Para verificar se uma nova droga é eficaz no tratamento da pressão alta, a pressão média de um grupo de pacientes submetidos a esta droga (amostra) é comparada com um valor que é considerado normal (valor padrão).

Profa. Clause Piana 9

Exemplo 2:

Um engenheiro de desenvolvimento de um fabricante de pneus está investigando a vida do pneu em relação a um novo componente de borracha. Ele fabricou 40 pneus e testou-os até o fim da vida em um teste na estrada. A média e o desvio padrão da amostra são 61.492 e 6.085 km, respectivamente. O engenheiro acredita que a vida média desse novo pneu supera 60.000 km. Teste a hipótese de que a verdadeira vida média do pneu não difere de 60.000 km e conclua a respeito da suposição do engenheiro.

Profa. Clause Piana 10

■ Comparação de uma média (μ) com um valor padrão (μ_0)

$H_0: \mu = \mu_0$ ou $\mu - \mu_0 = 0$

$H_a:$

- $\mu \neq \mu_0$ ou $\mu - \mu_0 \neq 0$ ← Bilateral
- $\mu > \mu_0$ ou $\mu - \mu_0 > 0$ ← Unilateral direita
- $\mu < \mu_0$ ou $\mu - \mu_0 < 0$ ← Unilateral esquerda

↑ Escolher uma das três

Profa. Clause Piana 11

■ Comparação entre duas médias (μ_1 e μ_2)

```

    graph TD
      A[População 1] --> B[Amostra 1]
      B --> C[Estimativa de  $\mu_1$ ]
      D[População 2] --> E[Amostra 2]
      E --> F[Estimativa de  $\mu_2$ ]
      C <--> F
  
```

Comparação das estimativas

Exemplo 1: Para verificar, entre dois métodos de ensino, qual é o mais eficiente, comparamos os desempenhos médios de dois grupos de alunos (duas amostras), cada um submetido a um método diferente.

Profa. Clause Piana 12

Exemplo 2:

Um pesquisador da área de computação está investigando a utilidade de duas diferentes linguagens de programação (A e B) na melhoria das tarefas computacionais.

Trinta programadores experientes, familiarizados com ambas as linguagens, foram divididos aleatoriamente em dois grupos. Cada grupo codificou uma função padrão em uma das linguagens e os tempos de codificação da função (em minutos) foram registrados.

As medidas de cada grupo são apresentadas no quadro abaixo.

	n	Média	Variância
Linguagem A	15	17,5	2,31
Linguagem B	15	20,5	3,02

Utilizando um teste de hipótese, verifique se, em média, o tempo de codificação da função padrão difere entre as linguagens.

Profa. Clause Piana 13

▣ Comparação entre duas médias (μ_1 e μ_2)

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ ou $\mu_1 - \mu_2 = 0$

H_A $\left\{ \begin{array}{l} \mu_1 \neq \mu_2 \text{ ou } \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \leftarrow \text{Bilateral} \\ \mu_1 > \mu_2 \text{ ou } \mu_1 - \mu_2 > 0 \leftarrow \text{Unilateral direita} \\ \mu_1 < \mu_2 \text{ ou } \mu_1 - \mu_2 < 0 \leftarrow \text{Unilateral esquerda} \end{array} \right.$

Escolher uma das três

Profa. Clause Piana 14

Exemplo 1:

Problema científico: Ração a base de soja promove maior ganho de peso em bovinos do que ração a base de milho?

População 1 - bovinos tratados com farelo de soja
População 2 - bovinos tratados farelo de milho

Variável em estudo: X - medida do ganho de peso (kg)

$E(X_1) = \mu_1$ = ganho de peso médio com farelo de soja
 $E(X_2) = \mu_2$ = ganho de peso médio com farelo de milho

Hipótese de trabalho: As duas rações têm efeitos diferentes sobre o ganho de peso de bovinos.

Profa. Clause Piana 15

Hipóteses estatísticas:

⇒ **Hipótese de nulidade:** o ganho de peso médio de bovinos tratados com farelo de soja não difere do ganho de peso médio de bovinos tratados com farelo de milho

⇒ **Hipótese de alternativa:** o ganho de peso médio de bovinos tratados farelo de soja difere do ganho de peso médio de bovinos tratados com farelo de milho

$\left\{ \begin{array}{l} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \text{ ou } \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ H_A : \mu_1 \neq \mu_2 \text{ ou } \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \leftarrow \text{Bilateral} \end{array} \right.$

Quando não temos motivos suficientes para supor que uma das médias será maior que a outra, formulamos uma hipótese alternativa bilateral (mais genérica).

Quando a hipótese alternativa é bilateral, dizemos que o teste de hipóteses é bilateral.

Exemplo 2:

Problema científico: Um novo inseticida é eficaz no combate à lagarta da soja?

População 1 - lavouras de soja com aplicação do inseticida
População 2 - lavouras de soja sem aplicação do inseticida

Variável em estudo: X - número de insetos mortos

$E(X_1) = \mu_1$ = número médio de insetos da população 1 (Com)
 $E(X_2) = \mu_2$ = número médio de insetos da população 2 (Sem)

Hipótese de trabalho: O novo inseticida é eficaz no combate à lagarta da soja

Profa. Clause Piana 17

Hipóteses estatísticas:

⇒ **Hipótese de nulidade:** a média de insetos mortos na lavoura com inseticida não difere da média de insetos mortos na lavoura sem inseticida

⇒ **Hipótese alternativa:** a média de insetos mortos na lavoura com inseticida é maior que a média de insetos mortos na lavoura sem inseticida

$\left\{ \begin{array}{l} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \text{ ou } \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ H_A : \mu_1 > \mu_2 \text{ ou } \mu_1 - \mu_2 > 0 \leftarrow \text{Unilateral direita} \end{array} \right.$

Quando temos motivos suficientes para supor que uma das médias será maior que a outra, podemos formular uma hipótese alternativa unilateral (mais específica).

Quando a hipótese alternativa é unilateral, dizemos que o teste de hipóteses é unilateral.

Objetivo: verificar a hipótese

Podemos verificar a hipótese de duas formas:

- ⇒ avaliar as populações inteiras (todos os bovinos tratados com as duas rações ou todas as lavouras de soja) e comparar suas médias
- ⇒ avaliar amostras retiradas das populações e utilizar um teste estatístico que compare as médias das amostras

Devemos considerar:

- ⇒ seria impossível avaliar todos os bovinos tratados com as duas rações ou todas as lavouras de soja
- ⇒ o processo de amostragem pode fornecer precisão suficiente

Será muito mais econômico e menos trabalhoso utilizar amostras das populações.

Profa. Clause Piana 19

Pressuposições:

- A variável em estudo tem distribuição normal
- As variâncias das populações são iguais
- As amostras retiradas das populações são independentes

Para determinar (dimensionar) o tamanho da amostra, devemos definir:

- ♦ o tamanho do erro que estamos dispostos a admitir
- ♦ a variabilidade aproximada das populações (σ^2)
- ♦ a magnitude da diferença a ser detectada

2. Erros de conclusão

Erros de conclusão

Como a hipótese sob verificação é H_0 , dois tipos de erro estão associados à decisão a respeito dela:

- ♦ **Erro Tipo I:** rejeitar H_0 quando esta é verdadeira
 $\alpha = P(\text{erro tipo I}) \rightarrow$ probabilidade de cometer o erro tipo I
- ♦ **Erro Tipo II:** não rejeitar H_0 quando esta é falsa
 $\beta = P(\text{erro tipo II}) \rightarrow$ probabilidade de cometer o erro tipo II

Como consequência:

- $1 - \alpha$ é a probabilidade de não cometer o erro tipo I (probabilidade de não rejeitar H_0 verdadeira)
- $1 - \beta$ é a probabilidade de não cometer o erro tipo II (probabilidade de rejeitar H_0 falsa)

A probabilidade $1 - \beta$ é denominada **poder do teste**.

Réu	Decisão do juiz	
	Não condenar	Condenar
Inocente	Acerto	Erro 1
Culpado	Erro 2	Acerto

H_0	Decisão	
	Não rejeitar	Rejeitar
Verdadeira	Acerto	Erro Tipo I
Falsa	Erro Tipo II	Acerto

Erro Tipo I: Declarar diferença quando ela não existe
Erro Tipo II: Não declarar diferença quando ela existe

Importante!!!

- ⇒ As duas taxas de erro α e β estão relacionadas negativamente, de modo que a redução de α implica no aumento de β e vice-versa.
- ⇒ Para que os testes de hipótese tenham validade, é necessário que sejam delineados de modo a minimizar os erros de conclusão.
- ⇒ O único meio de reduzir ambos os tipos de erro é aumentando o tamanho da amostra, o que nem sempre é viável.
- ⇒ Em geral, a preocupação está voltada para o erro tipo I, pois na maioria dos casos ele é considerado o mais grave.
- ⇒ A probabilidade de ocorrência do erro tipo I (α) é chamada de **nível de significância** do teste.

3. Estatística do teste

Estatística do teste

Para testar hipóteses a respeito do parâmetro μ , utilizamos a **variável aleatória T** que tem distribuição **t de Student**.

$$T = \frac{\hat{\theta} - \theta}{S(\hat{\theta})} \sim t(v)$$

onde:

- θ é o parâmetro estimado
- $\hat{\theta}$ é estimador do parâmetro
- $S(\hat{\theta})$ é o estimador do erro padrão do $\hat{\theta}$
- v é o número de graus de liberdade

1. Comparação de uma média (μ) com um valor padrão (μ_0)

Pressuposição: A variável em estudo tem distribuição normal

Hipótese sob verificação: $H_0 : \mu = \mu_0$

Estatística do teste: $T = \frac{\hat{\theta} - \theta}{S(\hat{\theta})} \sim t(v)$

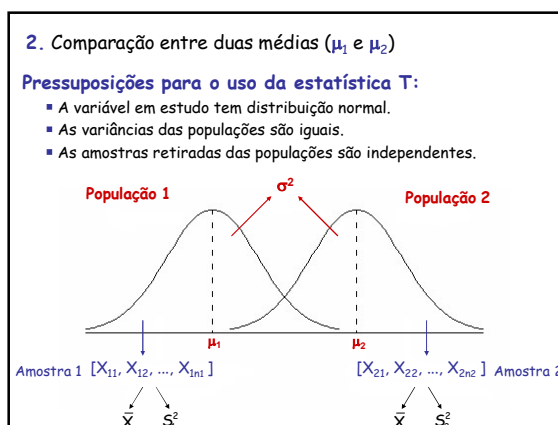
onde:

- $\theta = \mu = \mu_0$
- $\hat{\theta} = \bar{X}$
- $S(\hat{\theta}) = S(\bar{X}) = \frac{S}{\sqrt{n}}$
- $v = n - 1$

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

Estatística do teste

Valor que deve ser calculado na amostra



2. Comparação entre duas médias (μ_1 e μ_2)

Pressuposições:

- A variável em estudo tem distribuição normal
- As variâncias das populações são iguais
- As amostras retiradas das populações são independentes

Hipótese sob verificação: $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$

Estatística do teste: $T = \frac{\hat{\theta} - \theta}{S(\hat{\theta})} \sim t(v)$

onde:

- $\theta = \mu_1 - \mu_2 = 0$
- $\hat{\theta} = \bar{X}_1 - \bar{X}_2$
- $S(\hat{\theta}) = S(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = \sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) S^2}$
- $v = (n_1 - 1) + (n_2 - 1)$

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) S^2}}$$

Estatística do teste

Valor que deve ser calculado na amostra

1. Comparação de uma média (μ) com um valor padrão (μ_0)

Pressuposição: A variável em estudo tem distribuição normal

Hipótese sob verificação: $H_0 : \mu = \mu_0$

Estatística do teste: $T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t(v)$

2. Comparação entre duas médias (μ_1 e μ_2)

Pressuposições:

- A variável em estudo tem distribuição normal
- As variâncias das populações são iguais
- As amostras retiradas das populações são independentes

Hipótese sob verificação: $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$

Estatística do teste: $T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) S^2}} \sim t(v)$

Prof. Clause Piana

4. Critério de decisão

Comparação de duas médias $\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ H_A : \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \end{cases}$

Possíveis conclusões para H_0

1. H_0 é falsa: temos duas populações com médias diferentes

2. H_0 é verdadeira: as médias das duas populações não diferem
 $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu$

Portanto, em vez de duas populações, temos apenas uma

2. H_0 é verdadeira: as médias das duas populações não diferem
 $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu$

Portanto, em vez de duas populações, temos apenas uma

Possíveis conclusões para H_0

Rejeita H_0
 $H_A : \mu_1 \neq \mu_2$

Diferença real

Não rejeita H_0
 $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu$

Diferença casual

O teste de hipótese permite concluir se a diferença entre as médias amostrais é real ou casual.

Critério de decisão - Teste bilateral

Comparação de médias

$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$
 $H_A : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

Se H_0 é verdadeira, devemos esperar que o valor da estatística T seja próximo de zero.

Mas quanto o valor da estatística T pode se afastar de zero?

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) S^2}}$$

valores da estatística T

Comparação de médias

$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$
 $H_A: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

Se H_0 é verdadeira, devemos esperar que o valor da estatística T seja próximo de zero.
Mas quanto o valor da estatística T pode se afastar de zero?

Este limite é dado pelos valores críticos, que são estabelecidos com base no α .

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) S^2}}$$

Prof. Clause Piana 37

H_A bilateral

Mas quanto o valor da estatística T pode se afastar de zero?

Este limite é dado pelos valores críticos, que são estabelecidos com base no α .

⇒ Se o valor t (calculado na amostra) estiver entre $-t_{\alpha/2}$ e $t_{\alpha/2}$, não temos motivos para rejeitar H_0

⇒ Se o valor t (calculado na amostra) for menor que $-t_{\alpha/2}$ ou maior que $t_{\alpha/2}$, rejeitamos H_0

Como tomar a decisão a respeito de H_0 ?

Para decidir comparamos o valor da estatística T (calculado) com o valor crítico (tabelado):

⇒ Rejeitamos H_0 , ao nível α , se o valor da estatística, em módulo, for maior que o valor crítico:

$|t| > t_{\alpha/2} \Rightarrow t \text{ é atípico}$

⇒ Não temos motivos suficientes para rejeitar H_0 , ao nível α , se o valor da estatística, em módulo, for menor que o valor crítico:

$|t| \leq t_{\alpha/2} \Rightarrow t \text{ é típico}$

Prof. Clause Piana 39

Critério de decisão - Teste unilateral

Comparação de médias

$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$
 $H_A: \mu_1 - \mu_2 < 0$

H_A unilateral esquerda supõe que a diferença entre os parâmetros é um valor negativo, deste modo supomos também que a estatística T só assume valores negativos.

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) S^2}}$$

H_A unilateral esquerda

⇒ Se o valor t (calculado na amostra) for maior que $-t_{\alpha}$, não temos motivos para rejeitar H_0

⇒ Se o valor t (calculado na amostra) for menor que $-t_{\alpha}$, rejeitamos H_0

Prof. Clause Piana 41

Critério de decisão - Teste unilateral

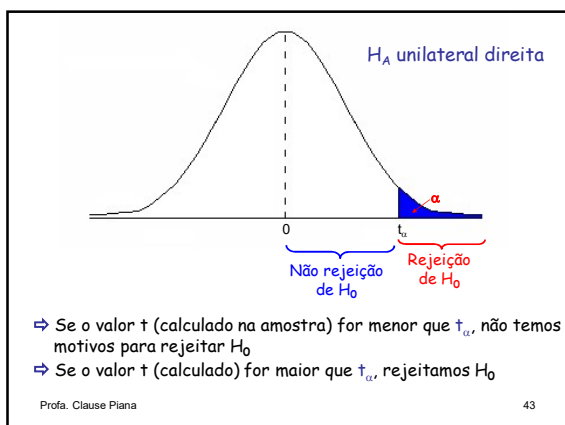
Comparação de médias

$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$
 $H_A: \mu_1 - \mu_2 > 0$

H_A unilateral direita supõe que a diferença entre os parâmetros é um valor positivo, deste modo supomos também que a estatística T só assume valores positivos.

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) S^2}}$$

Prof. Clause Piana 42



Como tomar a decisão a respeito de H_0 ?

Para decidir comparamos o valor da estatística T (calculado) com o valor crítico (tabelado):

⇒ Rejeitamos H_0 , ao nível α , se o valor da estatística, em módulo, for maior que o valor crítico:

$|t| > t_{\alpha} \Rightarrow t \text{ é atípico}$

⇒ Não temos motivos suficientes para rejeitar H_0 , ao nível α , se o valor da estatística, em módulo, for menor que o valor crítico:

$|t| \leq t_{\alpha} \Rightarrow t \text{ é típico}$

Profa. Clause Piana 44

Graus de Liberdade (v)	Limites bilaterais: $P(t > t_{\alpha})$							
	0,50	0,20	0,10	0,05	0,025	0,02	0,01	0,005
1	1,000	3,078	6,314	12,708	20,542	31,821	63,657	127,327
2	1,000	1,886	2,924	4,303	6,965	10,815	21,009	31,821
3	0,715	1,638	2,353	3,183	4,177	6,581	12,941	21,009
4	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	6,094	11,708	19,288
5	0,727	1,476	2,015	2,571	3,563	5,893	11,154	18,507
6	0,718	1,440	1,943	2,447	3,399	5,646	10,757	18,151
7	0,711	1,415	1,895	2,365	3,281	5,491	10,451	17,858
8	0,706	1,397	1,860	2,306	3,202	5,377	10,251	17,658
9	0,703	1,383	1,833	2,262	3,145	5,291	10,102	17,509
10	0,700	1,372	1,813	2,228	3,098	5,224	10,000	17,400
11	0,697	1,363	1,798	2,201	3,063	5,178	9,936	17,347
12	0,695	1,356	1,782	2,179	3,039	5,141	9,896	17,309
13	0,694	1,350	1,771	2,160	3,020	5,112	9,867	17,281
14	0,692	1,346	1,761	2,146	3,009	5,094	9,844	17,259
15	0,691	1,341	1,753	2,132	2,999	5,081	9,826	17,240
16	0,690	1,337	1,746	2,120	2,991	5,069	9,811	17,224
17	0,689	1,333	1,740	2,110	2,983	5,059	9,800	17,210
18	0,688	1,330	1,734	2,101	2,978	5,051	9,791	17,197
19	0,688	1,328	1,729	2,093	2,973	5,044	9,784	17,186
20	0,687	1,325	1,725	2,088	2,969	5,038	9,778	17,176
21	0,686	1,323	1,721	2,080	2,964	5,033	9,773	17,168
22	0,686	1,321	1,717	2,074	2,960	5,029	9,769	17,161
23	0,685	1,319	1,714	2,069	2,956	5,025	9,765	17,154
24	0,685	1,318	1,711	2,066	2,953	5,022	9,762	17,149
25	0,684	1,316	1,708	2,060	2,950	5,019	9,759	17,144
26	0,684	1,315	1,706	2,056	2,947	5,017	9,757	17,140
27	0,684	1,314	1,703	2,052	2,945	5,015	9,755	17,137
28	0,683	1,313	1,701	2,048	2,943	5,013	9,753	17,134
29	0,683	1,311	1,699	2,045	2,941	5,011	9,751	17,131
30	0,683	1,310	1,697	2,042	2,939	5,009	9,749	17,129
40	0,681	1,303	1,684	2,021	2,920	4,992	9,730	17,091
60	0,679	1,296	1,671	2,000	2,899	4,969	9,705	17,055
120	0,677	1,289	1,658	1,980	2,879	4,947	9,681	17,020
∞	0,674	1,282	1,645	1,960	2,861	4,929	9,658	16,987

Graus de Liberdade (v)	Limites unilaterais: $P(t > t_{\alpha})$					
	0,20	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005
1	1,677	3,078	6,314	12,708	31,821	63,657
2	1,108	1,886	2,924	4,303	6,965	10,815
3	0,978	1,638	2,353	3,183	4,177	6,581
4	0,941	1,533	2,132	2,776	3,747	6,094
5	0,925	1,476	2,015	2,571	3,563	5,893
6	0,917	1,440	1,943	2,447	3,399	5,646
7	0,911	1,415	1,895	2,365	3,281	5,491
8	0,906	1,397	1,860	2,306	3,202	5,377
9	0,903	1,383	1,833	2,262	3,145	5,291
10	0,900	1,372	1,813	2,228	3,098	5,224
11	0,897	1,363	1,798	2,201	3,063	5,178
12	0,895	1,356	1,782	2,179	3,039	5,141
13	0,894	1,350	1,771	2,160	3,020	5,112
14	0,892	1,346	1,761	2,146	3,009	5,094
15	0,891	1,341	1,753	2,132	2,999	5,081
16	0,890	1,337	1,746	2,120	2,983	5,069
17	0,889	1,333	1,740	2,110	2,978	5,059
18	0,888	1,330	1,734	2,101	2,973	5,051
19	0,888	1,328	1,729	2,093	2,969	5,044
20	0,887	1,325	1,725	2,088	2,964	5,038
21	0,886	1,323	1,721	2,080	2,960	5,033
22	0,886	1,321	1,717	2,074	2,956	5,029
23	0,885	1,319	1,714	2,069	2,953	5,025
24	0,885	1,318	1,711	2,066	2,950	5,022
25	0,884	1,316	1,708	2,060	2,947	5,019
26	0,884	1,315	1,706	2,056	2,945	5,017
27	0,884	1,314	1,703	2,052	2,943	5,015
28	0,883	1,313	1,701	2,048	2,941	5,013
29	0,883	1,311	1,699	2,045	2,939	5,011
30	0,883	1,310	1,697	2,042	2,937	5,009
40	0,881	1,303	1,684	2,021	2,920	4,992
60	0,879	1,296	1,671	2,000	2,899	4,969
120	0,877	1,289	1,658	1,980	2,879	4,947
∞	0,874	1,282	1,645	1,960	2,861	4,929

Critério de decisão

A regra de decisão a respeito de H_0 pode ser estabelecida com base num **valor crítico**:

⇒ Se o teste for **bilateral** (hipótese alternativa bilateral), o valor crítico será:
 $t_{\alpha/2(v)}$: valor da estatística T que delimita a área $\alpha/2$, para v graus de liberdade (Tabela: limites bilaterais)

⇒ Se o teste for **unilateral** (hipótese alternativa unilateral), o valor crítico será:
 $t_{\alpha(v)}$: valor da estatística T que delimita a área α , para v graus de liberdade (Tabela: limites unilaterais)

Profa. Clause Piana 46

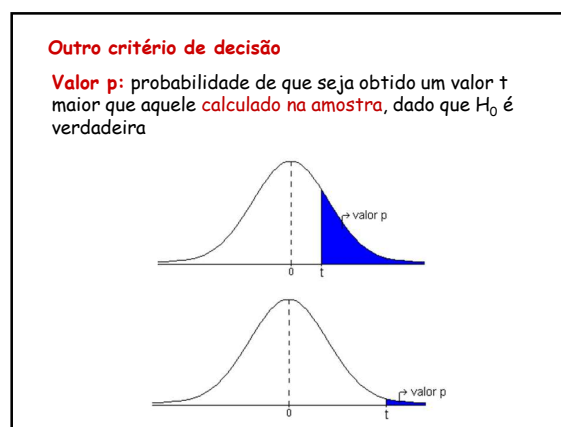
Nível de significância do teste

⇒ A probabilidade α de se cometer um erro tipo I é um valor arbitrário e recebe o nome de nível de significância do teste

⇒ O resultado da amostra é tanto mais significativa para rejeitar H_0 quanto menor for esse nível α . Ou seja, quanto menor for α , menor é a probabilidade de se obter uma amostra com estatística pertencente a região crítica, sendo pouco verossímil a obtenção de uma amostra da população para a qual H_0 seja verdadeira.

⇒ A probabilidade do erro tipo II, por outro lado, na maioria dos casos, não pode ser calculada, pois a hipótese alternativa usualmente especifica um conjunto de valores para o parâmetro. Esta probabilidade β só pode ser calculada se for especificado um valor alternativo para μ .

⇒ Usualmente, o valor α é fixado em 5%, 1% e 0,1%. A fixação do valor de α envolve uma questionável arbitrariedade. Neste sentido, há um modo alternativo de se proceder, que será exposto a seguir.



Outro critério de decisão

Valor p: probabilidade de que seja obtido um valor de T maior do que aquele calculado na amostra, dado que H_0 é verdadeira

Como tomar a decisão a respeito de H_0 ?

- ⇒ Se o **valor p** for maior que α : **não rejeitamos** a hipótese nula pois **t é típico** ou está em uma região de alta probabilidade
- ⇒ Se o **valor p** for menor que α : **rejeitamos** a hipótese nula pois **t é atípico** ou está em uma região de baixa probabilidade

Profa. Clause Piana 49

Se $p > \alpha \Rightarrow t$ é típico

Não rejeitamos a hipótese de nulidade

Profa. Clause Piana 50

Se $p < \alpha \Rightarrow t$ é atípico

Rejeitamos a hipótese de nulidade

Profa. Clause Piana 51

Decisão sobre H_0

Critério 1: comparar o módulo de t calculado com o t_α (tabelado)

- $|t| > t_\alpha \rightarrow$ Rejeição de $H_0 \rightarrow t$ grande é evidência contra H_0
- $|t| \leq t_\alpha \rightarrow$ Não rejeição de $H_0 \rightarrow t$ pequeno é evidência a favor de H_0

Critério 2: comparar o valor p com o α

- $p < \alpha \rightarrow$ Rejeição de $H_0 \rightarrow$ valor p pequeno é evidência contra H_0
- $p \geq \alpha \rightarrow$ Não rejeição de $H_0 \rightarrow$ valor p grande é evidência a favor de H_0

Poder do teste

- ⇒ Vimos que $1-\beta$ é a probabilidade de não cometer o erro tipo II, ou seja, é a probabilidade de rejeitar H_0 quando ela é falsa.
- ⇒ Esta probabilidade $1-\beta$ é denominada **poder do teste**.
- ⇒ Assim, quanto maior a probabilidade de um teste rejeitar H_0 mais poderoso ele é, pois tem maior probabilidade de detectar a diferença entre as médias.

Qual dos testes é mais poderoso: **unilateral** ou **bilateral**?

O mais poderoso é aquele que, para um mesmo valor α , tem maior probabilidade rejeitar H_0 .

Profa. Clause Piana 53

$\alpha = 0,05$

teste unilateral

teste bilateral

No teste unilateral o valor t crítico é sempre menor do que o crítico no teste bilateral, porque a área a sua direita deve corresponder a todo α . Esta área é o dobro da área à direita do valor t crítico do teste bilateral.

- Se o t calculado for menor do que o $t_{0,05}$, H_0 não será rejeitada em nenhum dos testes.
- Se o t calculado for maior do que o $t_{0,025}$, H_0 será rejeitada em ambos os testes.
- Se o t calculado estiver entre de $t_{0,05}$ e $t_{0,025}$, H_0 será rejeitada no teste unilateral, mas não será rejeitada no teste bilateral.

O teste **unilateral** é mais poderoso!

Considerações finais

- ⇒ Os intervalos de confiança e os testes de hipóteses bilaterais são procedimentos estatísticos relacionados.
- ⇒ Se forem utilizados para analisar os mesmos dados, ao mesmo nível de significância, devem conduzir aos mesmos resultados.
- ⇒ O intervalo de confiança para uma média está relacionado com o teste de hipóteses que compara uma média com um padrão.
 H_0 não rejeitada \Leftrightarrow valor padrão está coberto pelo intervalo
- ⇒ O intervalo de confiança para a diferença entre duas médias está relacionado com o teste de hipóteses que compara duas médias.
 H_0 não rejeitada \Leftrightarrow zero está coberto pelo intervalo

Intervalo de confiança para uma média (μ)

$$IC(\mu; 1-\alpha): \bar{X} \pm t_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

Estatística T para comparação de média (μ) com valor padrão (μ_0)

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \quad \text{Valor crítico: } t_{\alpha/2}$$

- ⇒ Se no teste de hipóteses, ao nível de 1% de significância, rejeitamos H_0 , significa que a diferença entre a média e o valor padrão não é zero, ou seja, média e valor padrão são diferentes.
- ⇒ Construindo o intervalo de confiança para μ , ao nível de 99%, devemos esperar que o valor padrão (μ_0) esteja fora do intervalo. Caso contrário, os resultados seriam contraditórios.

Intervalo de confiança para a diferença entre duas médias ($\mu_1 - \mu_2$)

$$IC(\mu_1 - \mu_2; 1-\alpha): \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \pm t_{\alpha/2} \sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) S^2}$$

Estatística T para a comparação entre duas médias (μ_1 e μ_2)

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) S^2}} \quad \text{Valor crítico: } t_{\alpha/2}$$

- ⇒ Se no teste de hipóteses, ao nível de 5% de significância, não rejeitamos H_0 , significa que a diferença entre as duas médias é zero, ou seja, as médias são iguais.
- ⇒ Construindo o intervalo de confiança, ao nível de 95%, para a diferença entre as médias ($\mu_1 - \mu_2$), devemos esperar que o valor zero seja coberto pelo intervalo.

Exemplos resolvidos

Exemplo 1.

O fabricante de uma certa marca de aparelhos eletrônicos informou que a potência média dos seus aparelhos é de 27 microwatts. O gerente de uma loja que vende os aparelhos utiliza uma amostra de 15 aparelhos para verificar se a informação do fabricante é verdadeira. Os valores (em microwatts) obtidos para a amostra foram os seguintes: 26,7; 25,8; 24,0; 24,9; 26,4; 25,9; 24,4; 21,7; 24,1; 25,9; 27,3; 26,9; 27,3; 24,8 e 23,6.

Utilize um teste de hipótese, ao nível de 5% de significância, e verifique qual foi a conclusão do gerente.

Resolução: Variável em estudo: X = potência de aparelhos eletrônicos (microwatts)

Pressuposição: A variável em estudo tem distribuição normal.

Hipóteses $\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 = 27 \\ H_A: \mu \neq \mu_0 = 27 \end{cases}$ Taxa de erro tipo I: $\alpha = 0,05$

Cálculo da estatística do teste

$$\bar{x} = 25,31 \quad n = 15 \quad T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \rightarrow t = \frac{25,31 - 27}{\frac{1,589}{\sqrt{15}}} = -4,12$$

Decisão: $|t| = -4,12| > t_{\alpha/2(14)} = 2,145 \rightarrow$ Rejeitamos H_0

Conclusão: Concluímos, ao nível de 5% de significância, que a verdadeira potência média de aparelhos eletrônicos desta marca difere de 27 microwatts. Portanto, a informação do fabricante não é verdadeira.

Exemplo 2.

Um pesquisador da área de computação está investigando a utilidade de duas diferentes linguagens de programação (A e B) na melhoria das tarefas computacionais.

Trinta programadores experientes, familiarizados com ambas as linguagens, foram divididos aleatoriamente em dois grupos. Cada grupo codificou uma função padrão em uma das linguagens e os tempos de codificação da função (em minutos) foram registrados.

As medidas de cada grupo são apresentadas no quadro abaixo.

	n	Média	Variância
Linguagem A	15	17,5	2,31
Linguagem B	15	20,5	3,02

Utilizando um teste de hipótese, verifique se, em média, o tempo de codificação da função padrão difere entre as linguagens.

Resolução: Variável em estudo: X = tempo de codificação da função (minutos)

- 1. Pressuposições:** 1. A variável em estudo tem distribuição normal.
2. As variâncias das populações são homogêneas.
3. As amostras retiradas das populações são independentes.

2. Hipóteses estatísticas:
$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_A : \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$$

3. Taxa de erro tipo I: $\alpha = 0,05$

4. Estatística do teste:
$$t = \frac{17,5 - 20,5}{\sqrt{\left(\frac{1}{15} + \frac{1}{15}\right) 2,67}} = \frac{-3}{0,5967} = -5,028$$

5. Decisão e conclusão:

$$\alpha = 0,05$$

$$v = (15 - 1) + (15 - 1) = 28$$

$$t_{\alpha/2(28)} = 2,048$$

$$|-5,028| > t_{\alpha/2(28)} = 2,048$$

Sendo o t calculado maior que o crítico,
rejeitamos H_0 .

Concluimos, ao nível de 5% de significância, que o tempo médio de programadores que usam a linguagem A difere do tempo médio de programadores que usam a linguagem B. Portanto, a linguagem A, em média, é mais eficiente que a linguagem B na execução das tarefas computacionais.

Bibliografia

BUSSAB, W.O.; MORETTIN, P.A. *Estatística Básica*. São Paulo: Saraiva, 2006. 526p.

FERREIRA, D.F. *Estatística Básica*. Lavras: Editora UFLA, 2005, 664p.

MLODINOW, L. *O andar do bêbado. Como o acaso determina nossas vidas*. Rio de Janeiro: Editora Zahar, 2009, 264p.

SILVEIRA JÚNIOR, P., MACHADO, A.A., ZONTA, E.P., SILVA, J.B. *da Curso de Estatística v.1*, Pelotas: Universidade Federal de Pelotas, 1989. 135p.

Sistema Galileu de Educação Estatística. Disponível em:
<http://www.galileu.esalq.usp.br/topico.html>