Unidade IV – Inferência estatística

4.1. Introdução e histórico
4.2. Conceitos fundamentais
4.3. Distribuições amostrais e Teorema central do limite
4.4. Estimação de parâmetros
4.5. Testes de hipóteses
4.6. Quebras das pressuposições no processo de inferência
4.7. Testes de qui-quadrado

Testes de qui-quadrado (χ^2)

Duas situações de aplicação

Profa. Clause Piana 2

Situação 1. De acordo com a hereditariedade mendeliana, as proporções fenotípicas resultantes de um cruzamento são: 9/16, 3/16 e 4/16.

Um pesquisador realizou cruzamentos entre animais de uma certa raça bovina com o objetivo de estudar o tipo de herança do caráter pelagem e obteve os seguintes resultados:

Pelagem	Vermelha	Preta	Branca	Totais
Número de animais	72	34	38	144

Estes resultados estão de acordo com a teoria mendeliana?

Situação 2. Um experimento foi realizado com o objetivo de estudar a eficácia de um novo soro. Foram utilizadas duzentas cobaias doentes, das quais 100 receberam o soro e as outras 100 não receberam. Os resultados observados foram os seguintes:

Tratamento	Cura		Totais
	Sim	Não	
Com soro	75	25	100
Sem soro	65	35	100
Totais	140	60	200

A cura depende ou não do tratamento?

Testes de qui-quadrado (χ^2)

- ⇨ Utilizados para testar hipóteses a respeito de frequências observadas nas classes de variáveis qualitativas ou atributos (cor, forma, estado, opinião, etc.)
- ⇨ As alternativas dos atributos são denominadas classes ou categorias
- ⇨ Os dados de enumeração provenientes da contagem dos indivíduos enquadrados nas classes do atributo representam as frequências observadas
- ⇨ Os dados de enumeração resultantes das proporções de uma teoria ou de proporções previamente fixadas são denominados frequências esperadas
- ⇨ O teste consiste em comparar as frequências observadas com frequências esperadas para essas classes

Exemplo: situação 1:

Variável qualitativa ou atributo

Classes ou categorias

Pelagem	Vermelha	Preta	Branca	Totais
Número de animais	72	34	38	144

Freqüências observadas

Dados discretos

Exemplo: situação 1:

Teoria mendeliana → proporções: 9/16, 3/16 e 4/16

Pelagem	Vermelha	Preta	Branca	Totais
Freqüência observada	72	34	38	144
Frequência esperada	81	27	36	144

Outros exemplos de aplicação dos testes qui-quadrado:

- proporções de germinação de sementes
- proporções de respostas de pessoas que participam de pesquisas de opinião
- proporção de peças defeituosas que saem de uma linha de montagem
- estudos no campo da genética, após cruzamentos de indivíduos

É possível aplicar o teste para um único atributo qualitativo ou para dois atributos conjuntamente.

Tabela de classificação simples: um atributo qualitativo

Objetivo: verificar se as freqüências observadas concordam com uma determinada teoria.

Os indivíduos são classificados segundo um único atributo qualitativo (A) e dispostos em uma tabela junto com as frequências esperadas de acordo com a teoria.

A	A_1	A_2	...	A_k
Freqüência observada	X_1	X_2	...	X_k
Freqüência esperada	E_1	E_2	...	E_k

Hipóteses estatísticas

A	A_1	A_2	...	A_k
Freqüência observada	X_1	X_2	...	X_k
Freqüência esperada	E_1	E_2	...	E_k

Hipótese de concordância ou aderência: supõem que os dados observados concordam ou se ajustam a uma determinada teoria dada pelas frequências esperadas

H_0: as frequências observadas **concordam** com as frequências esperadas

H_A: as frequências observadas **não concordam** com as frequências esperadas

Estatística do Teste

Para verificar se as diferenças entre as frequências observadas e frequências esperadas são reais ou casuais, utilizamos o teste qui-quadrado, dado pela estatística Q que tem distribuição qui-quadrado com parâmetro ν:

$$Q = \sum_{i=1}^{k} \frac{(X_i - E_i)^2}{E_i} \sim \chi^2(\nu),$$

onde:

X_i é a frequência observada da classe i
E_i é a frequência esperada da classe i
k é o total de classes do atributo
$\nu = k - 1$ é o número de graus de liberdade

Exemplo: situação 1:

Pelagem	Vermelha	Preta	Branca	Totais
Freqüência observada (X_i)	72	34	38	144
Freqüência esperada (E_i)	81	27	36	144

$$Q = \sum_{i=1}^{k} \frac{(X_i - E_i)^2}{E_i}$$

$$q = \frac{(72-81)^2}{81} + \frac{(34-27)^2}{27} + \frac{(38-36)^2}{36}$$

$$q = 1 + 1{,}8148 + 0{,}1111 = 2{,}9259$$

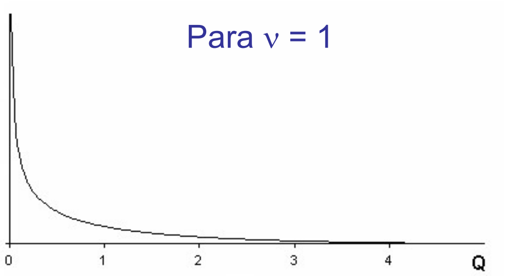
Distribuição qui-quadrado (χ^2)

A variável Q é definida como a soma dos quadrados de variáveis Z independentes entre si:

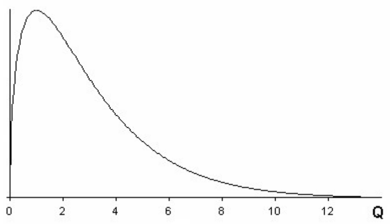
$$Q = Z_1^2 + Z_2^2 + \ldots + Z_\nu^2 \sim \chi^2\,(\nu)$$

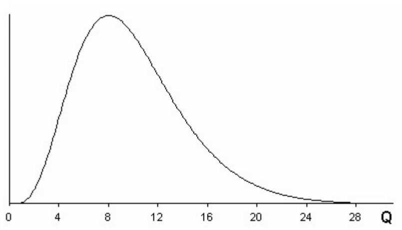
Sendo definida como uma soma de quadrados, os valores da variável Q nunca serão negativos.

Quando $\nu = 1$, a curva assume um formato atípico.



Quando $\nu > 1$, a curva assume a forma assimétrica positiva.





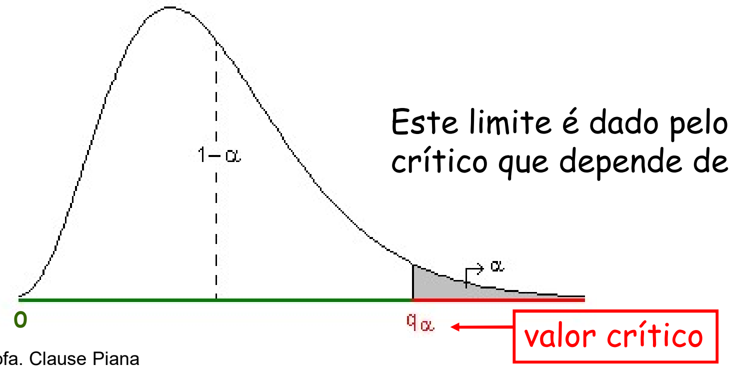
A distribuição χ^2 tem média $\mu = \nu$ e variância $\sigma^2 = 2\nu$ e se aproxima da normal quando ν cresce.

Critério de Decisão

Se H_0 é verdadeira, devemos esperar que o valor da estatística Q seja próximo de zero.

$$Q=\sum_{i=1}^{k}\frac{(X_i-E_i)^2}{E_i}\cong 0$$

Mas quão próximo de zero a estatística Q deve estar?

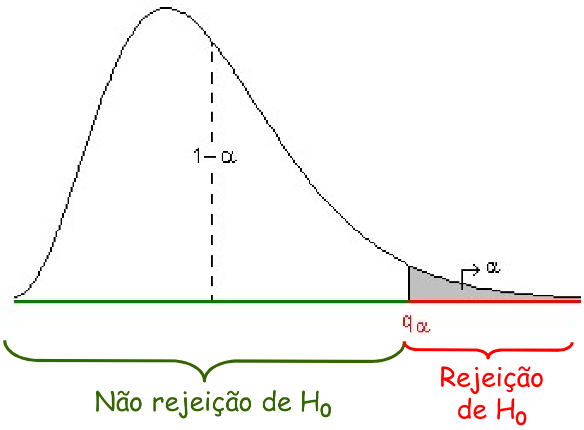


Este limite é dado pelo valor crítico que depende de α e ν.

Profa. Clause Piana 15

Para decidir comparamos o valor da estatística Q (calculado) com o valor crítico (tabelado):

$q_{\alpha(\nu)}$: valor da estatística Q que delimita a área α, para ν graus de liberdade (Tabela da distribuição qui-quadrado)



Se $q < q_\alpha$ → não temos motivos para rejeitar H_0

Se $q > q_\alpha$ → rejeitamos H_0

Tabela da distribuição qui-quadrado.

Graus de Liberdade	Nível de significância (α)									
	Esquerda (q')					Direita (q)				
(ν)	0,005	0,01	0,025	0,05	0,1	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005
1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	0,01	0,02	0,05	0,10	0,21	4,61	5,99	7,38	9,21	10,60
3	0,07	0,11	0,22	0,35	0,58	6,25	7,81	9,35	11,34	12,84
4	0,21	0,30	0,48	0,71	1,06	7,78	9,49	11,14	13,28	14,86
5	0,41	0,55	0,83	1,15	1,61	9,24	11,07	12,83	15,09	16,75
6	0,68	0,87	1,24	1,64	2,20	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55
7	0,99	1,24	1,69	2,17	2,83	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	13,36	15,51	17,53	20,09	21,95
9	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19
11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	17,28	19,68	21,92	24,72	26,76
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	18,55	21,03	23,34	26,22	28,30
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	21,06	23,68	26,12	29,14	31,32
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	22,31	25,00	27,49	30,58	32,80
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	23,54	26,30	28,85	32,00	34,27
17	5,70	6,41	7,56	8,67	10,09	24,77	27,59	30,19	33,41	35,72
18	6,26	7,01	8,23	9,39	10,86	25,99	28,87	31,53	34,81	37,16
19	6,84	7,63	8,91	10,12	11,65	27,20	30,14	32,85	36,19	38,58
20	7,43	8,26	9,59	10,85	12,44	28,41	31,41	34,17	37,57	40,00
21	8,03	8,90	10,28	11,59	13,24	29,62	32,67	35,48	38,93	41,40
22	8,64	9,54	10,98	12,34	14,04	30,81	33,92	36,78	40,29	42,80
23	9,26	10,20	11,69	13,09	14,85	32,01	35,17	38,08	41,64	44,18
24	9,89	10,86	12,40	13,85	15,66	33,20	36,42	39,36	42,98	45,56
25	10,52	11,52	13,12	14,61	16,47	34,38	37,65	40,65	44,31	46,93
26	11,16	12,20	13,84	15,38	17,29	35,56	38,89	41,92	45,64	48,29
27	11,81	12,88	14,57	16,15	18,11	36,74	40,11	43,19	46,96	49,64
28	12,46	13,56	15,31	16,93	18,94	37,92	41,34	44,46	48,28	50,99
29	13,12	14,26	16,05	17,71	19,77	39,09	42,56	45,72	49,59	52,34
30	13,79	14,95	16,79	18,49	20,60	40,26	43,77	46,98	50,89	53,67
40	20,71	22,16	24,43	26,51	29,05	51,81	55,76	59,34	63,69	66,77
50	27,99	29,71	32,36	34,76	37,69	63,17	67,50	71,42	76,15	79,49
60	35,53	37,48	40,48	43,19	46,46	74,40	79,08	83,30	88,38	91,95
70	43,28	45,44	48,76	51,74	55,33	85,53	90,53	95,02	100,43	104,21
80	51,17	53,54	57,15	60,39	64,28	96,58	101,88	106,63	112,33	116,32
90	59,20	61,75	65,65	69,13	73,29	107,57	113,15	118,14	124,12	128,30
100	67,33	70,06	74,22	77,93	82,36	118,50	124,34	129,56	135,81	140,17

Tabela de classificação dupla ou de contingência: dois atributos.

Objetivo: verificar se dois atributos qualitativos (A e B) inerentes a um mesmo indivíduo são independentes entre si.

Os indivíduos são classificados segundo esses dois atributos e as frequências observadas são dispostas numa tabela junto com as frequências que seriam esperadas no caso de independência.

A	B			
	B_1	B_2	…	B_s
A_1	X_{11} (E_{11})	X_{12} (E_{12})	…	X_{1s}(E_{1s})
A_2	X_{21} (E_{21})	X_{22} (E_{22})	…	X_{2s}(E_{2s})
…	…	…	X_{ij}(E_{ij})	…
A_r	X_{r1} (E_{r1})	X_{r2} (E_{r2})	…	X_{rs}(E_{rs})

Frequência observada na célula ij

Frequência esperada na célula ij

Onde:

i = número da classe do atributo A, tal que i = 1, 2, ..., r.

j = número da classe do atributo B, tal que j= 1, 2, ..., s.

Hipóteses estatísticas

A	B			
	B_1	B_2	...	B_s
A_1	X_{11} (E_{11})	X_{12} (E_{12})	...	X_{1s}(E_{1s})
A_2	X_{21} (E_{21})	X_{22} (E_{22})	...	X_{2s}(E_{2s})
...	...	...	...	...
A_r	X_{r1} (E_{r1})	X_{r2} (E_{r2})	...	X_{rs}(E_{rs})

Hipótese de independência: supõem que as variáveis A e B independem entre si

H_0: o atributo A **independe** do atributo B

H_A: o atributo A **depende** do atributo B

Tabelas de classificação dupla

Como calcular a frequência esperada na célula ij?

Multiplicando o total da linha i (X_{i+}) pelo total da coluna j (X_{+j}) e dividindo pelo total geral (X_{++}), ou seja, usando a seguinte expressão:

$$E_{ij} = \frac{X_{i+} \times X_{+j}}{X_{++}}$$

A	B				Totais
	B_1	B_2	...	B_s	
A_1	X_{11} (E_{11})	X_{12} (E_{12})	...	X_{1s}(E_{1s})	X_{1+}
A_2	X_{21} (E_{21})	X_{22} (E_{22})	...	X_{2s}(E_{2s})	X_{2+}
...	...	...	X_{ij}(E_{ij})	...	X_{i+}
A_r	X_{r1} (E_{r1})	X_{r2} (E_{r2})	...	X_{rs}(E_{rs})	X_{r+}
Totais	X_{+1}	X_{+2}	X_{+j}	X_{+s}	X_{++}

Exemplo: situação 2: Frequências esperadas

Tratamento	Cura		Totais
	Sim	Não	
Com soro	75 (70)	25 (30)	100
Sem soro	65 (70)	35 (30)	100
Totais	140	60	200

$$E_{11} = \frac{100 \times 140}{200} = 70 \qquad E_{12} = \frac{100 \times 60}{200} = 30$$

$$E_{21} = \frac{100 \times 140}{200} = 70 \qquad E_{22} = \frac{100 \times 60}{200} = 30$$

Estatística do Teste

Para verificar se as diferenças entre as frequências observadas e frequências esperadas são reais ou casuais, utilizamos a estatística Q, assim definida:

$$Q = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{(X_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} \sim \chi^2(\nu),$$

onde:

X_{ij} é a frequência observada da linha i e coluna j
E_{ij} é a frequência esperada da linha i e coluna j
r é o número total de linhas (classes do atributo A)
s é o número total de colunas (classes do atributo B)
$\nu = (r-1) \times (s-1)$ é o número de graus de liberdade

Restrições ao uso do teste de qui-quadrado

1. O teste é válido apenas para frequências absolutas

2. Sempre que se trabalha com apenas um grau de liberdade, deve-se usar uma "correção de continuidade" para os dados de enumeração

Correção de Yates

$$Q = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(|X_i - E_i| - 0{,}5\right)^2}{E_i}$$

3. O número de observações (n) não deve ser inferior a 20 e a freqüência esperada mínima não deve ser inferior a 1

4. Quando tivermos diversas classes com frequências esperadas menores do que 5, convém agrupá-las em uma só classe

Exemplo resolvido: Tabela de classificação simples

Um pesquisador realizou cruzamentos entre animais de uma certa espécie bovina com o objetivo de estudar o tipo de herança do caráter pelagem e obteve os seguintes resultados:

Pelagem	Vermelha	Preta	Branca	Totais
Freqüência observada (X_i)	72	34	38	144
Freqüência esperada (E_i)	81	27	36	144

Teste a hipótese de concordância com a teoria mendeliana, usando α=0,05.

Passo 1: Estabelecer as hipóteses do teste:

H_0: as freqüências observadas concordam com as esperadas

H_A: as freqüências observadas não concordam com as esperadas

Passo 2: Determinar o número de graus de liberdade.

ν = k-1 =3 – 1 = 2

Não há necessidade de usar a "correção de continuidade"

Passo 3: Calcular a estatística do teste: $Q = \sum_{i=1}^{k} \frac{(X_i - E_i)^2}{E_i}$

Pelagem	Vermelha	Preta	Branca	Totais
Freqüência observada (X_i)	72	34	38	144
Freqüência esperada (E_i)	81	27	36	144

$$q = \frac{(72-81)^2}{81} + \frac{(34-27)^2}{27} + \frac{(38-36)^2}{36}$$

$$q = 1 + 1{,}8148 + 0{,}1111 = 2{,}9259$$

Passo 4: Determinar o valor crítico e decidir sobre H_0.

$$\left.\begin{matrix}\alpha = 0{,}05 \\ \nu = 2\end{matrix}\right\} \; q_{(\alpha;\ \nu)} = 5{,}99 \; > q = 2{,}9259$$

Decisão: Não temos motivos para rejeitar H_0.

Passo 5: Redigir a conclusão.

Concluímos, ao nível de 5% de significância, que as freqüências observadas não diferem significativamente das freqüências esperadas segundo a herança mendeliana.

Exemplo resolvido: Classificação dupla

Um experimento foi realizado com o objetivo de estudar a eficácia de um novo soro. Foram utilizadas duzentas cobaias doentes, das quais 100 receberam o soro e as outras 100 não receberam. Os resultados observados foram os seguintes:

Tratamento	Curados	Não curados	Totais
Com soro	75 (70)	25 (30)	100
Sem soro	65 (70)	35 (30)	100
Totais	140	60	200

Teste a hipótese de independência dos atributos, usando α=0,01.

Passo 1: Estabelecer as hipóteses do teste:

H_0: Cura independe do Tratamento
H_A: Cura depende do Tratamento

Passo 2: Determinar o número de graus de liberdade.

$\nu = (r-1)\times(s-1) = 1 \times 1 = 1$

Há necessidade de usar a "correção de continuidade"

Passo 3: Calcular a estatística do teste: $Q = \sum_{i,j} \frac{\left(\left|X_{ij} - E_{ij}\right| - 0,5\right)^2}{E_{ij}}$

Tratamento	Curados	Não curados	Totais
Com soro	75 (70)	25 (30)	100
Sem soro	65 (70)	35 (30)	100
Totais	140	60	200

$$q = \frac{(|75-70| - 0,5)^2}{70} + \frac{(|25-30| - 0,5)^2}{30} + \frac{(|65-70| - 0,5)^2}{70} + \frac{(|35-30| - 0,5)^2}{30}$$

$$q = 0,2893 + 0,675 + 0,2893 + 0,675 = 1,9286$$

Passo 4: Determinar o valor crítico e decidir sobre H_0.

$$\left.\begin{array}{l}\alpha = 0{,}01 \\ \nu = 1\end{array}\right\} q_{(\alpha;\ \nu)} = 6{,}63 \ > q = 1{,}9296$$

Decisão: Não temos motivos para rejeitar H_0.

Passo 5: Redigir a conclusão.

Concluímos, ao nível de 1% de significância, que as frequências observadas não diferem significativamente das frequências esperadas. Portanto, não temos motivos para concluir que a cura depende do tratamento.