Unidade II – Estatística descritiva

Medidas descritivas

⇨ São funções de valores de uma variável numérica

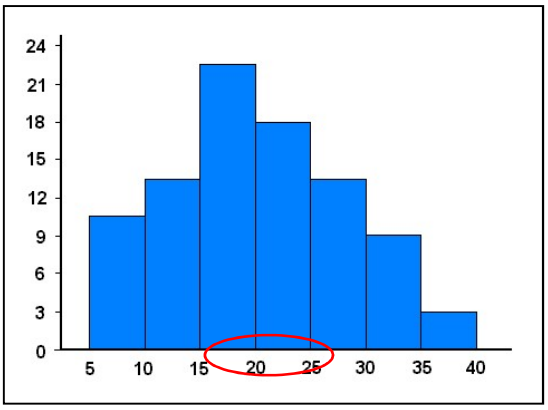
Objetivo → reduzir um conjunto de dados numéricos a um pequeno grupo de valores que deve fornecer toda a informação relevante a respeito desses dados

⇨ Podem ser classificadas em quatro grupos:

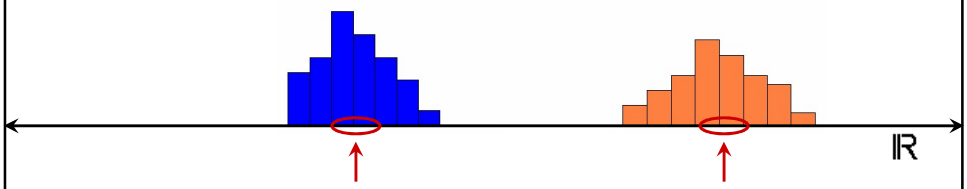
- Medidas de localização ou tendência central
- Medidas separatrizes
- Medidas de variação ou dispersão
- Medidas de formato

Medidas de localização ou tendência central: descrevem o centro da distribuição.

Expectativa: centro contém a maior parte das observações

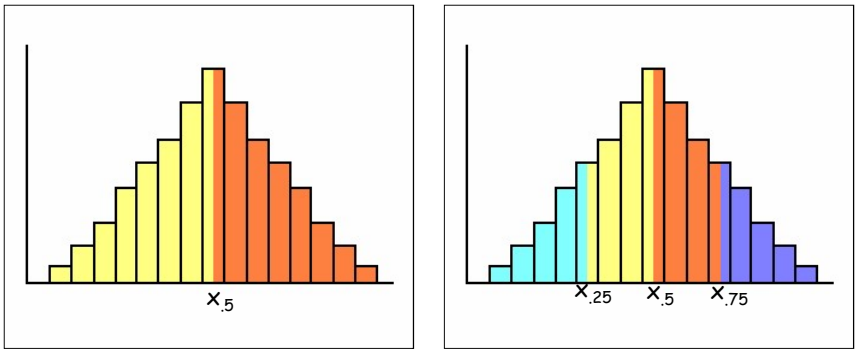


Medidas de localização ou tendência central: descrevem valores que caracterizam o centro da distribuição.

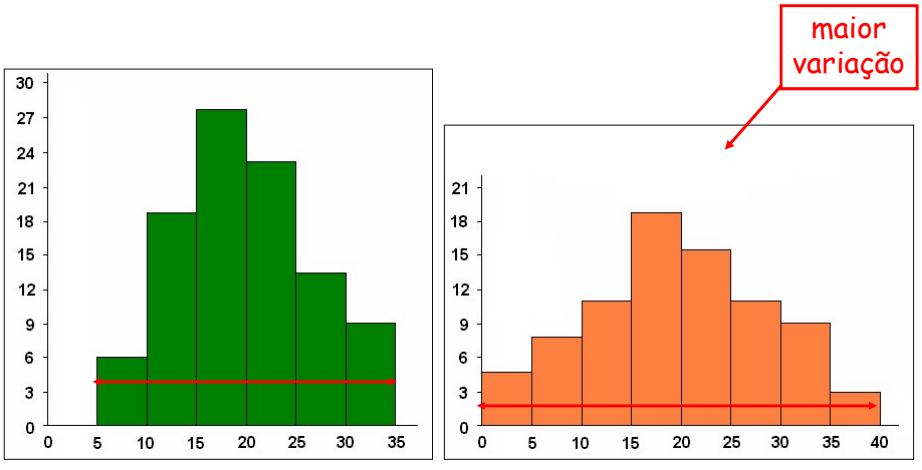


Dão ideia da localização das distribuições na reta do reais

Medidas separatrizes: indicam limites para proporções de observações em um conjunto de dados ordenado

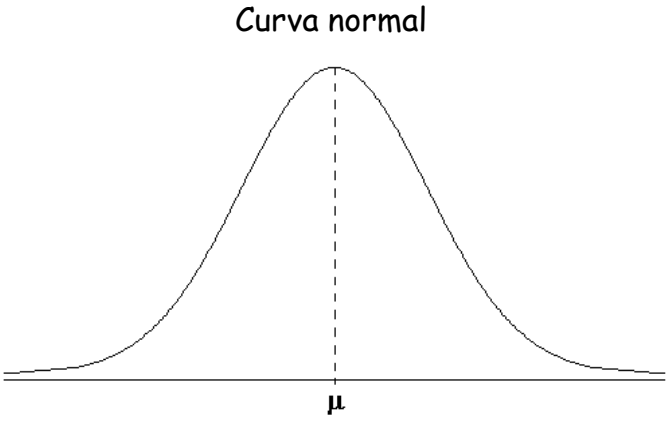


Medidas de variação ou dispersão: informam quanto os valores de um conjunto de dados diferem entre si.



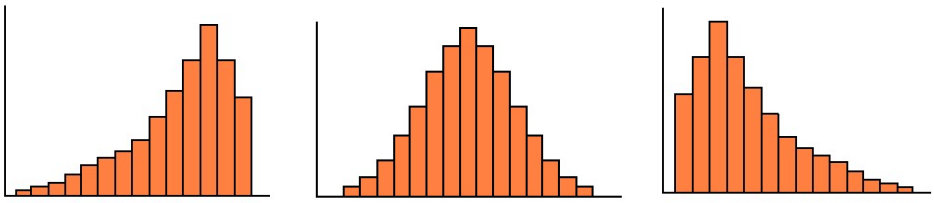
Medidas de formato

Informam sobre a assimetria e a curtose da distribuição em relação à curva normal



Medidas de formato

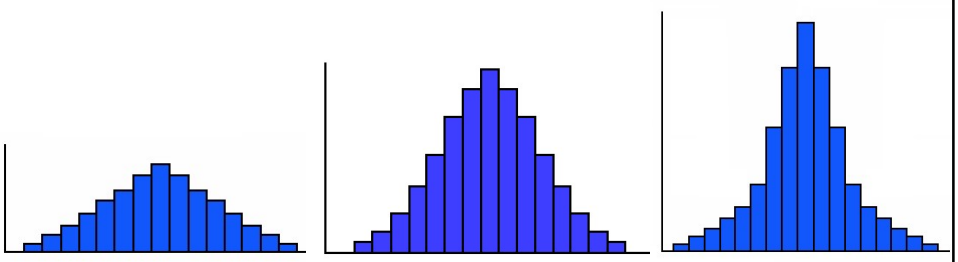
Assimetria: simetria da distribuição em relação à curva normal. Como se distribuem as observações em torno da média?



assimétrica negativa | simétrica | assimétrica positiva

Medidas de formato

Curtose: achatamento da distribuição em relação à curva normal. Como se concentram as observações no centro ou nas caudas da distribuição?



Platicúrtica Mesocúrtica Leptocúrtica

Plat(i)- [Do gr. *platÿs*]: 'chato', 'plano', 'largo'

Lept(o)- [Do gr. *leptós*]:'delgado', 'miúdo', 'magro', 'alongado'

Medidas descritivas

- Existe uma grande variedade de medidas descritivas, muitas delas competidoras entre si
- Considerações para a escolha da medida mais adequada:
  - A medida é de fácil interpretação? É intuitiva?
  - Existem valores atípicos que podem afetá-la exageradamente?
  - **O propósito da análise é meramente descritivo ou planeja-se fazer inferências?**

Valores atípicos ou discrepantes

Variável: estatura (m)

Jogadores de basquete	Jóqueis
2,08	1,60
típico → 1,98	1,62
1,95	1,65
2,03	1,55
2,10	1,57
1,93	1,58 ← típico
atípico → 1,58	1,98 ← atípico

A caracterização de um valor como **atípico** depende do contexto. Um valor considerado atípico num determinado contexto pode ser típico em outro contexto.

Algumas medidas são afetadas pela presença de valores atípicos no conjunto de dados, outras não.

1. Medidas de localização ou tendência central

Medidas de localização ou tendência central

Objetivo → indicar ou representar o centro de uma distribuição

Expectativa: centro contém a maior parte das observações

Medidas de localização mais utilizadas:

- Média aritmética
- Mediana
- Moda

Média aritmética

Medida mais conhecida e utilizada:

- ✓ facilidade de cálculo e de compreensão
- ✓ propriedades matemáticas e estatísticas

Definição: Média aritmética é uma combinação linear de todas as observações

Conjunto de observações: $x_1, x_2, \ldots, x_n$

Conjunto de coeficientes: $c_1, c_2, \ldots, c_n$

Combinação linear: $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = \sum c_ix_i$

Média aritmética

Combinação linear: $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = \sum c_ix_i$

Na média aritmética os coeficientes são pesos (p_i).

$$p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n = \sum p_ix_i$$

Média aritmética

- Simples → todos os pesos são iguais (p_i=p)

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p$$

$$px_1 + px_2 + \ldots + px_n = \sum px_i$$

- Ponderada → os pesos são diferentes

$$p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n = \sum p_ix_i$$

Média aritmética simples ($\bar{x}$)

Para um conjunto de n valores:

$x_i = x_1, x_2, \ldots, x_n$ e $p_i = p = \frac{1}{n}$

$$\bar{x} = \sum \frac{1}{n} x_i = \frac{1}{n} \sum x_i = \frac{\sum x_i}{n}$$

← soma de todos os valores

← total de valores somados

Interpretação: se tivéssemos um total fixo e quiséssemos dividi-lo em n partes iguais, esse valor constante seria a média aritmética simples. A média é a quantidade comum a todos.

Exemplo:

X = peso (kg)

x_i = 9, 7, 4, 5, 10

$$\bar{x} = \frac{9+7+4+5+10}{5} = \frac{35}{5} = 7 \text{ kg}$$

Média aritmética ponderada ($\overline{x}_p$)

Temos um conjunto de valores e um conjunto de pesos:

$x_i = x_1, x_2, ..., x_n$

$p_i = p_1, p_2, ..., p_n$, sendo $p_i > 0$ e $\sum p_i = 1$

$$\overline{x}_p = \frac{\sum x_i\, p_i}{\sum p_i}$$

← soma de produtos de valores e pesos

← soma dos pesos

Exemplo:

X = nota

x_i = 9, 4,5, 5, 10

p_i = 10, 10, 5, 5

$$\overline{x}_p = \frac{9\times10 + 4{,}5\times10 + 5\times5 + 10\times5}{10+10+5+5}$$

$$\overline{x}_p = \frac{210}{30} = 7$$

Propriedades algébricas da média aritmética

1ª propriedade: A média de um conjunto de dados que não varia, ou seja, cujos valores são uma constante, é a própria constante.

Verificação numérica:

$$x_i = 4, 4, 4, 4, 4$$

$$\overline{x} = 4$$

2ª propriedade: Ao somar (ou subtrair) uma constante **c** por todos os valores de um conjunto de dados, sua média também é somada (ou subtraída) por esta constante.

Verificação numérica:

$x_i = 9, 7, 5, 10, 4 \qquad \overline{x} = 7$

1. Somar c=2

$x_i+2 = 11, 9, 7, 12, 6$

$$\overline{x}_{x+2} = \frac{\sum(x_i+2)}{n} = \frac{11+9+7+12+6}{5} = \frac{45}{5} = 9$$

$$\overline{x}_{x+2} = 7+2$$
$$\overline{x}_{x+c} = \overline{x}+c$$

Demonstração:

$$\bar{x}_{x+c} = \frac{\sum(x_i + c)}{n}$$

$$= \frac{\sum x_i + \sum c}{n}$$

$$= \frac{\sum x_i + nc}{n}$$

$$= \frac{\sum x_i}{n} + \frac{nc}{n} = \frac{\sum x_i}{n} + c = \bar{x} + c$$

$$\boxed{\bar{x}_{x+c} = \bar{x} + c}$$

3ª propriedade: Ao multiplicar (ou dividir) uma constante **c** por todos os valores de um conjunto de dados, sua média também é multiplicada (ou dividida) por esta constante.

Verificação numérica:

$x_i = 9, 7, 5, 10, 4 \qquad \bar{x} = 7$

Multiplicar por c=2

$2x_i = 18, 14, 10, 20, 8$

$$\bar{x}_{2x} = \frac{\sum 2x_i}{n} = \frac{18+14+10+20+8}{5} = \frac{70}{5} = 14$$

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{x}_{2x} &= 2 \times 7 \\ \bar{x}_{cx} &= c\bar{x} \end{aligned}}$$

Demonstração:

$$\bar{x}_{cx} = \frac{\sum cx_i}{n}$$

$$= \frac{c\sum x_i}{n}$$

$$= c\frac{\sum x_i}{n} = c\bar{x}$$

$$\boxed{\bar{x}_{cx} = c\bar{x}}$$

4ª propriedade: A soma de todos os desvios em relação à média de um conjunto de valores é nula.

$$\sum(x_i - \bar{x}) = 0$$

desvio

diferença entre a observação e a média aritmética

Verificação numérica:

x_i = 9, 7, 5, 10, 4

$\bar{x} = 7$

i	x_i	$(x_i - \bar{x})$
1	9	2
2	7	0
3	5	-2
4	10	3
5	4	-3
Σ	35	0

Demonstração:

$$\sum(x_i - \bar{x}) = \sum x_i - \sum \bar{x}$$

$$= \sum x_i - n\bar{x} \qquad \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

$$= \sum x_i - n\frac{\sum x_i}{n}$$

$$= \sum x_i - \sum x_i = 0$$

$$\boxed{\sum(x_i - \bar{x}) = 0}$$

5ª propriedade: A soma dos quadrados dos desvios em relação a uma constante c é mínima quando c = $\bar{x}$.

$$\sum(x_i - c)^2 \leftarrow \text{é mínima quando } c = \bar{x}$$

Verificação numérica:

i	x_i	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - 5)^2$	$(x_i - 10)^2$
1	9	2	4	16	1
2	7	0	0	4	9
3	5	-2	4	0	25
4	10	3	9	25	0
5	4	-3	9	1	36
Σ	35	0	26	46	71

n = 5 $\quad \bar{x} = 7$

Demonstração:

Somar e subtrair uma constante não altera a equação

Rearranjar os termos não altera a equação

$$\sum(x_i - c)^2 = \sum(x_i - c + \bar{x} - \bar{x})^2$$

$$= \sum[(x_i - \bar{x}) + (\bar{x} - c)]^2$$

$$= \sum[(x_i - \bar{x})^2 + 2(x_i - \bar{x})(\bar{x} - c) + (\bar{x} - c)^2]$$

$$= \sum(x_i - \bar{x})^2 + \sum 2(x_i - \bar{x})(\bar{x} - c) + \sum(\bar{x} - c)^2$$

$$= \sum(x_i - \bar{x})^2 + 2(\bar{x} - c)\sum(x_i - \bar{x}) + n(\bar{x} - c)^2$$

Este termo é igual a zero

$$\sum(x_i - c)^2 = \sum(x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - c)^2$$

quando $c = \bar{x} \rightarrow n(\bar{x} - c)^2 = 0$

quando $c \neq \bar{x} \rightarrow n(\bar{x} - c)^2 > 0$

Profa. Clause Piana 27

Aplicação:

i	x_i	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - 5)^2$	$(x_i - 10)^2$
1	9	2	4	16	1
2	7	0	0	4	9
3	5	-2	4	0	25
4	10	3	9	25	0
5	4	-3	9	1	36
Σ	35	0	26	46	71

Expressão geral: $\sum(x_i - c)^2 = \sum(x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - c)^2$

Para $c = \bar{x}$ $\sum(x_i - \bar{x})^2 = \sum(x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - \bar{x})^2$

$= 26 + 5(7 - 7)^2 = 26$

Para $c = 5$ $\sum(x_i - 5)^2 = \sum(x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - 5)^2$

$= 26 + 5(7 - 5)^2 = 46$

Para $c = 10$ $\sum(x_i - 10)^2 = \sum(x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - 10)^2$

$= 26 + 5(7 - 10)^2 = 71$

Resumo: Propriedades da média aritmética

1ª propriedade: A média de um conjunto de dados que não varia, ou seja, cujos valores são uma constante, é a própria constante.

2ª propriedade: Ao somar (ou subtrair) uma constante **c** por todos os valores de um conjunto de dados, sua média também é somada (ou subtraída) por esta constante. $\overline{x}_{x+c} = \overline{x} + c$

3ª propriedade: Ao multiplicar (ou dividir) uma constante **c** por todos os valores de um conjunto de dados, sua média também é multiplicada (ou dividida) por esta constante. $\overline{x}_{cx} = c\,\overline{x}$

4ª propriedade: A soma de todos os desvios em relação à média de um conjunto de valores é nula. $\sum(x_i - \overline{x}) = 0$

5ª propriedade: A soma dos quadrados dos desvios em relação a uma constante c é mínima quando c = $\overline{x}$.

Profa. Clause Piana $\sum(x_i - c)^2$ ← é mínima quando c = $\overline{x}$ 29

Propriedades estatísticas da média aritmética

Propriedades estatísticas da média aritmética

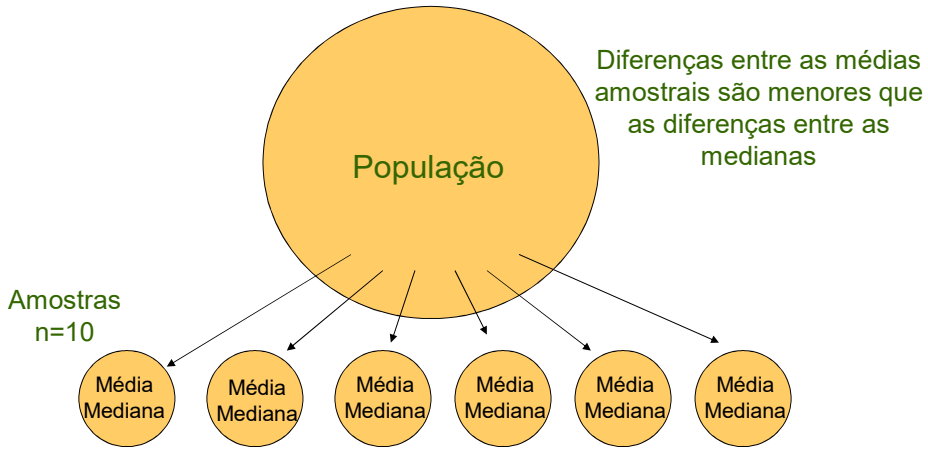
⇨ As propriedades estatísticas da média aritmética necessitam de um conhecimento mais avançado para serem adequadamente compreendidas.

Podemos destacar as duas propriedades mais importantes:

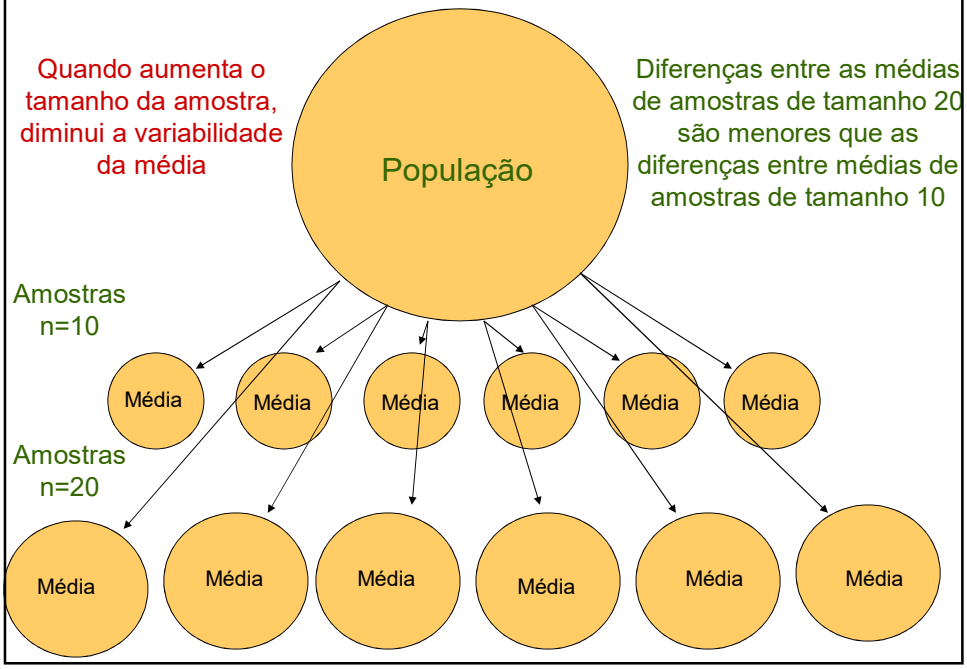
1. Se for considerado um grande número de amostras de dados de mesmo tamanho e obtidos na mesma população, a média aritmética varia menos de uma amostra para a outra do que outras medidas de localização.

2. Quanto maior for o tamanho da amostra de valores utilizada para o cálculo da média, menor é a sua variabilidade.

1. A média aritmética varia menos de uma amostra para a outra do que outras medidas de localização.



2. Quanto maior é o tamanho da amostra, menor é a variabilidade da média.

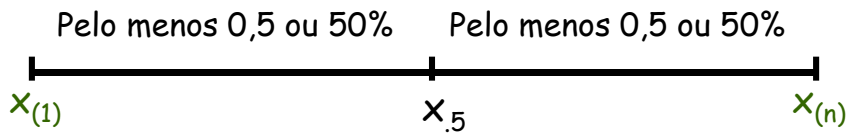


Mediana (Md ou $x_{.5}$)

É a medida que divide um conjunto de dados **ordenado** em duas partes aproximadamente iguais.

A proporção de, pelo menos, 0,5 dos valores é menor ou igual à mediana e, pelo menos, 0,5 é maior ou igual.

Conjunto de dados ordenado: $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \ldots \leq x_{(n)}$



Para obter a mediana:

1. Ordenar os dados
2. Determinar a posição da mediana

34

Dois casos:

n ímpar → um valor central

posição → $p = \frac{n+1}{2}$ $\qquad x_{.5} = x_{(P)}$

n par → dois valores centrais

posições → $p = \frac{n+1}{2} \rightarrow p_1, p_2$ $\qquad x_{.5} = \frac{x_{(P_1)} + x_{(P_2)}}{2}$

Quando p não é inteiro, tomamos os dois inteiros mais próximos.

Exemplo:

X = Peso (kg)

x_i = 5, 9, 7, 4, 12, 10

1. Ordenar os dados

$x_{(i)}$ = 4, 5, 7, 9, 10, 12

2. Determinar a posição (p) da mediana

n = 6 (par)

$p = \frac{n+1}{2} = \frac{6+1}{2} = 3{,}5 \rightarrow p_1 = 3,\ p_2 = 4$

$x_{.5} = \frac{x_{(3)} + x_{(4)}}{2}$

$x_{.5} = \frac{7+9}{2} = 8$

$x_{.5} = 8\ kg$

Moda (Mo)

- É o valor de maior ocorrência num conjunto de dados.
- É a única medida que pode não existir e, existindo, pode não ser única.

Exemplos:

Interpretação para variáveis discretas:

X = número de unidades defeituosas em um lote de produção

1. x_i = 5, 5, 3, 7, 9, 5, 4, 1 Mo = 5
2. x_i = 9, 5, 4, 5, 7, 1, 2, 2 Mo = 2 e 5 (conjunto bimodal)
3. x_i = 1, 3, 8, 4, 5, 9, 2, 11 não existe Mo (conjunto amodal)

Interpretação para variáveis contínuas:

Valores gastos (em reais) pelas primeiras 50 pessoas que entraram em um determinado Supermercado, no dia 01/01/2000.

3,11	8,88	9,26	10,81	12,69	13,78	15,23	15,62	17,00	17,39
18,36	18,43	19,27	19,50	19,54	20,16	20,59	22,22	23,04	24,47
24,58	25,13	26,24	26,26	27,65	28,06	28,08	28,38	32,03	36,37
38,64	38,98	39,16	41,02	42,97	44,08	44,67	45,40	46,69	48,65
50,39	52,75	54,80	59,07	61,22	70,32	82,70	85,76	86,37	93,34

Valores de **variáveis contínuas**, em geral, não se repetem.

A moda tem importância apenas conceitual.

Ela está relacionada com o pico da distribuição

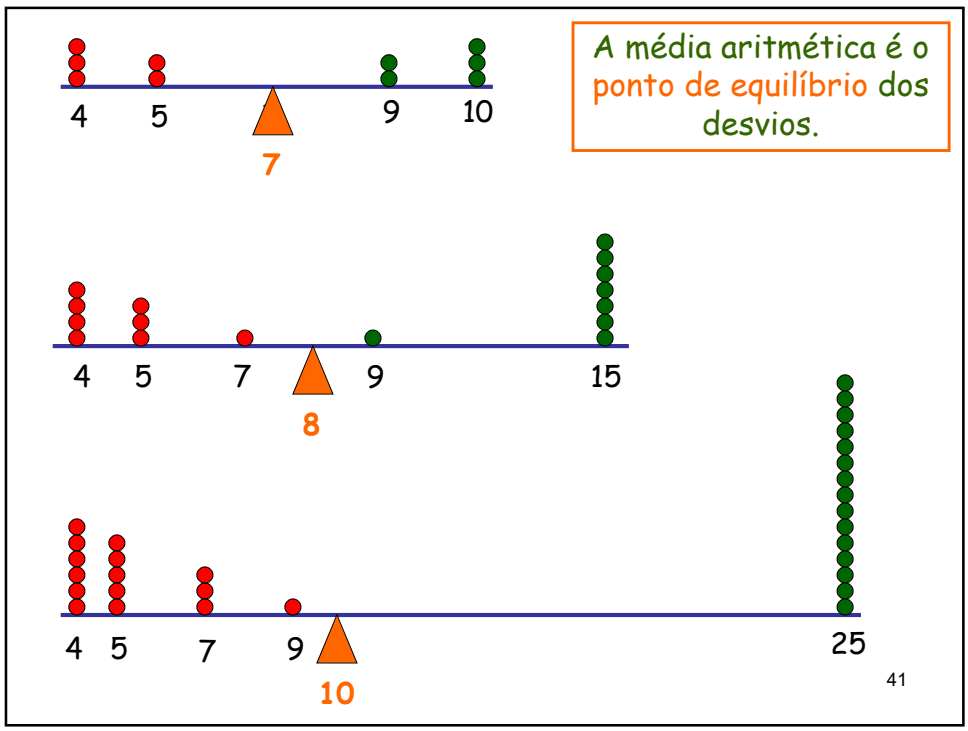
Moda é o ponto da distribuição onde temos a maior frequência.

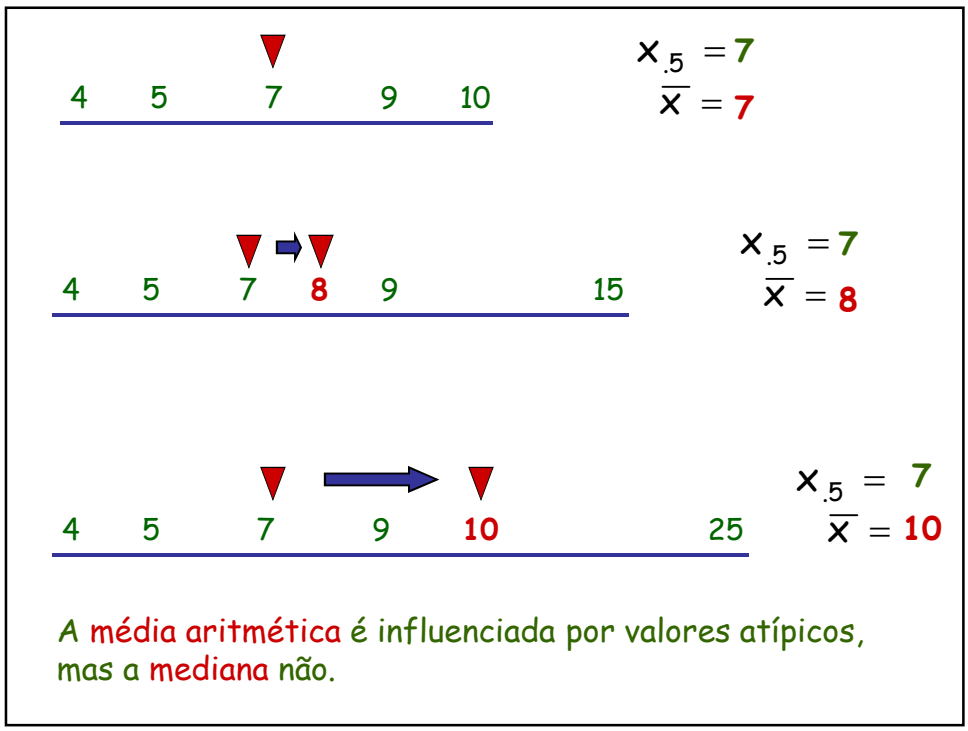
Principais características das três medidas de localização

Média aritmética

- No cálculo da média participam todos os valores observados.
- É uma medida de fácil interpretação e presta-se muito bem a tratamentos estatísticos adicionais.
- É uma medida que sempre existe e é rígida e unicamente determinada.
- É um valor típico do conjunto de dados, podendo substituir todos os seus valores sem alterar o total.
- É o ponto de equilíbrio das observações.
- **Representativa: quando a distribuição é simetria e têm maior frequência no centro.**

  Desvantagem: É uma medida altamente influenciada por valores atípicos ou discrepantes (não resistente).


A média aritmética é o ponto de equilíbrio dos desvios.
4 5 7 9 10
4 5 7 9 15
8
4 5 7 9 25
10
41


4 5 7 9 10
$x_{.5} = 7$
$\bar{x} = 7$
4 5 7 8 9 15
$x_{.5} = 7$
$\bar{x} = 8$
4 5 7 9 10 25
$x_{.5} = 7$
$\bar{x} = 10$
A média aritmética é influenciada por valores atípicos, mas a mediana não.

Mediana

- Define exatamente o centro de uma distribuição, mesmo quando os valores se distribuem assimetricamente em torno da média.
- Pode ser determinada mesmo quando não se conhece todos os valores do conjunto de dados.
- É uma medida que sempre existe e é única.
- Pode ser utilizada para definir o meio de um número de objetos, propriedades ou qualidades que possam de alguma forma ser ordenados.
- É uma medida resistente, ou seja, não sofre influência de valores discrepantes.

Desvantagem: É uma medida que não se presta a cálculos matemáticos.

43

Moda

- **É uma medida que têm existência real dentro do conjunto de dados e em grande número de vezes.**
- **Não exige cálculo, apenas uma contagem.**
- **Pode ser determinada também para variáveis qualitativas nominais.**

Desvantagens:

Deixa sem representação todos os valores do conjunto de dados que não forem iguais a ela.

Não se presta a cálculos matemáticos.

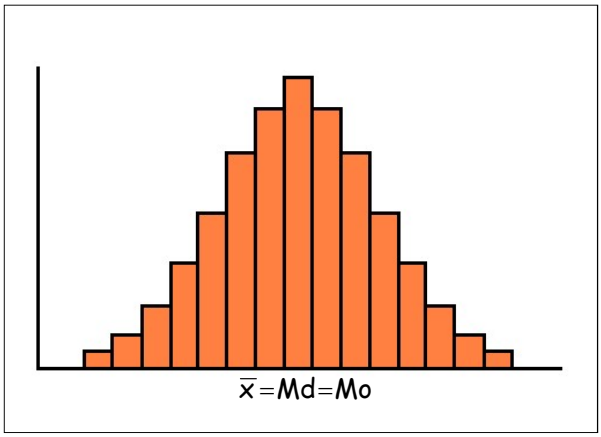
Pode não existir.

Variável categórica qualitativa nominal

Tipo de veículo	F_j	
Carro de passageiro	248	← Classe Modal
Minivan	62	
Caminhão de 2 eixos	42	
Caminhão de multieixo	12	
Moto	55	
Barco a motor	9	

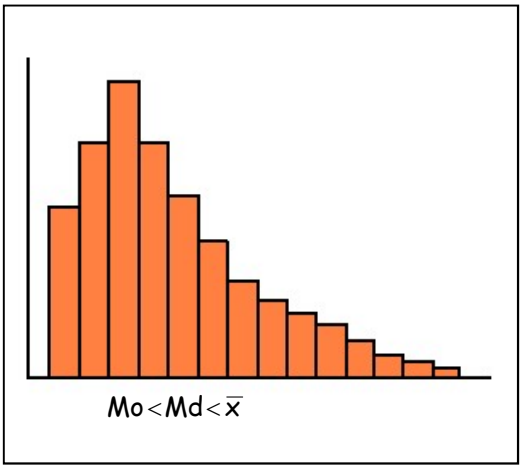
Relação entre as três medidas segundo o formato da distribuição

Relação entre as três medidas



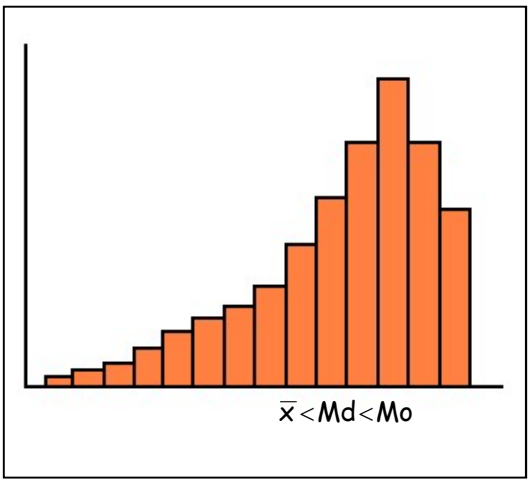
Distribuição unimodal simétrica

Relação entre as três medidas



Distribuição unimodal e assimétrica, com cauda para a direita

Relação entre as três medidas



Distribuição unimodal e assimétrica, com cauda para a esquerda

Outras médias:

- Média geométrica
- Média harmônica

Média geométrica

⇨ Definida como a n-ésima raiz do produto de n valores

Simples: $\bar{x}_g = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \ldots \times x_n} = \sqrt[n]{\prod x_i} = \left(\prod x_i\right)^{\frac{1}{n}}$

Ponderada: $\bar{x}_{gp} = \sqrt[\Sigma p_i]{x_1^{p_1} \times x_2^{p_2} \times \ldots \times x_n^{p_n}} = \sqrt[\Sigma p_i]{\prod x_i^{p_i}} = \left(\prod x_i^{p_i}\right)^{\frac{1}{\Sigma p_i}}$

Sequência de valores em progressão geométrica:

7, 21, 63 → 21 é a média geométrica de 7 e 63

⇨ A média geométrica é definida somente para $x_i > 0$, para toda unidade de observação i.

⇨ Apropriada para calcular médias de razões, taxas de variação, índices econômicos e taxas de crescimento de microrganismos

51

Exemplo:

Se um investimento rende 10% no primeiro ano e 30% no segundo ano, qual o rendimento médio desse investimento?

Seja 100 reais o montante aplicado inicialmente.

Após esses dois anos o montante será: 100×1,10×1,30 = 143

Tomando a média aritmética, temos $\bar{x} = \frac{1{,}10 + 1{,}30}{2} = 1{,}20$

Calculando o montante ao final dos dois anos:

100×1,20×1,20 = 144

Tomando a média geométrica, temos $\bar{x}_g = \sqrt{1{,}10 \times 1{,}30} = 1{,}1958$

Calculando o montante ao final dos dois anos:

Profa. Clause Piana 100×1,1958×1,1958 = 142,99

52

Média harmônica

⇨ Definida como o inverso da média aritmética dos inversos dos n valores

Simples: $\bar{x}_h = \dfrac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}} = \dfrac{n}{\sum \frac{1}{x_i}}$

Ponderada: $\bar{x}_{hp} = \dfrac{p_1+p_2+\ldots+p_n}{\frac{1}{x_1}p_1+\frac{1}{x_2}p_2+\ldots+\frac{1}{x_n}p_n} = \dfrac{\sum p_i}{\sum \frac{1}{x_i}p_i}$

⇨ A média harmônica é definida somente para $x_i \neq 0$, para toda unidade de observação i.

⇨ Utilizada em teoria musical (freqüências musicais) e em outras situações especiais (Física e Economia).

Exemplo:

mais heterogêneo

Notas: 3, 6 e 9

Notas: 4, 7 e 7

$$\bar{x} = \frac{3+6+9}{3} = 6$$

$$\bar{x} = \frac{4+7+7}{3} = 6$$

$$\bar{x}_h = \frac{3}{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}} = 4{,}9$$

$$\bar{x}_h = \frac{3}{\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}} = 5{,}6$$

O candidato que tem notas mais homogêneas leva vantagem.

Exemplos de aplicação da média harmônica

Em algumas situações, é a média harmônica que provê a correta noção de média.

Exemplo 1.

Se metade da distância de uma viagem é feita a 40 km por hora e a outra metade da distância a 60 km por hora, então a velocidade média para a viagem é dada pela média harmônica:

$$\bar{x}_h = \frac{2}{\frac{1}{40} + \frac{1}{60}} = 48$$

Isso significa que o tempo total para a viagem seria o mesmo, se toda a viagem fosse feita a 48 quilômetros por hora.

Note-se, entretanto, que se se tivesse viajado por metade do tempo em uma velocidade e a outra metade na outra velocidade, a média aritmética, nesse caso 50 km por hora, proveria a correta noção de média.

Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9dia_harm%C3%B4nica)

Exemplo 2.

Se um circuito elétrico contém duas resistências conectadas em paralelo, uma com uma resistência de 40 ohm e outra com 60 ohm, então, a média das duas resistências é:

$$\bar{x}_h = \frac{2}{\frac{1}{40} + \frac{1}{60}} = 48 \text{ ohm}$$

Isso significa que a resistência do circuito é a mesma que a de duas resistências de 48 ohm conectadas em paralelo.

Note-se que isso não deve ser confundido com sua resistência equivalente, 24 ohm, que é a resistência necessária para substituir as duas resistências em paralelo. A resistência equivalente é igual a metade do valor da média harmônica de duas resistências em paralelo.

Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9dia_harm%C3%B4nica)

Exemplo 3.

Em finanças, a média harmônica é usada para calcular o custo médio de ações compradas durante um período.

Se um investidor compra 1000 reais em ações todo mês durante três meses e os preços na hora de compra são de 8 reais, 9 reais e 10 reais, então, o preço médio que o investidor pagou por ação é:

$$\bar{x}_h = \frac{3}{\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}} = 8{,}926 \text{ reais}$$

Note-se, entretanto, que se um investidor comprasse 1000 ações por mês, a média aritmética seria usada.

Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9dia_harm%C3%B4nica)

Relação entre as três médias

$$\overline{x}_h \leq \overline{x}_g \leq \overline{x}$$

Exemplo:

X = peso (kg) x_i = 9, 7, 4, 5, 10

$$\overline{x} = \frac{9+7+4+5+10}{5} = 7 \text{ kg}$$

$$\overline{x}_g = \sqrt[5]{9\times7\times4\times5\times10} = 6{,}608 \text{ kg}$$

$$\overline{x}_h = \frac{5}{\frac{1}{9}+\frac{1}{7}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}} = 6{,}219 \text{ kg}$$

A igualdade entre as três médias só se verifica quando todos os valores do conjunto são iguais.

59

2. Medidas separatrizes

Medidas separatrizes

São medidas descritivas que buscam dividir um conjunto de dados ordenado em proporções essencialmente iguais.

Mediana → divide o conjunto ordenado em duas partes

Quartis → dividem o conjunto ordenado em quatro partes

Decis → dividem o conjunto ordenado em dez partes

Percentis → dividem o conjunto ordenado em cem partes

Essas medidas delimitam proporções de valores no conjunto de dados ordenado.

Profa. Clause Piana 61

Quantil → é uma medida que delimita uma proporção qualquer de valores no conjunto ordenado. É denotado por

x_p , sendo p = proporção

Mediana → delimita a proporção 0,5

$Md = x_{.5} \rightarrow p = 0,5$

Quartis → delimitam as proporções 0,25, 0,5 e 0,75

$Q_1 = x_{.25} \rightarrow p = 0,25$

$Q_2 = x_{.5} \rightarrow p = 0,5$

$Q_3 = x_{.75} \rightarrow p = 0,75$

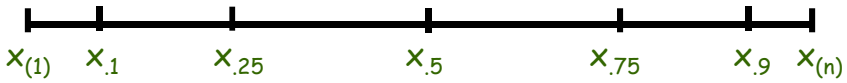
Decis → delimitam as proporções 0,1, 0,2, ... até 0,9

$D_1 = x_{.1} \rightarrow p = 0,1$ ... $D_5 = x_{.5} \rightarrow p = 0,5$ ... $D_9 = x_{.9} \rightarrow p = 0,9$

Percentis → delimitam as proporções 0,01, 0,02, ..., até 0,99

$P_1 \rightarrow p = 0,01$ ... $P_{50} \rightarrow p = 0,5$ ... $P_{99} \rightarrow p = 0,99$

Quantis (x_p)



$x_{.1}$: pelo menos 0,10 dos valores são menores ou iguais a $x_{.1}$

$x_{.25}$: pelo menos 0,25 dos valores são menores ou iguais a $x_{.25}$

$x_{.5}$: pelo menos 0,50 dos valores são menores ou iguais a $x_{.5}$

$x_{.75}$: pelo menos 0,75 dos valores são menores ou iguais a $x_{.75}$

$x_{.9}$: pelo menos 0,90 dos valores são menores ou iguais a $x_{.9}$

Determinação do quantil (x_p) pelo método de inversão da função de distribuição empírica (FDE):

1. Ordenar os dados
2. Multiplicar a proporção (p) pelo número de observações (n)
3. Fazer np = j + f , onde j = parte inteira e f = parte decimal

$$\begin{cases} \text{Se } f = 0 \Rightarrow x_p = \dfrac{x_{(j)} + x_{(j+1)}}{2} \\ \text{Se } f > 0 \Rightarrow x_p = x_{(j+1)} \end{cases}$$

Nem sempre há um valor do conjunto para a proporção desejada.

Exercício proposto:

Foram registrados os tempos de frenagem (em décimos de segundos) para 21 motoristas que dirigiam a 30 milhas por hora. Os valores obtidos foram:

69 57 70 80 46 61 65 74 75 55 67
56 71 72 61 66 58 68 70 68 59

Para o conjunto de valores, calcule os quartis e interprete esses valores.

1 milha = 1,61 km

Medidas para dados agrupados em classe

Distribuições de variáveis discretas – medidas exatas

A partir da distribuição de frequências, calcule as medidas de localização (média, mediana e moda).

Número de erros em um conjuntos de caracteres (*string*) de 1.000 *bits*.

Moda → Classe 2

Classe modal → Classe 2

Classe mediana → Classe 2

j	Classe	F_j	F'_j	f_j	f'_j	
1	0	55	55	0,1571	0,1571	
2	1	60	115	0,1714	0,3286	
3	2	112	227	0,32	0,6486	Classe que contém a mediana
4	3	82	309	0,2343	0,8829	Classe que contém o terceiro quartil
5	4	31	340	0,0886	0,9714	
6	5	8	348	0,0229	0,9943	
7	6	2	350	0,0057	1,0000	
	Σ	350	-	1,0000	-	

Média ponderada

$$\bar{x}_p = \frac{\sum c_j F_j}{\sum F_j} = 2{,}017$$

Distribuições de variáveis contínuas – medidas aproximadas

A partir da distribuição de frequências, calcule as medidas de localização (média, mediana e moda).

Valores gastos (em reais) pelas primeiras 50 pessoas que entraram em um determinado Supermercado, no dia 01/01/2000.

Classe modal → Classe 2

Classe mediana → Classe 2

j	Classe	c_j	F_j	f_j	f'_j	
1	3,11|— 16,00	9,56	8	0,16	0,16	
2	16,00|— 28,89	22,45	20	0,4	0,56	Classe que contém a mediana e o primeiro quartil
3	28,89|— 41,78	35,34	6	0,12	0,68	
4	41,78|— 54,67	48,23	8	0,16	0,84	Classe que contém o terceiro quartil
5	54,67|— 67,56	61,12	3	0,06	0,9	
6	67,56|— 80,45	74,01	1	0,02	0,92	
7	80,45|—|93,34	86,90	4	0,08	1	
	Σ	-	50	1	-	

Média ponderada

$$\bar{x}_p = \frac{\sum c_j F_j}{\sum F_j} = 37{,}57 \text{ reais}$$

3. Medidas de variação ou dispersão

Observando os três conjuntos de dados abaixo, verificamos que uma medida de tendência central não é suficiente para diferenciá-los. Que característica dos dados poderia evidenciar que os conjuntos são diferentes?

i	x_i	y_i	z_i
1	4	2	1
2	4	5	8
3	4	4	5
4	4	6	4
5	4	3	2
$\sum$	20	20	20
Média	4	4	4

A variabilidade !!!

Medidas de variação ou dispersão

Objetivo → indicar quanto os valores diferem entre si ou quanto eles se afastam da média

⇨ Complementam as medidas de tendência central

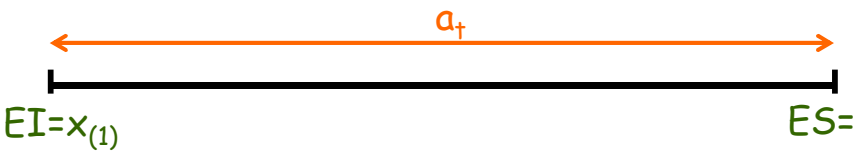
Medidas de variação mais utilizadas:

- Amplitude total
- Amplitude interquartílica
- Variância
- Desvio padrão
- Coeficiente de variação

Amplitude total (a_t)

⇨ Fornece uma idéia rudimentar de variação

⇨ É obtida pela diferença entre o maior valor e o menor valor de um conjunto de dados



$$a_t = ES - EI$$

ES: extremo superior do conjunto de dados ordenado
EI: extremo inferior do conjunto de dados ordenado

$$a_t = x_{(n)} - x_{(1)}$$

Exemplo:

X = peso (kg)

x_i = 9, 7, 4, 5, 10

$a = ES - EI = 10 - 4 = 6\,kg$

Significado: todos os valores do conjunto de dados diferem, no máximo, em 6kg

Desvantagens

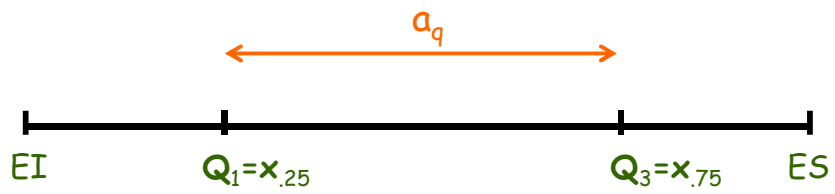
- pouco precisa
- extremamente influenciada por valores discrepantes

Cálculo da amplitude total no exemplo:

i	x_i	y_i	z_i
1	4	2	1
2	4	5	8
3	4	4	5
4	4	6	4
5	4	3	2
Σ	20	20	20
Média	4	4	4
a_t	0	4	7

Amplitude interquartílica (a_q)

⇨ É obtida pela diferença entre o terceiro e o primeiro quartis



$$a_q = Q_3 - Q_1$$

Q_1: primeiro quartil
Q_3: terceiro quartil

Exemplo:

X = peso (kg)

x_i = 3, 3, 4, 6, 7, 9, 9, 11, 12

Q_1 = 4 kg e Q_3 = 9 kg

$a_q = Q_3 - Q_1 \quad = 9 - 4 = 5 kg$

Significado: 50% dos valores mais centrais do conjunto, diferem, no máximo, em 5 kg

Vantagem

- medida resistente (não é afetada por valores discrepantes)

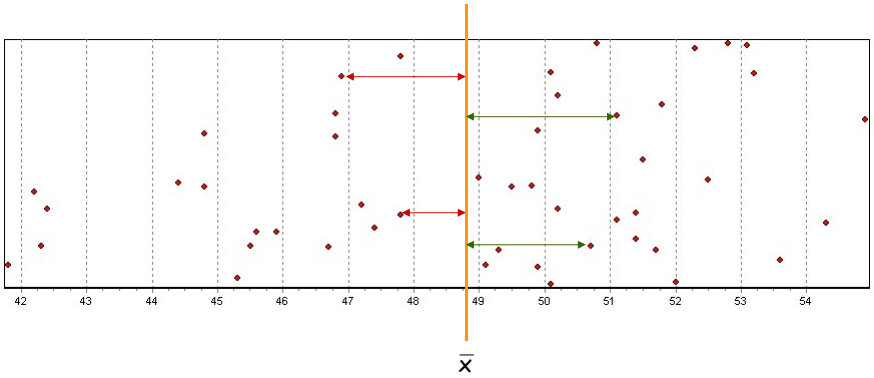
Variância (s^2)

- Medida de variação mais utilizada:
  - facilidade de compreensão
  - propriedades matemáticas e estatísticas
- Considera o desvio da média como unidade básica da variação:

Desvio: $(x_i - \bar{x})$ ← mede quanto cada valor varia em relação à média

n=48

Desvio: $(x_i - \bar{x})$



Os desvios medem a variação (ou afastamento) de cada observação em relação à média aritmética

Exemplo:

x_i = 4, 5, 7, 9, 10

$\bar{x} = 7$

$(x_i - \bar{x})$
- $4 - 7 = -3$
- $5 - 7 = -2$
- $7 - 7 = 0$
- $9 - 7 = 2$
- $10 - 7 = 3$

→ variação de cada x_i em relação à média

Média dos desvios → variação média do conjunto de valores

soma de todos os desvios → $\sum(x_i - \bar{x})$

total de desvios somados → n

$$\frac{\sum(x_i - \bar{x})}{n} = 0$$

3ª propriedade da média → $\sum(x_i - \bar{x}) = 0$

79

Solução: elevar os desvios ao quadrado → desvios negativos ficam positivos e podem ser somados

soma dos quadrados dos desvios → $\sum(x_i - \bar{x})^2$

total de desvios somados → n

$$\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n}$$

Média dos quadrados dos desvios

Variância: definida como a média dos quadrados dos desvios

$$s^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

$n-1$ ← número de graus de liberdade ou desvios independentes

Profa. Clause Piana

80

Por que utilizar n-1 como denominador?

Porque este denominador confere à variância melhores propriedades estatísticas (importante na inferência estatística).

- Quando o objetivo for apenas descrever a variação de um conjunto de valores, podemos usar o denominador n.

$$s_n^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

- Quando o objetivo for estimar a variação de uma população por meio da variação de um conjunto de valores (amostra), devemos usar o denominador n-1.

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

Derivação de outra fórmula da variância:

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} \Rightarrow \sum (x_i - \bar{x})^2 = \sum (x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2)$$

$$= \sum x_i^2 - \sum 2x_i\bar{x} + \sum \bar{x}^2$$

$$= \sum x_i^2 - 2\frac{\sum x_i}{n}\sum x_i + n\left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2$$

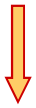
$$= \sum x_i^2 - 2\frac{\left(\sum x_i\right)^2}{n} + n\frac{\left(\sum x_i\right)^2}{n^2}$$

$$= \sum x_i^2 - 2\frac{\left(\sum x_i\right)^2}{n} + \frac{\left(\sum x_i\right)^2}{n}$$

$$\sum (x_i - \bar{x})^2 = \sum x_i^2 - \frac{\left(\sum x_i\right)^2}{n}$$

$$s^2 = \frac{\sum x_i^2 - \frac{\left(\sum x_i\right)^2}{n}}{n-1}$$

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$ ← **Fórmula de definição**



$$s^2 = \frac{\sum x_i^2 - \frac{\left(\sum x_i\right)^2}{n}}{n-1}$$ ← **Fórmula prática**

Exemplo:

X = peso (kg)

x_i = 9, 7, 5, 10, 4 → $\bar{x} = 7$ kg

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

$$= \frac{(9-7)^2 + (7-7)^2 + (5-7)^2 + (10-7)^2 + (4-7)^2}{5-1}$$

$$= \frac{4+0+4+9+9}{4} = \frac{26}{4} = 6{,}5$$

$s^2 = 6{,}5\ kg^2$ ← unidade de medida fica elevada ao quadrado

Propriedades algébricas da variância

1ª propriedade: A variância de um conjunto de dados que não varia, ou seja, cujos valores são uma constante, é zero.

$$x_i = 4, 4, 4, 4, 4$$

$$s^2 = \frac{(4-4)^2 + (4-4)^2 + (4-4)^2 + (4-4)^2 + (4-4)^2}{5-1}$$

$$s^2 = 0$$

2ª propriedade: Se somarmos uma constante **c** a todos os valores de um conjunto de dados, a variância destes dados não se altera.

Verificação numérica:

$x_i = 9, 7, 5, 10, 4 \rightarrow \bar{x}=7 \quad s^2 = 6{,}5$

Somar c=2

$x_i+2 = 11, 9, 7, 12, 6 \rightarrow \bar{x}_{x+2} = 9 \rightarrow \boxed{\bar{x}_{x+c} = \bar{x} + c} \quad s^2_{x+2} = ?$

$$s^2_{x+2} = \frac{(11-9)^2 + (9-9)^2 + (7-9)^2 + (12-9)^2 + (6-9)^2}{5-1}$$

$$= \frac{4+0+4+9+9}{4} = \frac{26}{4} = 6{,}5\ kg^2$$

Demonstração: $s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$

$$s^2_{x+c} = \frac{\sum [(x_i + c) - (\bar{x} + c)]^2}{n-1}$$

$$= \frac{\sum (x_i - \bar{x} + c - c)^2}{n-1}$$

$$= \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = s^2$$

$$\boxed{s^2_{x+c} = s^2}$$

3ª propriedade: Se multiplicarmos todos os valores de um conjunto de dados por uma constante **c**, a variância destes dados fica multiplicada pelo quadrado desta constante.

Verificação numérica:

x_i = 9, 7, 5, 10, 4 → $\bar{x}=7$; $s^2 = 6{,}5$

Multiplicar por c=2

$2x_i$= 18, 14, 10, 20, 8 → $\bar{x}_{2x} = 14 \rightarrow \boxed{\bar{x}_{cx} = c\bar{x}}$; $s^2_{2x} = 26 \rightarrow \boxed{s^2_{cx} = c^2 s^2}$

$$s^2_{2x} = \frac{(18-14)^2 + (14-14)^2 + (10-14)^2 + (20-14)^2 + (8-14)^2}{5-1}$$

$$= \frac{16+0+16+36+36}{4} = \frac{104}{4} = 26\,kg^2 = 2^2 \times 6{,}5$$

Demonstração:

$$s^2_{xc} = \frac{\sum (x_i c - \bar{x}c)^2}{n-1}$$

$$= \frac{\sum [c(x_i - \bar{x})]^2}{n-1}$$

$$= \frac{\sum c^2 (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

$$= \frac{c^2 \sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

$$= c^2 \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = c^2 s^2$$

$$\boxed{s^2_{cx} = c^2 s^2}$$

Resumo: Propriedades da variância

1ª propriedade: A variância de um conjunto de dados que não varia, ou seja, cujos valores são uma constante, é zero.

2ª propriedade: Se somarmos uma constante **c** a todos os valores de um conjunto de dados, a variância destes dados não se altera.

$$s^2_{x+c} = s^2$$

3ª propriedade: Se multiplicarmos todos os valores de um conjunto de dados por uma constante **c**, a variância destes dados fica multiplicada pelo quadrado desta constante.

$$s^2_{cx} = c^2 s^2$$

Cálculo da variância no exemplo:

i	x_i	y_i	z_i
1	4	2	1
2	4	5	8
3	4	4	5
4	4	6	4
5	4	3	2
Σ	20	20	20
Média	4	4	4
Amplitude total	0	4	7
Variância	0	2,5	7,5

Desvantagens da variância:

1. Como a variância é calculada a partir da média, é uma medida pouco resistente, ou seja, muito influenciada por valores atípicos.

2. Como a unidade de medida fica elevada ao quadrado, a interpretação da variância se torna mais difícil.

Para solucionar o problema de interpretação da variância surge outra medida: o desvio padrão.

Desvio padrão (s)

⇨ É definido como a raiz quadrada positiva da variância

$$s = \sqrt{s^2}$$

Exemplo:

X = peso (kg)

x_i = 9, 7, 5, 10, 4

$\bar{x} = 7\ kg$

$s^2 = 6{,}5\ kg^2$

$$s = \sqrt{s^2}$$

$$s = \sqrt{6{,}5\ kg^2}$$

$$s = 2{,}55\ kg$$

Apresentação do desvio padrão:

$\bar{x} \pm s$

$7 \pm 2{,}55$ ← Peso médio de 7 kg com uma variação média de 2,55 kg acima e abaixo da média.

Significado: variação média em torno da média aritmética

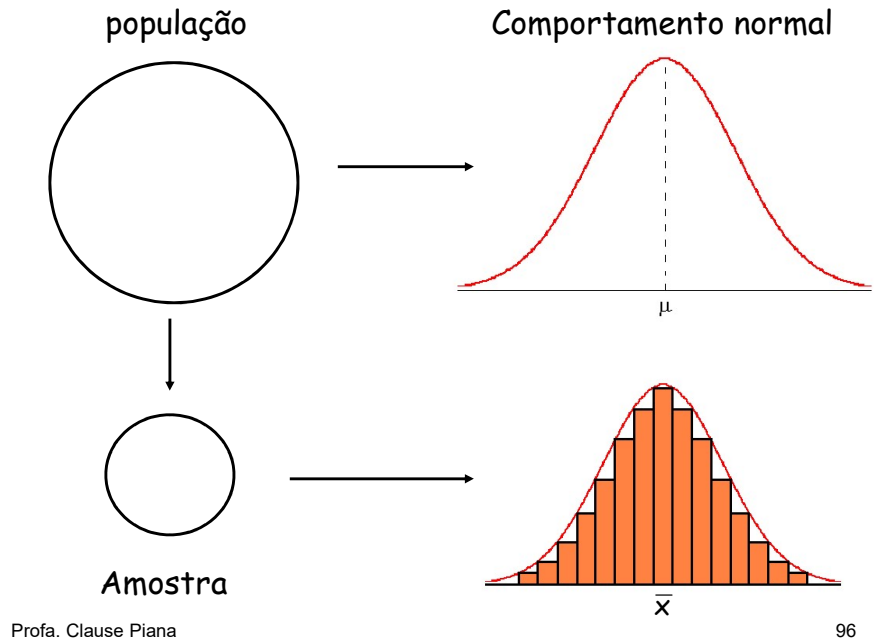
Vantagens

- Facilidade de interpretação
- É possível associar proporções de valores a intervalos entre a média e o desvio padrão

Numa distribuição **simétrica** e **unimodal**

$\bar{x} \pm s \rightarrow$ proporção aproximada: 0,68

95

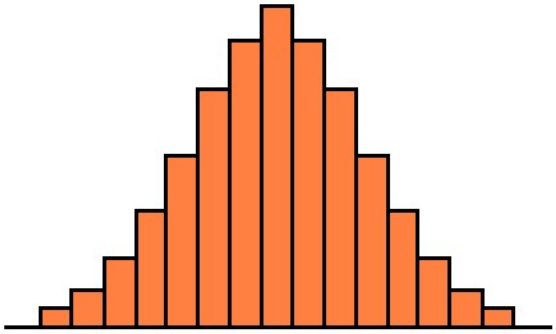


Profa. Clause Piana

96

No exemplo:

$7 \pm 2{,}55$



Intervalo: 4,45 a 9,55

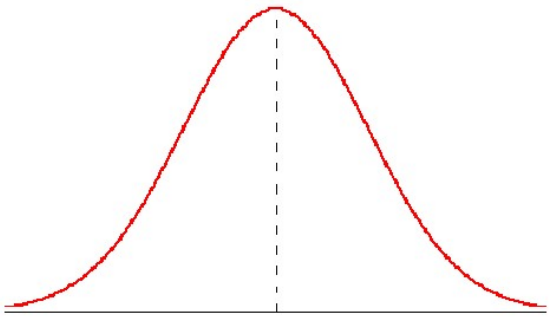
Aproximadamente 68% dos valores do conjunto estão entre 4,45 kg e 9,55 kg.

$\bar{x} \pm s \rightarrow \cong 68\%$

$\bar{x} \pm 2s \rightarrow \cong 95\%$

$\bar{x} \pm 3s \rightarrow \cong 99{,}7\%$

Profa. Clause Piana 97



$\mu \pm \sigma \rightarrow 0{,}68$

$\mu \pm 2\sigma \rightarrow 0{,}95$

$\mu \pm 3\sigma \rightarrow 0{,}997$

Para a distribuição normal essas proporções são constantes

Cálculo do desvio padrão no exemplo:

i	x_i	y_i	z_i
1	4	2	1
2	4	5	8
3	4	4	5
4	4	6	4
5	4	3	2
$\sum$	20	20	20
Média	4	4	4
Amplitude total	0	4	7
Variância	0	2,5	7,5
Desvio padrão	0	1,581	2,739

Coeficiente de Variação (CV)

⇨ O coeficiente de variação é definido como a proporção (ou percentual) da média representada pelo desvio padrão.

$$CV = \frac{s}{\bar{x}}\ 100$$

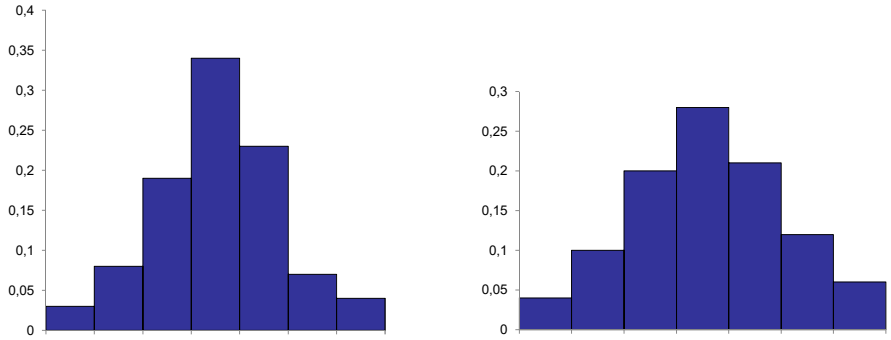
⇨ É uma medida que somente tem sentido para variáveis mensuradas em escala de razão e cuja média não é zero nem está próxima de 0.

Exemplo: X = peso (kg)

x_i = 9, 7, 5, 10, 4 → $\bar{x} = 7$ kg; $s = 2{,}55$ kg

$$CV = \frac{s}{\bar{x}}\ 100 = \frac{2{,}55\ kg}{7\ kg}\ 100 = 36{,}4\%$$

⇨ O CV é a medida mais utilizada para comparar variabilidades de diferentes conjuntos de dados



Exemplo 1:

Consideremos que x_{1i} e x_{2i} são conjuntos de valores referentes a produção diária de leite (em kg) de vacas das raças Jersey e Holandesa, para os quais foram obtidas as seguintes medidas:

Jersey (X_1): $\bar{x}_1 = 13$ kg
s_1 = 3,4 kg

Holandesa (X_2): $\bar{x}_2 = 25$ kg
s_2 = 4,2 kg

Qual grupo varia mais em relação à produção de leite?

$\bar{x}_1 = 13$ kg $s_1 = 3{,}4$ kg $\bar{x}_2 = 25$ kg $s_2 = 4{,}2$ kg

$CV_1 = 26{,}2\%$ $CV_2 = 16{,}8\%$

O maior desvio padrão, quando comparado à sua média, representou menor variação.

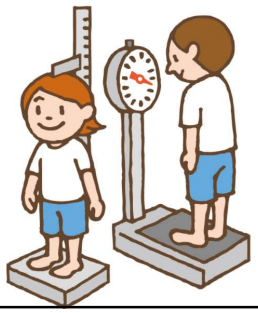
Quando as médias são diferentes, devemos usar o CV.

Exemplo 2:

Consideremos, agora, que x_i e y_i são conjuntos de valores referentes a alturas (em cm) e pesos (em kg) de um grupo de estudantes, para os quais foram obtidas as seguintes medidas:

Altura (X): $\bar{x} = 158$ cm $s_X = 12$ cm $CV_X = 7{,}59\%$

Peso (Y): $\bar{y} = 52$ kg $s_y = 10$ kg $CV_y = 19{,}23\%$



Peso e altura não são grandezas comparáveis.

Quando as unidades de medida são diferentes, devemos usar o CV.

⇨ Para a comparação de variabilidades o uso do CV é particularmente recomendado em duas situações:

- quando as médias dos conjuntos são diferentes
- quando as unidades de medida são diferentes

Se a média e a unidade de medida dos conjuntos são iguais, qualquer medida de variação pode ser utilizada para a comparação.

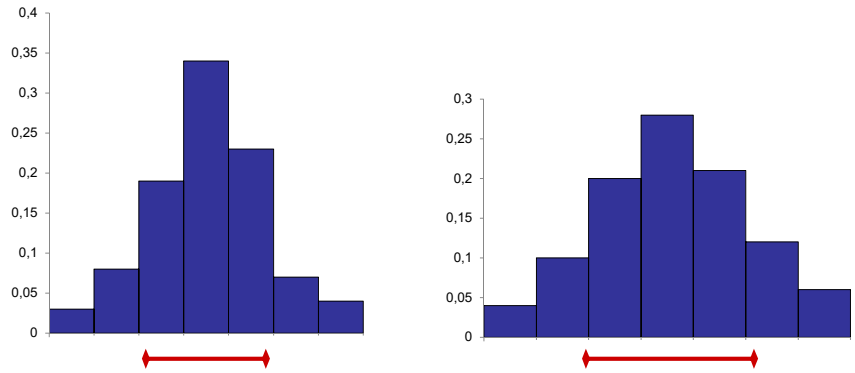
Vantagens:

- É desprovido de unidade de medida (expresso em percentagem)
- É uma medida relativa, pois relaciona o desvio padrão com a sua respectiva média aritmética

Desvantagem

- O CV pode ter seu valor grandemente alterado enquanto a variabilidade permanece constante.

105



Em distribuições simétricas e unimodais observa-se que quanto menor é o desvio padrão em relação a média:

⇨ menor é o intervalo para a mesma proporção de valores

⇨ menor é a amplitude do histograma

⇨ menor é o coeficiente de variação

Cálculo do coeficiente de variação no exemplo:

i	x_i (kg)	y_i (kg)	z_i (kg)
1	4	2	1
2	4	5	8
3	4	4	5
4	4	6	4
5	4	3	2
$\sum$	20	20	20
Média	4	4	4
Amplitude total	0	4	7
Variância	0	2,5	7,5
Desvio padrão	0	1,581	2,739
CV	0	39,53 %	68,46 %

Exercícios propostos:

1) Um professor fez cinco provas, com os pesos de 3, 6, 8, 4 e 7, para as quais um aluno obteve as notas 10, 9, 8, 7, e 6, respectivamente. Calcule a média aritmética simples e a média aritmética ponderada para conjunto de notas.

2) Contou-se o número de vendas de determinado produto durante os sete dias de uma semana, com os seguintes resultados:

14 20 20 20 15 16 18

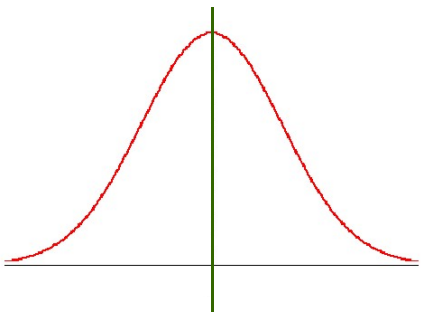
a) Determine a mediana e a moda.

b) Calcule a variância, o desvio padrão e o coeficiente de variação.

4. Medidas de formato

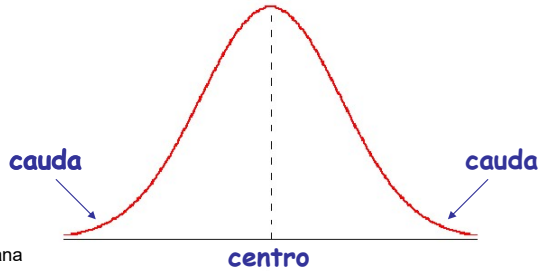
Formato de uma distribuição

- O formato é um aspecto importante de uma distribuição. Está relacionado com as idéias de **simetria** e **curtose**.
- A **simetria** em torno de um eixo indica que o formato da distribuição à esquerda e à direita desse eixo é o mesmo.



Formato de uma distribuição

- O formato é um aspecto importante de uma distribuição. Está relacionado com as idéias de **simetria** e **curtose**.
- A **simetria** em torno de um eixo indica que o formato da distribuição à esquerda e à direita desse eixo é o mesmo.
- A **curtose** está relacionada com o grau de concentração das observações no centro e nas caudas da distribuição.



Formato de uma distribuição

- O formato é um aspecto importante de uma distribuição. Está relacionado com as idéias de **simetria** e **curtose**.
- A **simetria** em torno de um eixo indica que o formato da distribuição à esquerda e à direita desse eixo é o mesmo.
- A **curtose** está relacionada com o grau de concentração das observações no centro e nas caudas da distribuição.
- A curtose não tem interpretação tão intuitiva quanto a simetria. Em geral, a curtose é discutida apenas para distribuições simétricas.
- Existem várias formas de medir a assimetria e a curtose de uma distribuição.
- Algumas dessas medidas se baseiam em quantidades denominadas **momentos**.

Momentos (m_r)

⇨ Quantidade fundamental na caracterização da distribuição de uma variável.

$$m_r = \frac{\sum (x_i - a)^r}{n}$$

Média dos desvios em relação à constante a na potência r

⇨ Pode ser definido como a média aritmética de uma potência qualquer (r) dos desvios dos valores de um conjunto em relação a uma constante (a) escolhida como origem.

$$m_r = \frac{\sum (x_i - a)^r}{n}$$

Momentos

Centrados na origem (ordinários) $\longrightarrow a = 0$

$$\frac{\sum (x_i - 0)^r}{n} = \frac{\sum x_i^{(r)}}{n} = m'_r$$

Centrados na média $\longrightarrow a = \bar{x}$

$$\frac{\sum (x_i - \bar{x})^{(r)}}{n} = m_r$$

Momentos centrados na origem (ordinários) $m'_r = \frac{\sum x_i^r}{n}$

Para r = 1:

$$m'_1 = \frac{\sum x_i}{n}$$ ← Média de X

Para r = 2:

$$m'_2 = \frac{\sum x_i^2}{n}$$ ← Média dos quadrados de X

Para r = 3:

$$m'_3 = \frac{\sum x_i^3}{n}$$ ← Média dos cubos de X

Momentos centrados na média $m_r = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^r}{n}$

Para r = 1: Média dos desvios

$$m_1 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})}{n} = 0$$

Para r = 2: Média dos quadrados dos desvios

$$m_2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

Para r = 3: Média dos cubos dos desvios

$$m_3 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^3}{n}$$

Para r = 4: Média dos desvios na potência quatro

$$m_4 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^4}{n}$$

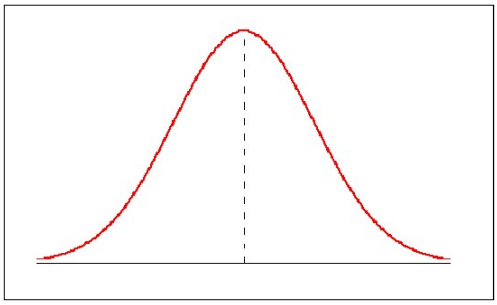
Medidas de assimetria

- Informam se a maioria dos valores se localiza à esquerda, ou à direita, ou se estão distribuídos uniformemente em torno da média aritmética.
- Uma das medidas de assimetria mais precisas é o coeficiente de assimetria, calculado a partir do segundo e do terceiro momentos centrados na média:

$$a_3 = \frac{m_3}{m_2 \sqrt{m_2}}$$

- Indica o grau e o sentido do afastamento da simetria.

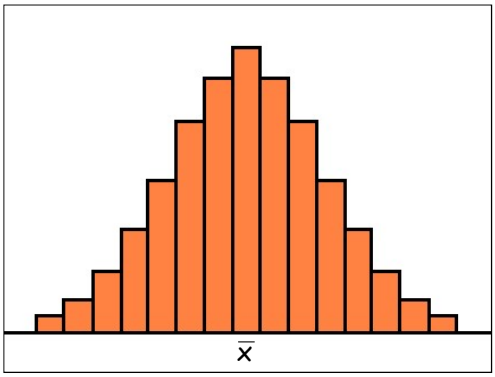
Distribuição normal → Simétrica



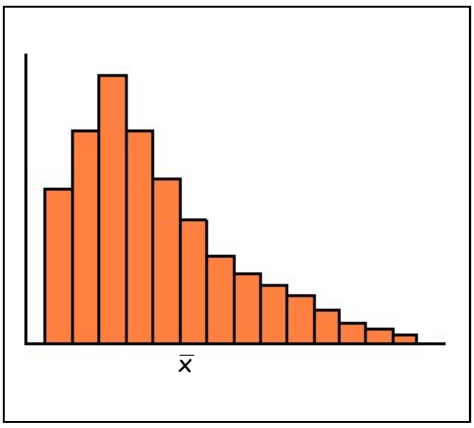
$a_3 = 3$

Classificação quanto à simetria

Se $a_3=0$, a distribuição é classificada como simétrica, indicando os valores estão uniformemente distribuídos em torno da média.

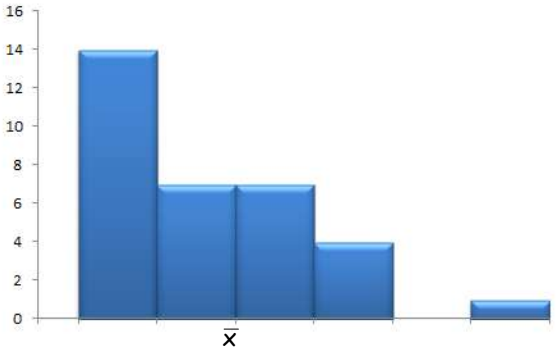


Se $a_3 > 0$, a distribuição é classificada como assimétrica positiva, indicando que a maioria dos valores são menores ou se localizam à esquerda da média.



i	x_i
1	4,5
2	5
3	5,1
4	5,1
5	5,5
6	5,5
7	5,7
8	6,4
9	6,5
10	7,5
11	7,7
12	7,9
13	7,9
14	8
15	8,4
16	8,5
17	8,9
18	9,5
19	9,6
20	9,6
21	10,1
22	12,4
23	12,7
24	13,1
25	13,1
26	14,1
27	14,4
28	14,7
29	16,9
30	17,1
31	18,9
32	19,2
33	27
Soma	346,5
Média	10,5

X - quantidade de cádmio em peixes marinhos, observados em diferentes locais do Atlântico Norte



A maioria dos valores é menor do que a média!

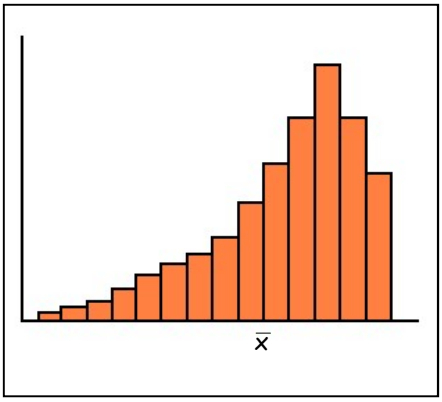
i	x_i	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^3$
1	4,5	-6	36	-216
2	5	-5,5	30,25	-166,375
3	5,1	-5,4	29,16	-157,464
4	5,1	-5,4	29,16	-157,464
5	5,5	-5	25	-125
6	5,5	-5	25	-125
7	5,7	-4,8	23,04	-110,592
8	6,4	-4,1	16,81	-68,921
9	6,5	-4	16	-64
10	7,5	-3	9	-27
11	7,7	-2,8	7,84	-21,952
12	7,9	-2,6	6,76	-17,576
13	7,9	-2,6	6,76	-17,576
14	8	-2,5	6,25	-15,625
15	8,4	-2,1	4,41	-9,261
16	8,5	-2	4	-8
17	8,9	-1,6	2,56	-4,096
18	9,5	-1	1	-1
19	9,6	-0,9	0,81	-0,729
20	9,6	-0,9	0,81	-0,729
21	10,1	-0,4	0,16	-0,064
22	12,4	1,9	3,61	6,859
23	12,7	2,2	4,84	10,648
24	13,1	2,6	6,76	17,576
25	13,1	2,6	6,76	17,576
26	14,1	3,6	12,96	46,656
27	14,4	3,9	15,21	59,319
28	14,7	4,2	17,64	74,088
29	16,9	6,4	40,96	262,144
30	17,1	6,6	43,56	287,496
31	18,9	8,4	70,56	592,704
32	19,2	8,7	75,69	658,503
33	27	16,5	272,25	4492,125
Soma	346,5	0	851,58	5211,27
Média	10,5			

X - quantidade de cádmio em peixes marinhos, observados em diferentes locais do Atlântico Norte

A maioria dos valores é menor do que a media, portanto a maioria dos desvios tem sinal negative!

123

Se $a_3<0$, a distribuição é classificada como assimétrica negativa, indicando que a maioria dos valores são maiores ou se localizam à direita da média aritmética.



Profa. Clause Piana

124

Interpretação teórica → **populações**

- Se $a_3 < 0$ → assimétrica negativa
- Se $a_3 = 0$ → simétrica
- Se $a_3 > 0$ → assimétrica positiva

Interpretação prática → **amostras**

- Se $a_3 < -0,5$ → assimétrica negativa
- Se $-0,5 \leq a_3 \leq 0,5$ → simétrica
- Se $a_3 > 0,5$ → assimétrica positiva

Uma distribuição simétrica possui muitas vantagens:

⇨ Não há ambigüidades na indicação do centro. Numa distribuição unimodal a simetria implica que a média, mediana e moda coincidam ou, em termos amostrais, estejam muito próximas.

⇨ Em geral, a interpretação e as aplicações são mais simples.

⇨ Muitos procedimentos usuais pressupõem uma distribuição normal, que é uma distribuição simétrica.

⇨ Em muitas situações onde o modelo não é normal, é suficiente que a distribuição seja simétrica.

Medidas de curtose

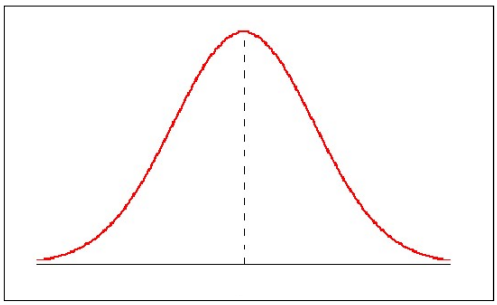
⇨ Indicam a concentração de valores no centro ou nas caudas de uma distribuição.

⇨ O coeficiente de curtose é calculado a partir do segundo e do quarto momentos centrados na média.

$$a_4 = \frac{m_4}{m_2^2}$$

⇨ A classificação é feita tendo por base a curtose que ocorre na distribuição normal, classificada como mesocúrtica.

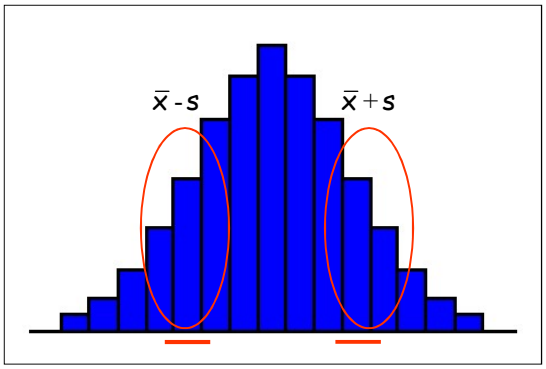
Distribuição normal → Mesocúrtica



$a_4=3$

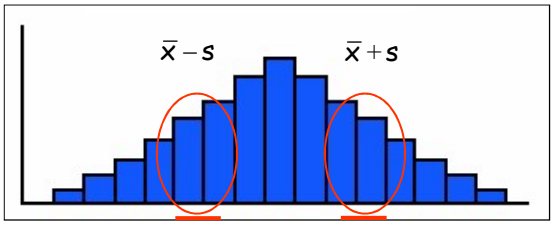
Classificação quanto à curtose

Se $a_4=3$, a distribuição é classificada como mesocúrtica, indicando que a concentração das observações ocorre de forma semelhante à da distribuição normal.



129

Se $a_4<3$, a distribuição é classificada como platicúrtica, indicando que ocorre baixa concentração de valores no centro, tornando a distribuição mais achatada que a distribuição normal.

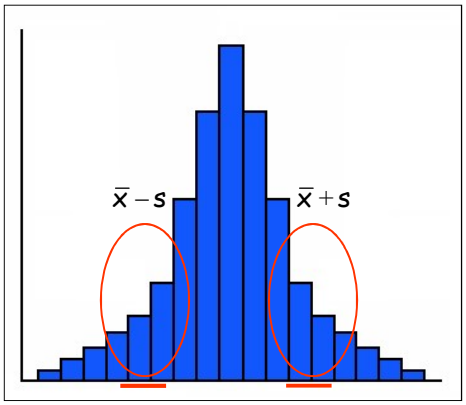


A concentração de valores nos eixos média mais ou menos o desvio padrão é maior que na distribuição normal.

Profa. Clause Piana

130

Se $a_4>3$, a distribuição é classificada como leptocúrtica, indicando que ocorre alta concentração de valores no centro e nas caudas, o que provoca um pico maior que o da distribuição normal.



A concentração de valores em torno dos eixos média mais ou menos o desvio padrão é menor do que na distribuição normal.

Calcule os coeficientes de assimetria e curtose para as variáveis Y e Z.

i	x_i	y_i	z_i
1	4	2	1
2	4	5	8
3	4	4	5
4	4	6	4
5	4	3	2
Σ	20	20	20
Média	4	4	4

Y = Peso (kg) Média = 4 kg

y_i	$(y_i-\bar{y})$	$(y_i-\bar{y})^2$	$(y_i-\bar{y})^3$	$(y_i-\bar{y})^4$
2	-2	4	-8	16
3	-1	1	-1	1
4	0	0	0	0
5	1	1	1	1
6	2	4	8	16
Σ	0	10	0	34

$$m_2 = \frac{\sum(y_i-\bar{y})^2}{n} = \frac{10\,kg^2}{5} = 2\,kg^2$$

$$m_3 = \frac{\sum(y_i-\bar{y})^3}{n} = \frac{0\,kg^3}{5} = 0\,kg^3$$

$$m_4 = \frac{\sum(y_i-\bar{y})^4}{n} = \frac{34\,kg^4}{5} = 6{,}8\,kg^4$$

$$a_3 = \frac{m_3}{m_2\sqrt{m_2}} = \frac{0\,kg^3}{2kg^2\sqrt{2kg^2}} = 0$$

simétrica

$$a_4 = \frac{m_4}{m_2^2} = \frac{6{,}8\,kg^4}{(2kg^2)^2} = 1{,}7$$

platicúrtica

Z = Número de filhos Média = 4 filhos

z_i	$(z_i-\bar{z})$	$(z_i-\bar{z})^2$	$(z_i-\bar{z})^3$	$(z_i-\bar{z})^4$
1	-3	9	-27	81
2	-2	4	-8	16
4	0	0	0	0
5	1	1	1	1
8	4	16	64	256
Σ	0	30	30	354

$$m_2 = \frac{\sum(z_i-\bar{z})^2}{n} = \frac{30}{5} = 6\ filhos^2$$

$$m_3 = \frac{\sum(z_i-\bar{z})^3}{n} = \frac{30}{5} = 6\ filhos^3$$

$$m_4 = \frac{\sum(z_i-\bar{z})^4}{n} = \frac{354}{5} = 70{,}8\ filhos^4$$

$$a_3 = \frac{m_3}{m_2\sqrt{m_2}} = \frac{6\ filhos^3}{6filhos^2\sqrt{6filhos^2}} = 0{,}401$$

simétrica

$$a_4 = \frac{m_4}{m_2^2} = \frac{70{,}8\ filhos^4}{(6filhos^2)^2} = 1{,}967$$

platicúrtica

i	x_i	$(x_i-\bar{x})$	$(x_i-\bar{x})^2$	$(x_i-\bar{x})^3$	$(x_i-\bar{x})^4$
1	4,5	-6	36	-216	1296,00
2	5	-5,5	30,25	-166,375	915,06
3	5,1	-5,4	29,16	-157,464	850,31
4	5,1	-5,4	29,16	-157,464	850,31
5	5,5	-5	25	-125	625,00
6	5,5	-5	25	-125	625,00
7	5,7	-4,8	23,04	-110,592	530,84
8	6,4	-4,1	16,81	-68,921	282,58
9	6,5	-4	16	-64	256,00
10	7,5	-3	9	-27	81,00
11	7,7	-2,8	7,84	-21,952	61,47
12	7,9	-2,6	6,76	-17,576	45,70
13	7,9	-2,6	6,76	-17,576	45,70
14	8	-2,5	6,25	-15,625	39,06
15	8,4	-2,1	4,41	-9,261	19,45
16	8,5	-2	4	-8	16,00
17	8,9	-1,6	2,56	-4,096	6,554
18	9,5	-1	1	-1	1,000
19	9,6	-0,9	0,81	-0,729	0,6561
20	9,6	-0,9	0,81	-0,729	0,6561
21	10,1	-0,4	0,16	-0,064	0,02560
22	12,4	1,9	3,61	6,859	13,03
23	12,7	2,2	4,84	10,648	23,43
24	13,1	2,6	6,76	17,576	45,70
25	13,1	2,6	6,76	17,576	45,70
26	14,1	3,6	12,96	46,656	167,96
27	14,4	3,9	15,21	59,319	231,34
28	14,7	4,2	17,64	74,088	311,17
29	16,9	6,4	40,96	262,144	1677,72
30	17,1	6,6	43,56	287,496	1897,47
31	18,9	8,4	70,56	592,704	4978,71
32	19,2	8,7	75,69	658,503	5728,98
33	27	16,5	272,25	4492,125	74120,06
Soma	346,5	0	851,58	5211,27	95789,63
Média	10,5				

Como as medidas de formato estão baseadas nos desvios ao cubo e na quarta potência, o peso de desvios de grande magnitude pode ser desproporcional nos coeficientes.

Calcule os coeficientes de assimetria e curtose para os dados:

$$m_2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

$$m_3 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^3}{n}$$

$$m_4 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^4}{n}$$

$$a_3 = \frac{m_3}{m_2\sqrt{m_2}}$$

$$a_4 = \frac{m_4}{m_2^2}$$

Bibliografia

FERREIRA, D.F. **Estatística básica**. Lavras: Editora UFLA, 2005.

SILVEIRA JUNIOR, P. ; MACHADO, A.A. ; ZONTA, E.P.; SILVA, J.B. da. **Curso de Estatística** v.1. Pelotas: Universidade Federal de Pelotas, 1992, 135p.

Sistema Galileu de Educação Estatística. Disponível em: http://www.galileu.esalq.usp.br/topico.html