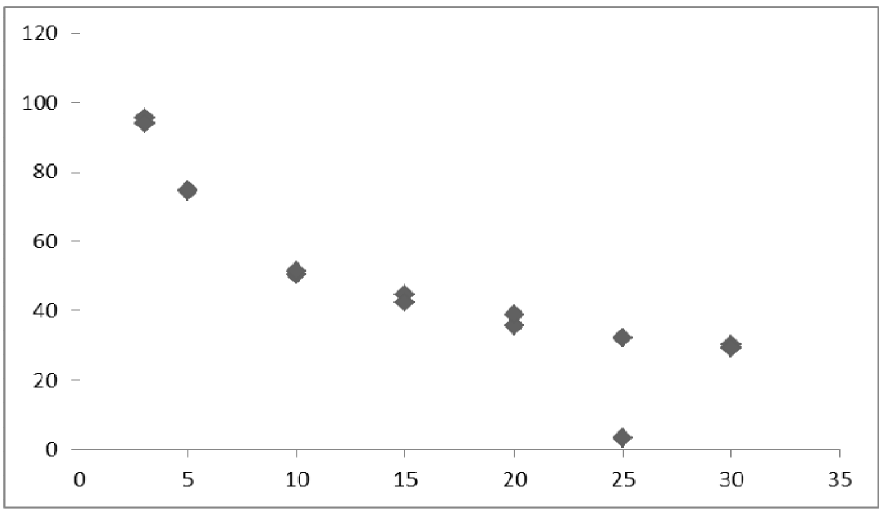
UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS
CENTRO DE DESENVOLVIMENTO TECNOLÓGICO
ESTATÍSTICA EXPERIMENTAL (T1)
1ª PROVA

Nome:____ Data: 14/02/2013

Questão 1 (5,0). Um sofisticado simulador estocástico de tráfego fornece a velocidade média (Y) em avenidas de uma metrópole em função do volume de automóveis (X). O resultado de 14 simulações revelou o seguinte:

i	Y	X	Y^2	X^2	YX
1	95,6	3	9139,36	9	286,8
2	93,8	3	8798,44	9	281,4
3	74,4	5	5535,36	25	372
4	74,8	5	5595,04	25	374
5	50,5	10	2550,25	100	505
6	51,5	10	2652,25	100	515
7	44,6	15	1989,16	225	669
8	42,4	15	1797,76	225	636
9	35,8	20	1281,64	400	716
10	38,7	20	1497,69	400	774
11	32,0	25	1024	625	800
12	3,2	25	10,24	625	80
13	30,1	30	906,01	900	903
14	29,1	30	846,81	900	873
Soma	696,5	216	43624,01	4568	7785,2
Média	49,75	15,43			

a) Calcule o valor do coeficiente de correlação e interprete-o.
b) Verifique se a correlação entre as variáveis X e Y é significativa, ou seja, teste a hipótese de que $\rho=0$.
c) Considerando que a variável volume de tráfego (X) tem efeito linear sobre a variável velocidade média (Y), estabeleça o modelo que expressa essa relação e explique o significado de cada termo.
d) Estime os parâmetros do modelo (β_0 e β_1) e ajuste a equação da reta.
e) Trace a reta da regressão no gráfico de dispersão dos valores observados.



f) Estabeleça a hipótese de interesse sobre β_1 e teste-a utilizando a tabela de análise de variância abaixo. Conclua com base no valor p.

Fontes	GL	SQ	S^2	F	p
Regressão	1	7095,79	7095,79	45,36	0,00002089
Resíduo	12	1877,35	156,45	-	-
Total	13	8973,14	-	-	-

g) Faça a **predição** de y para x=10 (intervalo com 95% de confiança).
h) Faça a **previsão** de y para x=10 (intervalo com 95% de confiança).

Questão 2 (5,0). Um estudo foi realizado para identificar o modelo que melhor representa a relação entre a variável resposta vazão mínima média (m³/s) e as possíveis preditoras declividade de drenagem (m/km) e densidade de drenagem (junções/km²). O primeiro modelo a ser testado é o modelo de regressão linear múltipla. Os dados observados em 15 estações fluviométricas da bacia do rio Paraopeba são apresentados na tabela abaixo.

Estação (j)	Vazão mínima média (Y)	Declividade de drenagem (X_1)	Densidade de drenagem (X_2)	Y^2	X_1^2	X_2^2	YX_1	YX_2	X_1X_2
1	2,60	2,69	0,098	6,76	7,24	0,010	6,99	0,25	0,264
2	1,49	3,94	0,079	2,22	15,52	0,006	5,87	0,12	0,311
3	1,43	7,20	0,119	2,04	51,84	0,014	10,30	0,17	0,857
4	3,44	3,18	0,102	11,83	10,11	0,010	10,94	0,35	0,324
5	1,37	2,44	0,123	1,88	5,95	0,015	3,34	0,17	0,300
6	2,53	1,25	0,136	6,40	1,56	0,018	3,16	0,34	0,170
7	15,12	1,81	0,121	228,61	3,28	0,015	27,37	1,83	0,219
8	16,21	1,59	0,137	262,76	2,53	0,019	25,77	2,22	0,218
9	21,16	1,21	0,134	447,75	1,46	0,018	25,60	2,84	0,162
10	30,26	1,08	0,018	915,67	1,17	0,000	32,68	0,54	0,019
11	28,53	1,00	0,141	813,96	1,00	0,020	28,53	4,02	0,141
12	1,33	4,52	0,064	1,77	20,43	0,004	6,01	0,09	0,289
13	0,43	10,27	0,131	0,18	105,47	0,017	4,42	0,06	1,345
14	39,12	0,66	0,143	1530,37	0,44	0,020	25,82	5,59	0,094
15	45,00	0,60	0,133	2025,00	0,36	0,018	27,00	5,99	0,080
Soma	210,02	43,44	1,679	6257,22	228,36	0,205	243,81	24,58	4,794
Média	14,00	2,896	0,1119						

a) Estime os parâmetros da equação de regressão linear múltipla que relacione a vazão mínima média, Y, com a declividade, X_1, e a densidade de drenagem, X_2.

b) Na relação linear entre a variável Y e as variáveis X_1 e X_2, obtida na questão anterior, explique o significado da estimativa do coeficiente de regressão parcial correspondente a X_1.

c) Efetue a análise da variância e o teste F para a hipótese geral de linearidade da relação entre Y e (X_1, X_2).

d) Calcule o coeficiente de determinação corrigido e explique o seu significado.

e) Para a equação de regressão considerada no item a, teste as hipóteses parciais.

f) Considerando os resultados do item e, qual das variáveis explanatórias, X_1 e X_2, você escolheria, se tivesse que expressar vazão mínima média através de uma equação de regressão linear simples. Seria, nesse caso, razoável a utilização de uma equação com apenas uma das variáveis preditoras?

Regressão linear simples

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2} = \frac{SPXY}{SQX}$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

$$\hat{\mu}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$$

$$\hat{e}_i = y_i - \hat{\mu}_i$$

$$SQ_{Total} = \sum (y_i - \bar{y})^2 = SQY$$

$$SQ_{Reg} = \sum (\hat{\mu}_i - \bar{y})^2 = \beta_1^2 \sum (x_i - \bar{x})^2 = \beta_1^2 SQX$$

$$SQ_{Res} = \sum (y_i - \hat{\mu}_i)^2 = \sum \hat{e}_i^2 \ \text{(por diferença)}$$

$$r^2 = \frac{SQ_{Reg}}{SQ_{Total}}$$

$$T = \frac{\hat{\beta}_1}{S(\hat{\beta}_1)} = \frac{\hat{\beta}_1}{\sqrt{S^2(\hat{\beta}_1)}} \sim t(\nu = n-2)$$

$$S^2(\hat{\beta}_1) = \frac{\frac{\sum \hat{e}_i^2}{n-2}}{\sum (x_i - \bar{x})^2} = \frac{S^2 Res}{SQX}$$

$$S^2(\hat{\beta}_0) = \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{SQX}\right)\left(S^2 Res\right)$$

$$S^2(\hat{\mu}_i) = \left(\frac{1}{n} + \frac{(x_i - \bar{x})^2}{SQX}\right)\left(S^2 Res\right)$$

$$S^2(y_i) = \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_i - \bar{x})^2}{SQX}\right)\left(S^2 Res\right)$$

$$IC(\beta_1; 1-\alpha): \hat{\beta}_1 \pm t_{\alpha/2}\sqrt{S^2(\hat{\beta}_1)}$$

$$IC(\beta_0; 1-\alpha): \hat{\beta}_0 \pm t_{\alpha/2}\sqrt{S^2(\hat{\beta}_0)}$$

$$IC(\mu_i; 1-\alpha): \hat{\mu}_i \pm t_{\alpha/2}\sqrt{S^2(\hat{\mu}_i)} \ \text{(predição)}$$

$$IC(y_i; 1-\alpha): \hat{\mu}_i \pm t_{\alpha/2}\sqrt{S^2(y_i)} \ \text{(previsão)}$$

Correlação linear

$$r_{xy} = \frac{SPXY}{\sqrt{SQX}\sqrt{SQY}}$$

$$S^2(r_{xy}) = \frac{1 - r_{xy}^2}{n-2}$$

$$T = \frac{r_{xy}}{S(r_{xy})} = \frac{r_{xy}}{\sqrt{S^2(r_{xy})}} \sim t(\nu = n-2)$$

$$SQX = \sum x_i^2 - n\bar{x}^2$$

$$SQY = \sum y_i^2 - n\bar{y}^2$$

$$SPXY = \sum x_i y_i - n\overline{xy}$$

Regressão Múltipla

$$SQX_1 = \sum x_{1j}^2 - n\bar{x}_1^2$$

$$SQX_2 = \sum x_{2j}^2 - n\bar{x}_2^2$$

$$SQY = \sum y_j^2 - n\bar{y}^2$$

$$SPX_1X_2 = \sum x_{1j}x_{2j} - n\bar{x}_1\bar{x}_2$$

$$SPX_1Y = \sum x_{1j}y_j - n\bar{x}_1\bar{y}$$

$$SPX_2Y = \sum x_{2j}y_j - n\bar{x}_2\bar{y}$$

$$\begin{cases} \hat{\beta}_1 SQX_1 + \hat{\beta}_2\, SPX_1X_2 = SPX_1Y \\ \hat{\beta}_1 SPX_1X_2 + \hat{\beta}_2 SQX_2 = SPX_2Y \end{cases}$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1\bar{x}_1 - \hat{\beta}_2\bar{x}_2$$

$$\hat{\mu} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2$$

$$S^2(\hat{\beta}_1) = \frac{SQX_2}{SQX_1 \times SQX_2 - (SPX_1X_2)^2}\left(S^2 \mathrm{Res}\right)$$

$$S^2(\hat{\beta}_2) = \frac{SQX_1}{SQX_1 \times SQX_2 - (SPX_1X_2)^2}\left(S^2 \mathrm{Res}\right)$$

$$SQ_{Total} = \sum (y_j - \bar{y})^2 = SQY$$

$$SQ_{Reg} = \sum (\hat{\mu}_i - \bar{y})^2 = \hat{\beta}_1 \times SPX_1Y + \hat{\beta}_2 \times SPX_2Y$$

$$SQ_{Res} = \sum (y_j - \hat{\mu}_j)^2 = \sum \hat{e}_j^2 \ \text{(por diferença)}$$

$$r_C^2 = r^2 - \frac{2}{n-3}\left(1 - r^2\right)$$

Tabela II. Limites da distribuição t de Student.

Graus de Liberdade (ν)	**Limites bilaterais**: P($\lvert t \rvert > t_{\alpha/2}$)							
	Nível de Significância (α)							
	0,50	0,20	0,10	0,05	0,025	0,02	0,01	0,005
6	0,718	1,440	1,943	2,447	2,969	3,143	3,707	4,317
7	0,711	1,415	1,895	2,365	2,841	2,998	3,500	4,029
8	0,706	1,397	1,860	2,306	2,752	2,896	3,355	3,833
9	0,703	1,383	1,833	2,262	2,685	2,821	3,250	3,690
10	0,700	1,372	1,813	2,228	2,634	2,764	3,169	3,581
11	0,697	1,363	1,796	2,201	2,503	2,718	3,106	3,497
12	0,695	1,356	1,782	2,179	2,560	2,681	3,055	3,428
13	0,694	1,350	1,771	2,160	2,533	2,650	3,012	3,373
14	0,692	1,345	1,761	2,145	2,510	2,624	2,977	3,326
15	0,691	1,341	1,753	2,132	2,490	2,602	2,947	3,286

Tabela IV. Limites unilaterais superiores da distribuição F: P[F > f_α].

		ν_1																			
ν_2	α	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	15	20	24	30	40	60	120	Inf.
	0,05	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,82	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45	2,40
11	0,025	6,72	5,26	4,63	4,28	4,04	3,88	3,76	3,66	3,59	3,53	3,43	3,33	3,33	3,23	3,17	3,12	3,06	3,00	2,94	2,88
	0,01	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40	4,25	4,10	4,02	3,94	3,86	3,78	3,69	3,60
	0,001	19,69	13,81	11,56	10,35	9,58	9,05	8,66	8,35	8,12	7,92	7,76	7,63	7,32	7,01	6,85	6,68	6,52	6,35	6,17	6,00
	0,05	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,72	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34	2,30
12	0,025	6,55	5,10	4,47	4,12	3,89	3,73	3,61	3,51	3,44	3,37	3,28	3,18	3,18	3,07	3,02	2,96	2,91	2,85	2,79	2,72
	0,01	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16	4,01	3,86	3,78	3,70	3,62	3,54	3,45	3,36
	0,001	18,64	12,97	10,80	9,63	8,89	9,38	8,00	7,71	7,48	7,29	7,14	7,00	6,71	6,40	6,25	6,09	5,93	5,76	5,59	5,42
	0,05	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,63	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30	2,25	2,21
13	0,025	6,41	4,97	4,35	4,00	3,77	3,60	3,48	3,39	3,31	3,25	3,15	3,05	3,05	2,95	2,89	2,84	2,78	2,72	2,66	2,60
	0,01	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96	3,82	3,66	3,59	3,51	3,43	3,34	3,25	3,17
	0,001	17,81	12,31	10,21	9,07	8,35	7,86	7,49	7,21	6,98	6,80	6,65	6,52	6,23	5,93	5,78	5,63	5,47	5,30	5,14	4,97
	0,05	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,56	2,53	2,46	2,39	2,35	2,31	2,27	2,22	2,18	2,13
14	0,025	6,30	4,86	4,24	3,89	3,66	3,50	3,38	3,29	3,21	3,15	3,05	2,95	2,95	2,84	2,79	2,73	2,67	2,61	2,55	2,49
	0,01	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80	3,66	3,51	3,43	3,35	3,27	3,18	3,09	3,00
	0,001	17,14	11,78	9,73	8,62	7,92	7,43	7,08	6,80	6,58	6,40	6,26	6,13	5,85	5,56	5,41	5,25	5,10	4,94	4,77	4,60