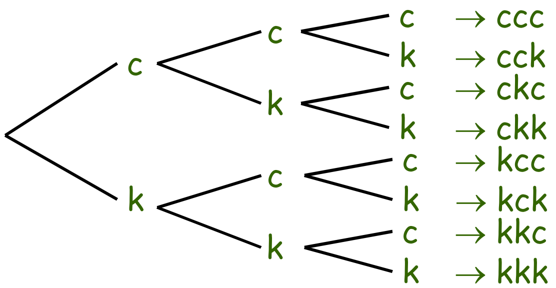
UNIDADE III - Elementos de probabilidades

Variáveis aleatórias

Experimento aleatório: Lançamento de uma moeda honesta três vezes e observação das faces que ocorrem.

Diagrama em árvore



$\#S = 2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$

$S = \{ccc, cck, ckc, kcc, kkc, kck, ckk, kkk\}$

⇨ Ferramental matemático se amplia consideravelmente se o espaço amostral for numérico

Experimento aleatório: Lançamento de uma moeda honesta três vezes e observação das faces que ocorrem.

S = {ccc, cck, ckc, kcc, kkc, kck, ckk, kkk}

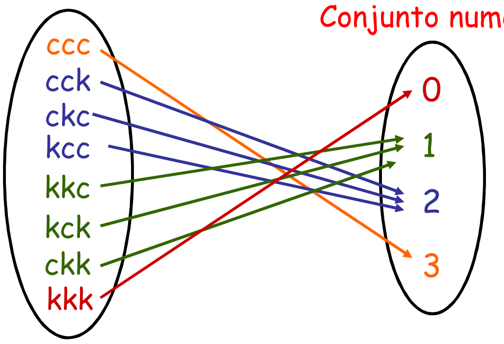
X = número de caras ocorrido nos três lançamentos

Quais são os possíveis valores de X? X = {0, 1, 2, 3}

Conjunto não numérico

Conjunto numérico

X(ccc) = 3
X(cck) = 2
X(ckc) = 2
X(kcc) = 2
X(kkc) = 1
X(kck) = 1
X(ckk) = 1
X(kkk) = 0



X é a variável que transforma um conjunto não numérico num conjunto numérico

Variável aleatória

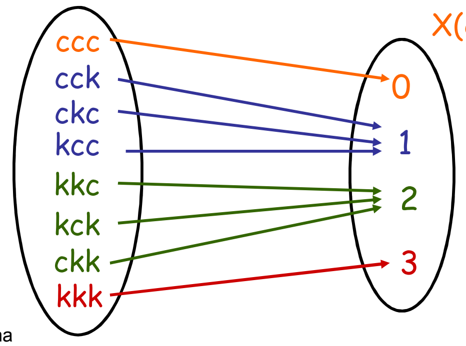
Definição: É uma função (ou regra) que transforma um espaço amostral qualquer em um espaço amostral numérico, que será sempre um subconjunto do conjunto dos números reais.

Y = número de coroas que ocorrem em três lançamentos

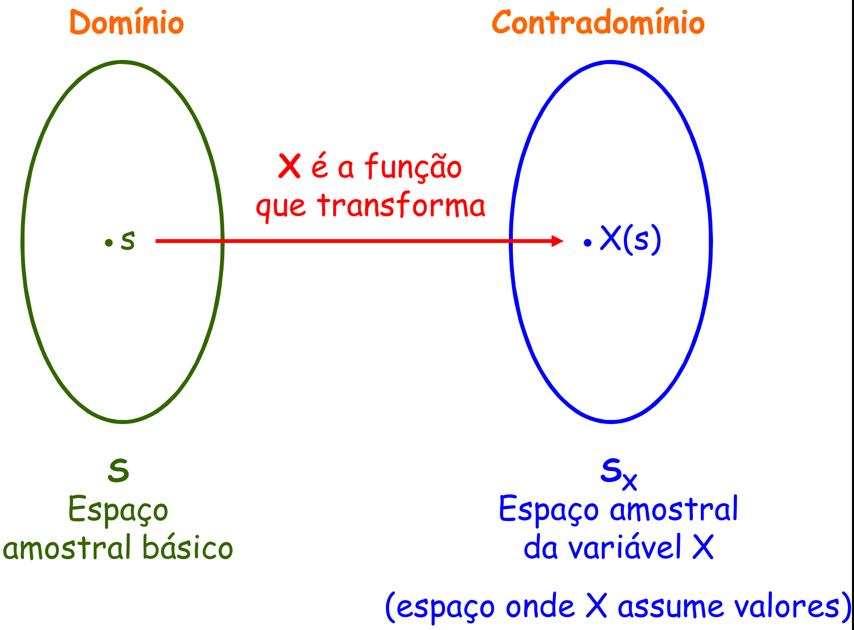
Y = {0 , 1 , 2, 3}

X(ccc) = 3 ≠ Y(ccc) = 0

Y(ccc) = 0
Y(cck) = 1
Y(ckc) = 1
Y(kcc) = 1
Y(kkc) = 2
Y(kck) = 2
Y(ckk) = 2
Y(kkk) = 3



X e Y não são a mesma função porque a correspondência não é a mesma.



Profa. Clause Piana 5

Variáveis aleatórias { Discretas / Contínuas

Variáveis aleatórias discretas

Definição: São discretas todas as variáveis cujo espaço amostral S_X é enumerável finito ou infinito.

Se X é uma variável aleatória discreta, então S_X é um subconjunto dos inteiros.

Exemplos:

- número caras em três lançamentos de uma moeda
- número de filhos de um casal
- número de peças defeituosas numa linha de produção
- número de ciclones que ocorrem numa região
- número de erros em uma "string" de 1.000 bits

Exemplo: Lançamento de uma moeda até que ocorra a face cara e observação das faces que ocorrem.

$S = \{c, kc, kkc, kkkc, kkkkc, kkkkkc, ...\}$

X = número de **coroas** até que ocorra cara

$S_X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$

$S \xrightarrow{X} S_X$

$X(c) = 0$

$X(kc) = 1$

Y = número de **lançamentos** até que ocorra cara

$S_Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$

$S \xrightarrow{Y} S_Y$

$Y(c) = 1$

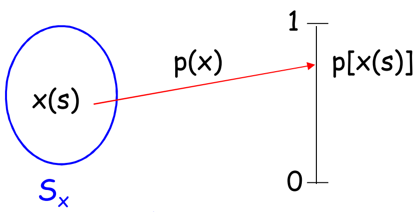
$Y(kc) = 2$

Profa. Clause Piana 7

1. Função de probabilidade

Definição: Seja X uma variável aleatória discreta e S_X o seu espaço amostral. A função de probabilidade $P(X=x)$, ou simplesmente $p(x)$, será a função que associa a cada valor de X a sua probabilidade de ocorrência, desde que atenda duas condições:

1. $p(x) \geq 0, \forall\ x \in S_X$
2. $\sum_{x \in S_X} p(x) = 1$



S_x
Espaço amostral de X

Intervalo [0, 1] na reta real

Domínio e contradomínio de uma função de probabilidade

Profa. Clause Piana 8

Exemplo: Lançamento de uma moeda honesta três vezes e observação das faces que ocorrem.

S = {ccc, cck, ckc, kcc, kkc, kck, ckk, kkk}

X = número de caras nos três lançamentos

$S_X = \{0, 1, 2, 3\}$

1. $p(x) \geq 0, \forall\ x \in S_X$

$p(0) = 1/8$
$p(1) = 3/8$
$p(2) = 3/8$
$p(3) = 1/8$

2. $\sum_{x \in S_X} p(x) = 1$

$$\frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$$

Existem três formas de representar uma função:

- **Representação tabular:** consiste em relacionar em uma tabela os valores da função de probabilidade.
- **Representação gráfica:** consiste em representar graficamente a relação entre os valores da variável e suas probabilidades
- **Representação analítica:** estabelece uma expressão geral para representar o valor da função de probabilidade num ponto genérico da variável X

Exemplo: De uma urna com três bolas pretas e duas brancas, retiram-se duas bolas juntas. Se X é o número de bolas pretas retiradas, determine a função de probabilidade P(X=x).

$S = \{B_1B_2, P_1B_1, P_1B_2, P_2B_1, P_2B_2, P_3B_1, P_3B_2, P_1P_2, P_1P_3, P_2P_3\}$

X = número de bolas pretas $\quad S_X = \{0, 1, 2\}$

$$P(X = 0) = \frac{C_3^0\, C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10}$$

$$P(X = 1) = \frac{C_3^1\, C_2^1}{C_5^2} = \frac{6}{10}$$

$$P(X = 2) = \frac{C_3^2\, C_2^0}{C_5^2} = \frac{3}{10}$$

Profa. Clause Piana 11

Exemplo: De uma urna com três bolas pretas e duas brancas, retiram-se duas bolas juntas. Se X é o número de bolas pretas retiradas, determine a função de probabilidade P(X=x).

$S = \{B_1B_2, P_1B_1, P_1B_2, P_2B_1, P_2B_2, P_3B_1, P_3B_2, P_1P_2, P_1P_3, P_2P_3\}$

$S_X = \{0, 1, 2\}$

$$P(X = 0) = \frac{C_3^0\, C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10}$$

$$P(X = 1) = \frac{C_3^1\, C_2^1}{C_5^2} = \frac{6}{10}$$

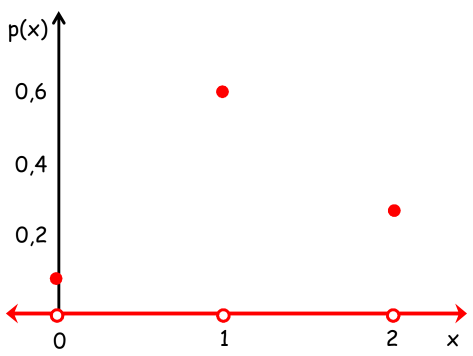
$$P(X = 2) = \frac{C_3^2\, C_2^0}{C_5^2} = \frac{3}{10}$$

Profa. Clause Piana 12

Representação tabular

X=x	0	1	2	Σ
P(X=x)	0,1	0,6	0,3	1

Representação gráfica



$S_X = \{0, 1, 2\}$

⇨ P(X=x) é uma função contínua para todo o $x \notin S_X$, ou seja, a função P(X=x) assume o valor zero para todo o $x \notin S_X$.

⇨ P(X=x) é conhecida como função de probabilidade no ponto

Representação analítica

$$P(X = 0) = \frac{C_3^0\ C_2^2}{C_5^2}$$

$$P(X = 1) = \frac{C_3^1\ C_2^1}{C_5^2}$$

$$P(X = 2) = \frac{C_3^2\ C_2^0}{C_5^2}$$

$$\left.\right\} \boxed{P(X = x) = \frac{C_3^x\ C_2^{2-x}}{C_5^2}}, \text{ para } S_X = \{0, 1, 2\}$$

Exercício proposto:

De uma urna com cinco bolas pretas, três brancas e duas azuis, retiram-se, de uma vez, três bolas.

a) Defina uma variável aleatória que transforme o espaço amostral básico num espaço numérico.

b) Determine a função de probabilidade P(X=x) desta variável.

2. Função de distribuição ou probabilidade acumulada

Definição: Seja X uma variável aleatória discreta e S_X o seu espaço amostral. A função de distribuição, denotada por $F(x)$ ou $P(X \leq x)$, é a função que associa a cada valor de X a probabilidade $P(X \leq x)$. Desta forma, temos

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} P(X = t)$$

No exemplo:

X=x	0	1	2	Σ
P(X=x)	0,1	0,6	0,3	1

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} P(X = t)$$

$$F(0) = P(X \leq 0) = \sum_{x \leq 0} P(X = x) = P(X = 0) = 0{,}1$$

$$F(1) = P(X \leq 1) = \sum_{x \leq 1} P(X = x) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}1 + 0{,}6 = 0{,}7$$

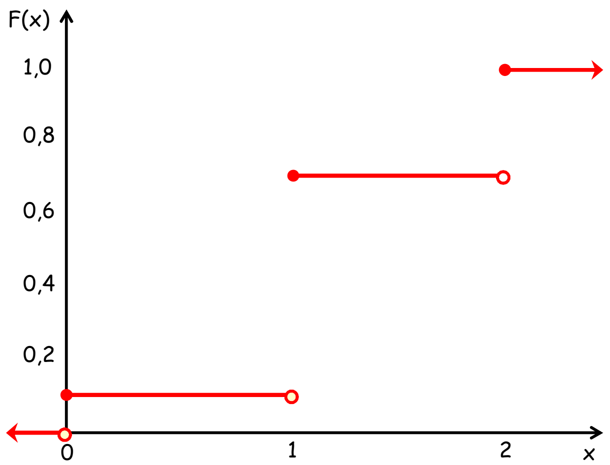
$$F(2) = P(X \leq 2) = \sum_{x \leq 2} P(X = x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$= 0{,}1 + 0{,}6 + 0{,}3 = 1$$

Representação tabular

X=x	0	1	2	Σ
P(X=x)	0,1	0,6	0,3	1
F(x)	0,1	0,7	1	-

Representação gráfica



Representação analítica

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{t \le x} P(X = t)$$

No exemplo:

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{t \le x} \frac{C_3^t \, C_2^{2-t}}{C_5^2} \;, \quad \text{para } S_X = \{0, 1, 2\}$$

$$F(1) = P(X \le 1) = \sum_{x \le 1} \frac{C_3^x \, C_2^{2-x}}{C_5^2} = \frac{C_3^0 \, C_2^2}{C_5^2} + \frac{C_3^1 \, C_2^1}{C_5^2}$$

3. Medidas descritivas

$$S \xrightarrow{X} S_X$$

Conjunto não numérico $\xrightarrow{X}$ Conjunto numérico $\rightarrow$ Possibilita o cálculo de medidas descritivas: média, variância, etc.

No exemplo:

$S = \{B_1B_2, P_1B_1, P_1B_2, P_2B_1, P_2B_2, P_3B_1, P_3B_2, P_1P_2, P_1P_3, P_2P_3\}$

$\downarrow$ X = número de bolas pretas

$S_X = \{0, 1, 2\}$

X = número de bolas pretas $S_X = \{0, 1, 2\}$

X=x	0	1	2	Σ
P(X=x)	0,1	0,6	0,3	1

◘ Média ou valor esperado

Definição: Seja X uma variável aleatória discreta e S_X o seu espaço amostral. O valor médio de X, denotado por $E(X)$, ou μ_X, ou simplesmente μ, é a média dos valores de X ponderada pelas suas respectivas probabilidades de ocorrência. Deste modo, tem-se

$$E(X) = \mu = \frac{\sum_{x \in S_X} x\,p(x)}{\sum_{x \in S_X} p(x) = 1} = \sum_{x \in S_X} x\,p(x)$$

No exemplo: X = número de bolas pretas $S_X = \{0, 1, 2\}$

X=x	0	1	2	Σ
P(X=x)	0,1	0,6	0,3	1

$$E(X) = \mu = \sum_{x \in S_X} x\,p(x)$$

$$= 0 \times 0,1 + 1 \times 0,6 + 2 \times 0,3 = 1,2 \text{ bolas pretas}$$

Significado do valor esperado: se o experimento fosse repetido um grande número de vezes, o número médio de bolas pretas escolhidas seria 1,2.

Quando o espaço amostral é equiprovável:

X=x	0	1	2	$\sum$
P(X=x)	1/3	1/3	1/3	1

$$E(X) = \mu = \sum_{x \in S_X} x\,p(x) = 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{3}$$

Média ponderada

$$= \frac{0}{3} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}$$

$$= \frac{0+1+2}{3} = \frac{3}{3} = 1 \text{ bola preta}$$

$$= \frac{\sum_{x \in S_X} x}{n}$$

Média simples

A média ponderada passa a ser simples

Importante!!!

⇨ Não confundir μ_X com $\overline{X}$.

μ_X é a média de todos os valores de X (para os quais a probabilidade é conhecida)

$\overline{X}$ é a média de alguns valores de X (usualmente uma amostra de valores)

Propriedades da média ou valor esperado

1ª propriedade: A média de uma constante **c** é a própria constante. $E(c)=c$

2ª propriedade: Se **X** é uma variável aleatória e **c** uma constante, ao multiplicarmos a variável pela constante a média da variável também fica multiplicada pela constante.

$$E(cX)=cE(X)$$

3ª propriedade: Se **X** é uma variável aleatória e **c** uma constante, ao somarmos a constante aos valores da variável a média da variável também fica somada da constante.

$$E(c+X)=c+E(X)$$

4ª propriedade: A média do desvio é igual a zero.

$$E(X-\mu)=0$$

Propriedades da média ou valor esperado

5ª propriedade: A média do desvio quadrático em relação a uma constante **c** é mínima quando $c=\mu$.

$$E(X-\mu)^2 < E(X-c)^2$$

6ª propriedade: Se **X** e **Y** são duas variáveis aleatórias, a média da soma (ou diferença) das duas variáveis é igual à soma (ou diferença) de suas médias.

$$E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$$

7ª propriedade: Se **X** e **Y** são duas variáveis aleatórias independentes, a média do produto das duas variáveis é igual ao produto de suas médias.

$E(XY) = E(X)\,E(Y)$, se **X** e **Y** são independente

Exercícios propostos:

1. De uma urna com cinco bolas pretas, três brancas e duas azuis, retiram-se, de uma vez, três bolas. Sendo X o número de bolas azuis retiradas, calcule o valor esperado de X.

2. Um vendedor de equipamento pesado pode visitar, em um dia, um ou dois clientes, com probabilidades de 1/3 e 2/3, respectivamente. De cada contato pode resultar a venda de um equipamento por R$ 50.000,00 (com probabilidade 1/10) ou nenhuma venda (com probabilidade 9/10). Sendo Y o valor total de vendas diárias desse vendedor, calcule o valor esperado de Y.

Variância

Definição: Seja **X** uma variável aleatória discreta e S_X o seu espaço amostral. A variância de **X**, denotada por **V(X)**, ou σ_X^2 , ou simplesmente σ^2, é o grau médio de dispersão dos valores de **X** em relação à sua média. Esta medida é definida como a média ou valor esperado dos quadrados dos desvios em relação à média. Deste modo, temos

$$V(X) = \sigma^2 = \boxed{E(X-\mu)^2}$$
$$= E(X^2 - 2X\mu + \mu^2)$$
$$= E(X^2) - E(2X\mu) + E(\mu^2)$$
$$= E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2$$
$$= E(X^2) - 2\mu\mu + \mu^2 = \boxed{E(X^2) - \mu^2}$$

$$V(X) = \sigma^2 = \boxed{E(X-\mu)^2} \leftarrow \boxed{\text{Fórmula de definição}}$$

$$= \sum_{x \in S_X} (x-\mu)^2 p(x)$$

$$V(X) = \sigma^2 = \boxed{E(X^2) - \mu^2} \leftarrow \boxed{\text{Fórmula prática}}$$

onde:

$$E(X^2) = \sum_{x \in S_X} x^2 p(x) \leftarrow \boxed{\text{Média dos quadrados de X}}$$

$$\mu^2 = [E(X)]^2 = \left[\sum x\, p(x)\right]^2 \leftarrow \boxed{\text{Quadrado da média de X}}$$

Profa. Clause Piana 31

No exemplo: X = número de bolas pretas $S_X = \{0, 1, 2\}$

X=x	0	1	2	Σ
P(X=x)	0,1	0,6	0,3	1

$E(X) = \mu = 1,2$

$$V(X) = \sigma^2 = E(X-\mu)^2$$

$$= \sum_{x \in S_X} (x-\mu)^2 p(x)$$

$$= (0-1,2)^2 \times 0,1 + (1-1,2)^2 \times 0,6 + (2-1,2)^2 \times 0,3 = 0,36$$

$$V(X) = \sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = 1,8 - (1,2)^2 = 1,8 - 1,44 = 0,36 \text{ bolas pretas}^2$$

$$\Downarrow$$

$$E(X^2) = \sum x^2 p(x)$$

$$= 0^2 \times 0,1 + 1^2 \times 0,6 + 2^2 \times 0,3 = 1,8$$

Propriedades da variância

1ª propriedade: Se **c** é uma constante, sua variância é nula.

$$V(c)=0$$

2ª propriedade: Se **X** é uma variável aleatória e **c** uma constante, ao multiplicarmos a variável pela constante a variância da variável fica multiplicada pelo quadrado da constante.

$$V(cX)=c^2V(X)$$

3ª propriedade: Se **X** é uma variável aleatória e **c** uma constante, ao somarmos a constante aos valores da variável a variância da variável não se altera.

$$V(X+c)=V(X)$$

4ª propriedade: Se **X** e **Y** são duas variáveis aleatórias independentes, a variância da soma (ou diferença) das duas variáveis é igual à soma das variâncias de cada uma.

$V(X \pm Y)=V(X)+V(Y)$, se **X** e **Y** são independentes

◻ Desvio padrão

Definição: Raiz quadrada positiva da variância.

$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$

⇨ Variação média associada a cada valor da variável

Vantagens

- ✓ Possui a mesma unidade da variável original.
- ✓ É sempre possível associar proporções de valores de uma variável a intervalos construídos a partir da média e do desvio padrão.

No exemplo: X = número de bolas pretas $S_X = \{0, 1, 2\}$

$$\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0,36} = 0,6 \text{ bolas pretas}$$

Significado do desvio padrão: se o experimento fosse repetido um grande número de vezes, a variação média do número de bolas pretas escolhidas em torno do valor esperado seria 0,6.

Atenção!!!

As propriedades da variância não são extensivas ao desvio padrão. Por exemplo:

$$\sigma_{2X} = \sqrt{V(2X)} = \sqrt{2^2 V(X)} = 2\sigma_X$$

Importante!!!

⇨ Não confundir σ^2 com s^2.

σ^2 é a variância de **todos** os valores de X (para os quais a probabilidade é conhecida)

s^2 é a variância de **alguns** valores de X (usualmente uma amostra de valores)

⇨ Da mesma forma, não confundir σ com s.

Profa. Clause Piana 37

Exercícios propostos:

1. De uma urna com cinco bolas pretas, três brancas e duas azuis, retiram-se, de uma vez, três bolas. Sendo X o número de bolas azuis retiradas, calcule a variância e o desvio padrão de X.

$E(X) = \mu = 0{,}6$ bolas azuis

$V(X) = \sigma^2 = E(X - \mu)^2 = 0{,}3733$ bolas azuis^2

$\sigma = 0{,}611$ bolas azuis

Profa. Clause Piana 38

2. Um vendedor de equipamento pesado pode visitar, em um dia, um ou dois clientes, com probabilidades de 1/3 e 2/3, respectivamente. De cada contato pode resultar a venda de um equipamento por R$ 50.000,00 (com probabilidade 1/10) ou nenhuma venda (com probabilidade 9/10). Sendo Y o valor total de vendas diárias desse vendedor, calcule a variância e o desvio padrão do valor total de vendas diárias.

$E(Y) = \mu = 8.333,33$ reais

$V(Y) = \sigma^2 = E(Y^2) - \mu^2 = 450.000.000 - 8333,33^2$
$= 380.555.555,6$ reais^2

$\sigma = 19.507,83$ reais

Momentos, assimetria e curtose

Média dos desvios em relação a constante **a**, elevados à potencia r

$$\mu_r = E(X-a)^r$$

$$m_r = \frac{\sum (x_i - a)^r}{n}$$

Momentos

- **Centrados na origem (ordinários)** $\longrightarrow a = 0$

$$\mu'_r = E(X-0)^r = E(X^r)$$

- **Centrados na média** $\longrightarrow a = \mu$

$$\mu_r = E(X-\mu)^r$$

Momentos centrados na origem (ordinários)

Para r = 1:

$$\mu'_1 = E(X) = \sum_{x \in S_X} x\,p(x)$$ ← Média de X

Para r = 2:

$$\mu'_2 = E(X^2) = \sum_{x \in S_X} x^2\,p(x)$$ ← Média dos quadrados de X

Para r = 3:

$$\mu'_3 = E(X^3) = \sum_{x \in S_X} x^3\,p(x)$$ ← Média dos cubos de X

Momentos centrados na média

Para r = 1: Média dos desvios

$$\mu_1 = E(X-\mu)^1$$
$$\mu_1 = E(X) - \mu$$
$$\mu_1 = \mu - \mu = 0$$

Para r = 2: Média dos quadrados dos desvios

$$\mu_2 = \boxed{E(X-\mu)^2} = \sum_{x \in S_X} (x-\mu)^2 p(x)$$ ← Fórmula de definição

$$\mu_2 = \boxed{E(X^2) - \mu^2}$$ ← Fórmula prática

Para r = 3: Média dos cubos dos desvios

$$\mu_3 = \boxed{E(X-\mu)^3} = \sum_{x \in S_X} (x-\mu)^3 p(x) \leftarrow \boxed{\text{Fórmula de definição}}$$

$$= E(X^3 - 3X^2\mu + 3X\mu^2 - \mu^3)$$
$$= E(X^3) - E(3X^2\mu) + E(3X\mu^2) - E(\mu^3)$$
$$= E(X^3) - 3\mu E(X^2) + 3\mu^2 E(X) - \mu^3$$
$$= E(X^3) - 3\mu E(X^2) + 3\mu^2 \mu - \mu^3$$
$$= E(X^3) - 3\mu E(X^2) + 3\mu^3 - \mu^3$$

$$\mu_3 = \boxed{E(X^3) - 3\,\mu\, E(X^2) + 2\mu^3} \leftarrow \boxed{\text{Fórmula prática}}$$

Para r = 4: Média dos desvios na potência quatro

$$\mu_4 = \boxed{E(X-\mu)^4} = \sum_{x \in S_X} (x-\mu)^4 p(x) \leftarrow \boxed{\text{Fórmula de definição}}$$

$$\mu_4 = \boxed{E(X^4) - 4E(X^3)\mu + 6E(X^2)\mu^2 - 3\mu^4} \leftarrow \boxed{\text{Fórmula prática}}$$

Coeficiente de assimetria: $a_3 = \dfrac{\mu_3}{\mu_2\sqrt{\mu_2}}$

Coeficiente de curtose: $a_4 = \dfrac{\mu_4}{\mu_2^2}$

Interpretação:

$$a_3 = \frac{\mu_3}{\mu_2\sqrt{\mu_2}} \quad \begin{cases} \text{- Se } a_3 < 0 \rightarrow \text{assimétrica negativa} \\ \text{- Se } a_3 = 0 \rightarrow \text{simétrica} \\ \text{- Se } a_3 > 0 \rightarrow \text{assimétrica positiva} \end{cases}$$

$$a_4 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} \quad \begin{cases} \text{- Se } a_4 < 3 \rightarrow \text{platicúrtica} \\ \text{- Se } a_4 = 3 \rightarrow \text{mesocúrtica} \\ \text{- Se } a_4 > 3 \rightarrow \text{leptocúrtica} \end{cases}$$

Classificação por comparação com a distribuição normal

No exemplo: X = número de bolas pretas $S_X = \{0, 1, 2\}$

X=x	0	1	2	Σ
P(X=x)	0,1	0,6	0,3	1

$$E(X) = \sum_{x \in S_x} x\,p(x) = 0\times 0{,}1 + 1\times 0{,}6 + 2\times 0{,}3 = 1{,}2$$

$$V(X) = E(X-\mu)^2 = \sum_{x \in S_x} (x-\mu)^2 p(x) = (0-1{,}2)^2\times 0{,}1 + (1-1{,}2)^2\times 0{,}6 + (2-1{,}2)^2\times 0{,}3 = 0{,}36$$

$$\mu_2 = E(X-\mu)^2 = \sum_{x \in S_x} (x-\mu)^2 p(x) = (0-1{,}2)^2\times 0{,}1 + (1-1{,}2)^2\times 0{,}6 + (2-1{,}2)^2\times 0{,}3 = 0{,}36$$

$$\mu_3 = E(X-\mu)^3 = \sum_{x \in S_x} (x-\mu)^3 p(x) = (0-1{,}2)^3\times 0{,}1 + (1-1{,}2)^3\times 0{,}6 + (2-1{,}2)^2\times 0{,}3 = -0{,}024$$

$$\mu_4 = E(X-\mu)^4 = \sum_{x \in S_x} (x-\mu)^4 p(x) = (0-1{,}2)^4\times 0{,}1 + (1-1{,}2)^4\times 0{,}6 + (2-1{,}2)^4\times 0{,}3 = 0{,}3312$$

$$a_3 = \frac{\mu_3}{\mu_2\sqrt{\mu_2}} = \frac{-0{,}024}{0{,}36\sqrt{0{,}36}} = -0{,}111$$

$$a_4 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{0{,}3312}{(0{,}36)^2} = 2{,}55$$

No exemplo: X = número de bolas pretas $S_X = \{0, 1, 2\}$

X=x	0	1	2	Σ
P(X=x)	0,1	0,6	0,3	1

$E(X) = \mu = 1{,}2$

$V(X) = \sigma^2 = 0{,}36$

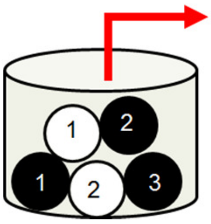
Coeficiente de assimetria:

$$a_3 = \frac{\mu_3}{\mu_2\sqrt{\mu_2}} = \frac{-0{,}024}{0{,}36\sqrt{0{,}36}} = -0{,}111 \rightarrow \text{Assimétrica negativa}$$

Coeficiente de curtose:

$$a_4 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{0{,}3312}{(0{,}36)^2} = 2{,}55 \rightarrow \text{Platicúrtica}$$

Exemplo: De uma urna com três bolas pretas e duas brancas, retiram-se duas bolas juntas.



duas bolas (juntas)

$$\#S = C_5^2 = 10$$

conjunto não numérico

$S = \{B_1B_2, P_1B_1, P_1B_2, P_2B_1, P_2B_2, P_3B_1, P_3B_2, P_1P_2, P_1P_3, P_2P_3\}$

X = número de bolas pretas retiradas

$S_X = \{0, 1, 2\}$ ← conjunto numérico

média, variância assimetria curtose

Determine a função de probabilidade P(X=x).

$$P(X=x) = \frac{C_3^x \, C_2^{2-x}}{C_5^2}$$

← Modelo matemático que descreve o comportamento probabilístico da variável X

Descrição da variável aleatória

X = número de bolas pretas

$$p(x) = \frac{C_3^x \, C_2^{2-x}}{C_5^2}$$

$$F(x) = \sum_{t \le x} \frac{C_3^t \, C_2^{2-t}}{C_5^2}$$

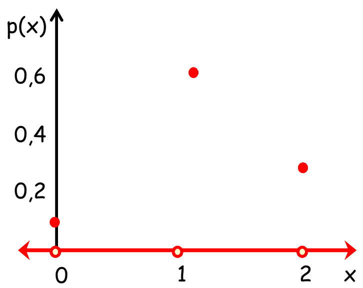
$\mu = 1{,}2$

$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{0{,}36} = 0{,}6$

$a_3 = -0{,}111 \rightarrow$ Assimétrica negativa

$a_4 = 2{,}55 \rightarrow$ Platicúrtica

X=x	0	1	2	Σ
P(X=x)	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$	1
F(x)	$\frac{1}{10}$	$\frac{7}{10}$	1	-



Medidas descritivas	Variável observada (amostra)	Variável aleatória (população)
Média	$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$	$\mu = E(X) = \sum_{x \in S_X} x\, p(x)$
Variância	$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$	$\sigma^2 = V(X) = E(X-\mu)^2 = \sum_{x \in S_X} (x-\mu)^2\, p(x)$
Desvio padrão	$s = \sqrt{s^2}$	$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$
Momentos	$m_r = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^r}{n}$	$\mu_r = E(X-\mu)^r = \sum_{x \in S_X} (x-\mu)^r\, p(x)$
Assimetria	$a_3 = \frac{m_3}{m_2\sqrt{m_2}}$	$a_3 = \frac{\mu_3}{\mu_2\sqrt{\mu_2}}$
Curtose	$a_4 = \frac{m_4}{m_2^2}$	$a_4 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$

Exercício proposto:

1. De uma urna com cinco bolas pretas, três brancas e duas azuis, retiram-se, de uma vez, três bolas. Sendo X o número de bolas azuis retiradas, calcule os coeficientes de assimetria e curtose de X.

$E(X) = \mu = 0{,}6$ bolas azuis

$V(X) = \sigma^2 = E(X-\mu)^2 = 0{,}3733$ bolas azuis^2

$\mu_2 = 0{,}3733$ bolas azuis^2

$\mu_3 = 0{,}112$ bolas azuis^3

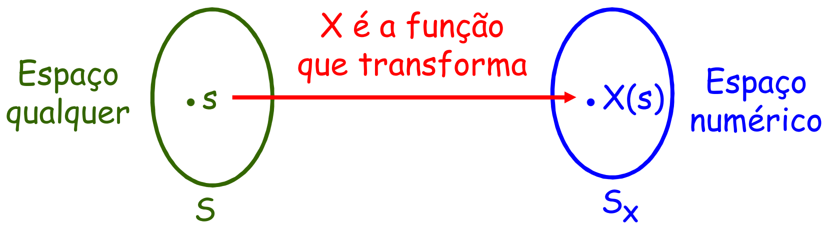
$\mu_4 = 7{,}709$ bolas azuis^4

$a_3 = 0{,}1784$

$a_4 = 14{,}33$

Relembrando...

Variável aleatória é uma função (ou regra) que transforma um espaço amostral qualquer em um espaço amostral numérico, que será sempre um subconjunto do conjunto dos números reais.



Variáveis aleatórias $\begin{cases} \text{Discretas} \\ \text{Contínuas} \end{cases}$

Variáveis aleatórias contínuas

Definição: São contínuas todas as variáveis cujo espaço amostral S_X é **contínuo** ou **não enumerável**.

⇨ Se X é uma variável aleatória contínua, X pode assumir qualquer valor num intervalo **[a; b]** ou no intervalo **($-\infty$;$+\infty$)**.

⇨ O espaço S_X será sempre definido como um intervalo do conjunto dos reais, sendo, portanto, um conjunto infinito.

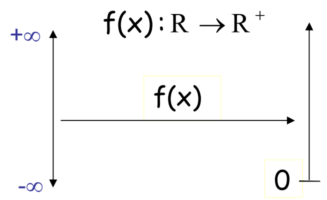
Exemplos:

- tempo que uma pessoa espera numa fila
- peso da produção de uma planta
- estatura de uma pessoa
- produção de leite de uma vaca
- quantidade de chuva que ocorre numa região

1. Função densidade de probabilidade

Definição: Seja X uma variável aleatória contínua e S_X o seu espaço amostral. Uma função **f** associada a variável X é denominada **função densidade de probabilidade (fdp)** se satisfizer duas condições:

1. $f(x) \geq 0, \ \forall \ x \in S_X$



Domínio
$S_X = (-\infty;+\infty)$

Contradomínio
Intervalo $[0, +\infty)$

1. Função densidade de probabilidade

Definição: Seja X uma variável aleatória contínua e S_X o seu espaço amostral. Uma função **f** associada a variável X é denominada **função densidade de probabilidade (fdp)** se satisfizer duas condições:

1. $f(x) \geq 0, \ \forall \ x \in S_X$

2. $\int_{S_X} f(x)dx = 1 = P(X \in S_X)$

Esta área corresponde à probabilidade de um valor de X pertencer ao espaço amostral S_X

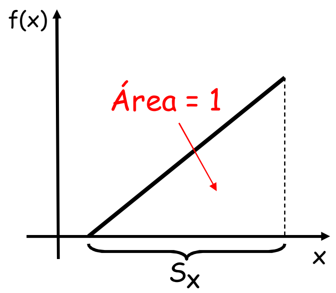
A integral da diferencial da função f(x) fornece a área sob a função no intervalo S_X

1. Função densidade de probabilidade

Definição: Seja X uma variável aleatória contínua e S_X o seu espaço amostral. Uma função **f** associada a variável X é denominada **função densidade de probabilidade (fdp)** se satisfizer duas condições:

1. $f(x) \geq 0, \ \forall \ x \in S_X$

2. $\int_{S_X} f(x)dx = 1$



Fdp é toda a função que não assume valores negativos, ou seja, cujo gráfico está acima do eixo das abcissas, e cuja área compreendida entre a função e o eixo das abcissas é igual a um.

Relembrando o processo de integração...

Integral definida

Se f é uma função de x, então a sua integral definida é uma integral restrita à valores em um intervalo específico, por exemplo, $a \leq x \leq b$. O resultado é um número que depende apenas de a e b, e não de x.

Para calcular integrais definidas utilizaremos um teorema que é considerado um dos mais importantes do Cálculo:

Teorema Fundamental do Cálculo

Se f(x) é uma função contínua no intervalo [a, b] e temos uma função F(x), tal que F'(x) = f(x), então F(x) é chamada primitiva ou anti-derivada de f(x). Nesse caso,

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)$$

Entendendo a integral como processo inverso da derivada:

$$\int_a^b \underbrace{f(x)}_{\text{integranda}}dx = [\overbrace{F(x)}^{\text{primitiva}}]_a^b = F(b) - F(a)$$

A primitiva F(x) é a função cuja derivada é a integranda f(x).

$$F'(x) = f(x)$$

Entendendo a integral como processo inverso da derivada:

integração

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$$

derivação

Como encontrar a primitiva?

Integranda	Primitiva
$f(x) = x^n$	$F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$

Dentro do contexto de integração como um processo de anti-derivação, as funções mais comuns com suas respectivas primitivas são as seguintes:

Integranda	Primitiva
1. $f(x) = k$, k constante	$F(x) = kx + C$
2. $f(x) = x^n$, $n \neq -1$	$F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$
3. $f(x) = 1/x$	$F(x) = \ln x + C$
4. $f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + C$
5. $f(x) = \text{sen}(x)$	$F(x) = -\cos(x) + C$
6. $f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \text{sen}(x) + C$
7. $f(x) = a^x$	$F(x) = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$
8. $f(x) = \sec^2(x)$	$F(x) = \tan(x) + C$
9. $f(x) = \tan(x)$	$F(x) = -\ln[\cos(x)] + C$
10. $f(x) = \csc^2(x)$	$F(x) = -\text{ctg}(x) + C$
11. $f(x) = \text{ctg}(x)$	$F(x) = \ln[\text{sen}(x)] + C$
12. $f(x) = \sec(x)$	$F(x) = \ln[\sec(x) + \tan(x)] + C$

Algumas propriedades da integral

1. A área num ponto a é igual a zero, ou seja

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

2. Se b é um ponto entre a e c, então

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

3. O fator constante k pode ser retirado do sinal de integração, ou seja

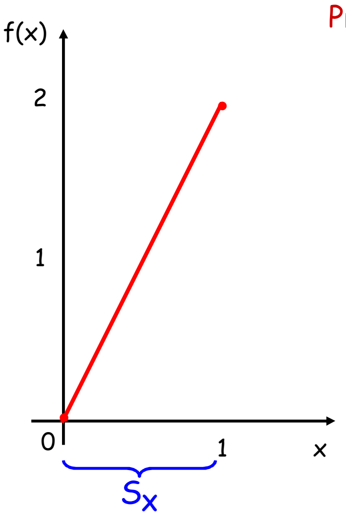
$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

4. A integral definida da soma (ou da diferença) de funções é a soma (ou a diferença) das integrais definidas, ou seja

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

Exemplo 1:

Seja a função $f(x) = 2x$, no intervalo $S_X = [0,1]$. Verifique se $f(x)$ é uma função densidade de probabilidade.

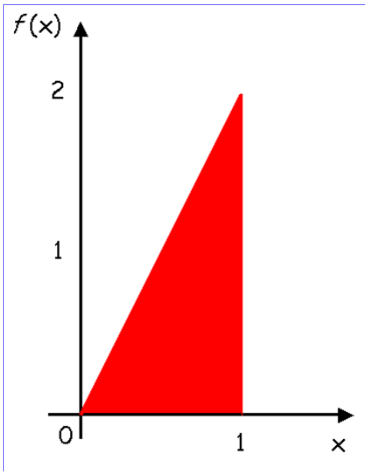


Primeira condição: $f(x) \geq 0, \forall\, x \in S_X$

$$f(x) = 2x$$
$$f(x=0) = 2 \times 0 = 0$$
$$f(x=1) = 2 \times 1 = 2$$

Todos os valores da função $f(x)$ são não negativos no intervalo de 0 a 1.

Segunda condição: $\int_{S_X} f(x)dx = 1$



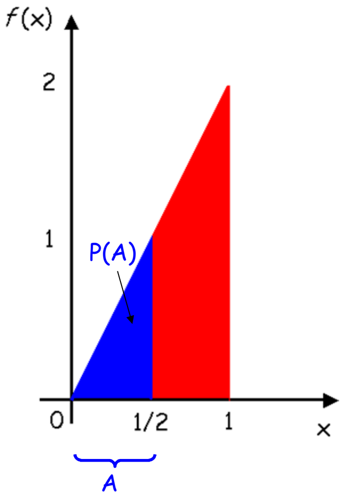
Área: $\frac{b \times h}{2} = \frac{1 \times 2}{2} = 1$

A área sob a função f(x) no intervalo S_X, que equivale a $P(X \in S_X)$, é igual a 1.

A função f(x) = 2x, no intervalo S_X =[0, 1] é uma função densidade de probabilidade!!

Profa. Clause Piana 63

Seja A=[0, 1/2]. Qual é a probabilidade de ocorrer o evento A?



Probabilidade = área

Área: $\frac{b \times h}{2} = \frac{1/2 \times 1}{2} = \frac{1}{4}$

$P(0 \leq X \leq 1/2) = 1/4$

Profa. Clause Piana 64

Exemplo 2:

Seja a função $f(x) = 6x-6x^2$, no intervalo $S_X = [0,1]$. Verifique se $f(x)$ é uma função densidade de probabilidade.

Primeira condição: $f(x) \geq 0, \forall x \in S_X$

⇨ Como a função é quadrática, são necessários, pelo menos, três pontos para traçar a curva.

⇨ Por conveniência esses pontos são: os limites do intervalo S_X e o valor de x que corresponde ao ponto crítico da função.

Determina-se esse valor de x derivando a função e igualando a primeira derivada a zero.

$$f'(x) = 6 - 12x$$

$$0 = 6 - 12x$$

$$x = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \quad \leftarrow \text{valor que corresponde ao ponto crítico}$$

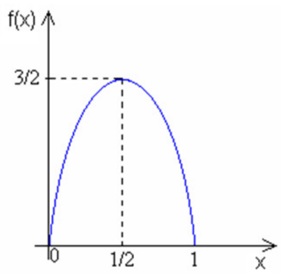
Derivando a função pela segunda vez, determina-se se o ponto crítico é de máximo ou de mínimo.

$$f'(x) = 6 - 12x$$

$$f''(x) = -12 \quad \begin{cases} \text{se } f''(x) < 0 & \rightarrow \text{ponto de máximo} \\ \text{se } f''(x) > 0 & \rightarrow \text{ponto de mínimo} \end{cases}$$

A função $f(x) = 6x-6x^2$ tem ponto de máximo.

Traçar o gráfico:



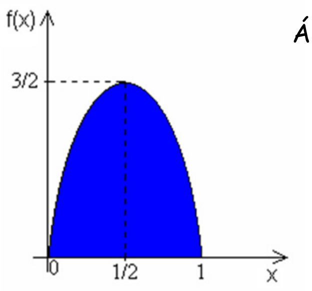
$f(0) = 6\times0-6\times0^2 = 0$

$f(1/2) = 6\times1/2-6\times(1/2)^2 = 3/2$

$f(1) = 6\times1-6\times1^2 = 0$

Todos os valores da função f(x) são não negativos no intervalo de 0 a 1.

Segunda condição: $\int_{S_X} f(x)dx = 1$



$$\text{Área}: \int_0^1 \left(6x - 6x^2\right)dx$$

$$= \int_0^1 6xdx - \int_0^1 6x^2dx = 6\int_0^1 xdx - 6\int_0^1 x^2dx$$

$$= 6\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - 6\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 6\left(\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) - 6\left(\frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right)$$

$$= 3 - 2 = 1$$

A área sob a função f(x) no intervalo S_X, que equivale a $P(X \in S_X)$, é igual a 1.

A função $f(x) = 6x-6x^2$, no intervalo $S_X = [0, 1]$, é uma função densidade de probabilidade!!

Importante!!!

No caso de variáveis contínuas, as representações $a \le x \le b$, $a \le x < b$, $a < x \le b$ e $a < x < b$ são todas equivalentes, pois a probabilidade num ponto, por definição, é nula.

Seja o evento $A=\{x;\ x=a\}$. Então,

$$P(A) = \int_A f(x)dx = \int_a^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0$$

2. Função de distribuição ou probabilidade acumulada

Definição: Seja X uma variável aleatória contínua e S_X o seu espaço amostral. A função de distribuição, denotada por **F(x)** ou **P(X≤x)**, é a **função que associa a cada ponto $x \in S_X$ a probabilidade P(X≤x)**. Desta forma, tem-se

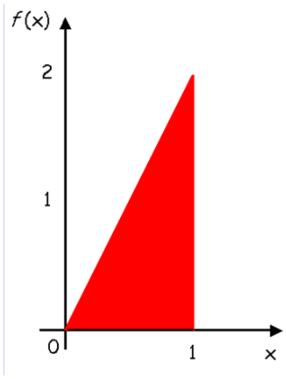
$$F(x) = P(X \le x) = \int_a^x f(t)dt, \quad \text{para } S_X = [a, b]$$

Sendo $S_X = [a, b]$, então

$$F(a) = P(X \le a) = 0$$
$$F(b) = P(X \le b) = 1$$

Profa. Clause Piana 69

Exemplo 1: $f(x) = 2x$, $S_X = [0,1]$

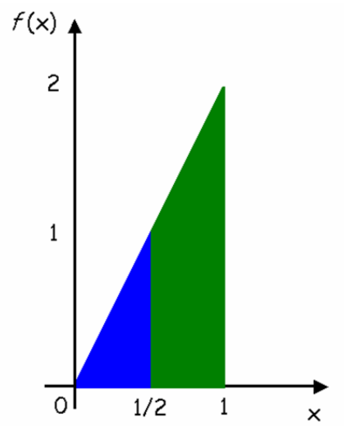


$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_0^x 2t\,dt = 2\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x = x^2$$

$$F(x) = x^2$$

A função de probabilidade acumulada é a primitiva de f(x).

Exemplo 1: $f(x) = 2x$, $S_X = [0,1]$



A=[0, 1/2]

B=[1/2, 1]

$F(x) = x^2$

$F(1/2) = P(X \le 1/2) = (1/2)^2 = 1/4$

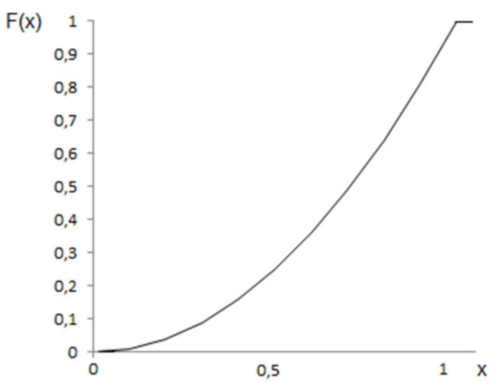
$P(A) = F(1/2) = 1/4$

$F(1) = P(X \le 1) = 1^2 = 1$

$P(B) = F(1) - F(1/2) = 1 - 1/4 = 3/4$

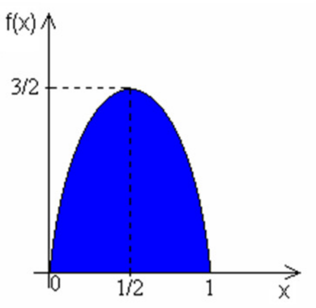
Gráfico da função de distribuição ou probabilidade acumulada

$F(x) = x^2$



A função F(x) expressa a probabilidade da variável X assumir um valor menor ou igual a x → $P(X \le x)$

Exemplo 2: $f(x) = 6x-6x^2$, $S_X = [0,1]$

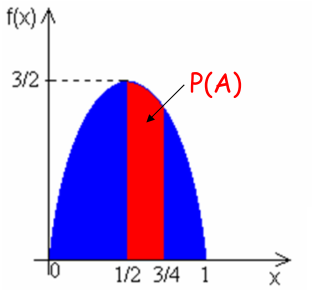


$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$
$$= \int_{0}^{x} \left(6t - 6t^2\right)dt$$
$$= \int_{0}^{x} 6tdt - \int_{0}^{x} 6t^2dt$$
$$= 6\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x - 6\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x$$
$$= 3x^2 - 2x^3$$

$$F(x) = 3x^2 - 2x^3$$

A função de probabilidade acumulada é a primitiva de f(x).

Exemplo 2: $f(x) = 6x-6x^2$, $S_X = [0,1]$



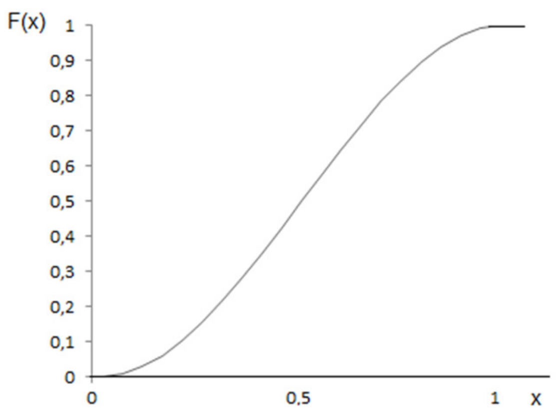
A=[1/2, 3/4]

$$F(x) = 3x^2 - 2x^3$$
$$F(1/2) = 3(1/2)^2 - 2(1/2)^3$$
$$= 3/4 - 1/4 = 1/2$$
$$F(3/4) = 3(3/4)^2 - 2(3/4)^3$$
$$= 27/16 - 27/32$$
$$= \frac{54-27}{32} = \frac{27}{32}$$

$$P(A) = F(3/4) - F(1/2)$$
$$= 27/32 - 1/2$$
$$= \frac{27-16}{32} = \frac{11}{32} = 0,344$$

Gráfico da função de distribuição ou probabilidade acumulada

$$F(x) = 3x^2 - 2x^3$$



A função F(x) expressa a probabilidade da variável X assumir um valor menor ou igual a x $\rightarrow$ $P(X \leq x)$

Medidas descritivas

Média ou valor esperado

Definição: Seja X uma variável aleatória contínua e S_X o seu espaço amostral. O valor esperado de X, denotado por **E(X)** ou μ , será dado por

$$E(X) = \mu = \int_{S_X} x\, f(x)dx$$

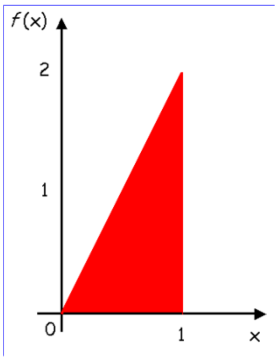
Variância

Definição: Seja X uma variável aleatória contínua e S_X o seu espaço amostral. A variância de X, denotada por **V(X)** ou σ^2, será dada por

$$V(X) = \sigma^2 = E(X-\mu)^2 = \int_{S_X} (x-\mu)^2 f(x)dx \quad \text{(Fórmula de definição)}$$

$$V(X) = \sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = \left[\int_{S_X} x^2 f(x)dx\right] - \mu^2 \quad \text{(Fórmula prática)}$$

Exemplo 1: $f(x) = 2x$, $S_X = [0,1]$



$$E(X) = \mu = \int_{S_x} x\,f(x)dx$$

$$= \int_0^1 x\,2x\,dx$$

$$= \int_0^1 2x^2dx = 2\int_0^1 x^2dx = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

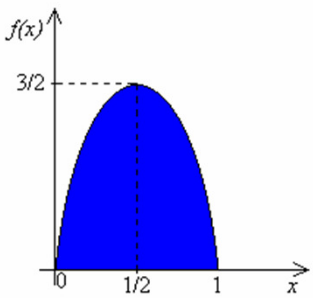
$$V(X) = \sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$$

$$= \left[\int_0^1 x^2\,2x\,dx\right] - \mu^2$$

$$= \left[\int_0^1 2x^3dx\right] - \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$= \left\{2\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1\right\} - \frac{4}{9} = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{9-8}{18} = \frac{1}{18}$$

Exemplo 2: $f(x) = 6x-6x^2$, $S_X = [0,1]$



$$E(X) = \mu = \int_0^1 x\left(6x - 6x^2\right)dx$$

$$= \int_0^1 \left(6x^2 - 6x^3\right)dx = 6\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 - 6\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1$$

$$= 2 - \frac{3}{2} = \frac{4-3}{2} = \frac{1}{2}$$

$$V(X) = \sigma^2 = \left[\int_0^1 x^2\left(6x - 6x^2\right)dx\right] - \mu^2$$

$$= \left[\int_0^1 \left(6x^3 - 6x^4\right)dx\right] - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \left\{6\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 - 6\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1\right\} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{6}{5} - \frac{1}{4} = \frac{30-24-5}{20} = \frac{1}{20}$$

◻ Momentos, assimetria e curtose

Momentos ordinários

- Primeiro momento:

$$\mu_1' = E(X) = \int_{S_X} x f(x)dx$$

- Segundo momento:

$$\mu_2' = E(X^2) = \int_{S_X} x^2 f(x)dx$$

- Terceiro momento:

$$\mu_3' = E(X^3) = \int_{S_X} x^3 f(x)dx$$

- Quarto momento:

$$\mu_4' = E(X^4) = \int_{S_X} x^4 f(x)dx$$

◻ Momentos, assimetria e curtose

Momentos centrados na média

- Segundo momento:

$$\mu_2 = E(X-\mu)^2 = \int_{S_X} (x-\mu)^2 f(x)dx \qquad \text{(Fórmula de definição)}$$

$$\mu_2 = E(X^2) - \mu^2 = \left(\int_{S_X} x^2 f(x)dx \right) - \mu^2 \qquad \text{(Fórmula prática)}$$

- Terceiro momento:

$$\mu_3 = E(X-\mu)^3 = \int_{S_X} (x-\mu)^3 f(x)dx \qquad \text{(Fórmula de definição)}$$

$$\mu_3 = E(X^3) - 3\mu E(X^2) + 2\mu^3$$

$$= \left(\int_{S_X} x^3 f(x)dx \right) - 3\mu \left(\int_{S_X} x^2 f(x)dx \right) + 2\mu^3 \qquad \text{(Fórmula prática)}$$

- Quarto momento:

$$\mu_4 = E(X-\mu)^4 = \int_{S_X} (x-\mu)^4 f(x)dx \qquad \text{(Fórmula de definição)}$$

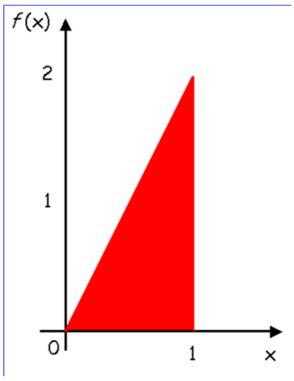
$$\mu_4 = E(X^4) - 4\mu E(X^3) + 6\mu^2 E(X^2) - 3\mu^4 \qquad \text{(Fórmula prática)}$$

$$= \left[\int_{S_X} x^4 f(x)dx\right] - 4\mu\left[\int_{S_X} x^3 f(x)dx\right] + 6\mu^2\left[\int_{S_X} x^2 f(x)dx\right] - 3\mu^4$$

Coeficiente de assimetria: $a_3 = \dfrac{\mu_3}{\mu_2\sqrt{\mu_2}}$

Coeficiente de curtose: $a_4 = \dfrac{\mu_4}{\mu_2^2}$

Exemplo 1: $f(x) = 2x$, $S_X = [0,1]$



$$\mu_3 = E(X^3) - 3\mu E(X^2) + 2\mu^3$$

$$= \left[\int_0^1 x^3 2x dx\right] - 3\mu\left[\int_0^1 x^2 2x dx\right] + 2\mu^3$$

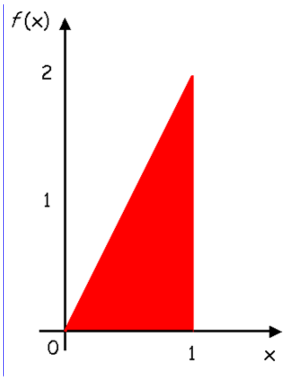
$$= \left[\int_0^1 2x^4 dx\right] - 3\mu\left[\int_0^1 2x^3 dx\right] + 2\mu^3$$

$$= 2\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 - 3\mu 2\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 + 2\mu^3$$

$$= \frac{2}{5} - \frac{6}{3}\times\frac{1}{2} + 2\left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$= \frac{2}{5} - 1 + \frac{16}{27} = \frac{54 - 135 + 80}{135} = -0{,}0074$$

Exemplo 1: f(x) = 2x, S_X =[0,1]



$$\mu_4 = E(X^4) - 4\mu E(X^3) + 6\mu^2 E(X^2) - 3\mu^4$$
$$= \left[\int_0^1 x^4 2x dx\right] - 4\mu\left[\int_0^1 x^3 2x dx\right] + 6\mu^2\left[\int_0^1 x^2 2x dx\right] - 3\mu^4$$
$$= \left[\int_0^1 2x^5 dx\right] - 4\mu\left[\int_0^1 2x^4 dx\right] + 6\mu^2\left[\int_0^1 2x^3 dx\right] - 3\mu^4$$
$$= 2\left[\frac{x^6}{6}\right]_0^1 - 4\mu 2\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 + 6\mu^2 2\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 - 3\mu^4$$
$$= \frac{1}{3} - 4 \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} + 6 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{2} - 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^4$$
$$= \frac{1}{3} - \frac{16}{15} + \frac{4}{3} - \frac{16}{27} = \frac{45 - 144 + 180 - 64}{135} = 7{,}941$$

Exemplo 1: f(x) = 2x, S_X =[0,1]

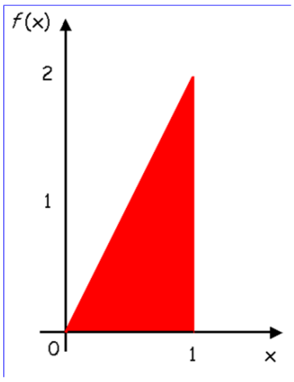
Calculando os momentos ordinários

$$\mu_2' = E(X^2) = \int_{S_X} x^2 f(x) dx = \int_0^1 x^2 2x dx = \int_0^1 2x^3 dx = 2\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\mu_3' = E(X^3) = \int_{S_X} x^3 f(x) dx = \int_0^1 x^3 2x dx = \int_0^1 2x^4 dx = 2\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{2}{5}$$

$$\mu_4' = E(X^4) = \int_{S_X} x^4 f(x) dx = \int_0^1 x^4 2x dx = \int_0^1 2x^5 dx = 2\left[\frac{x^6}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Exemplo 1: f(x) = 2x, S_X =[0,1]



$$\mu_3 = E(X^3) - 3\mu E(X^2) + 2\mu^3$$

$$= \frac{2}{5} - 3\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2} + 2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2 = -0{,}0074$$

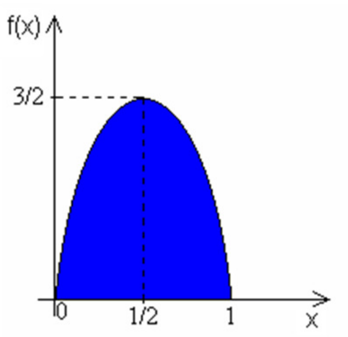
$$\mu_4 = E(X^4) - 4\mu E(X^3) + 6\mu^2 E(X^2) - 3\mu^4$$

$$= \frac{1}{3} - 4\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{5} + 6\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{2} - 3\times\left(\frac{2}{3}\right)^4 = 7{,}941$$

$$a_3 = \frac{\mu_3}{\mu_2\sqrt{\mu_2}} = \frac{-0{,}0074}{1/18\sqrt{1/18}} = \frac{-0{,}0074}{0{,}0131} = -0{,}565$$ → Assimétrica negativa

$$a_4 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{7{,}941}{(1/18)^2} = 40{,}8$$ → Leptocúrtica

Exemplo 2: f(x) = 6x-6x², S_X = [0,1]



$$\mu_3 = E(X^3) - 3\mu E(X^2) + 2\mu^3$$

$$= \left[\int_0^1 x^3(6x-6x^2)dx\right] - 3\mu\left[\int_0^1 x^2(6x-6x^2)dx\right] + 2\mu^3$$

$$= \left[\int_0^1 (6x^4-6x^5)dx\right] - 3\mu\left[\int_0^1 (6x^3-6x^4)dx\right] + 2\mu^3$$

$$= \left[\int_0^1 6x^4dx - \int_0^1 6x^5dx\right] - 3\mu\left[\int_0^1 6x^3dx - \int_0^1 6x^4dx\right] + 2\mu^3$$

$$= \left\{6\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 - 6\left[\frac{x^6}{6}\right]_0^1\right\} - 3\mu\left\{6\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 - 6\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1\right\} + 2\mu^3$$

$$= \left(\frac{6}{5} - 1\right) - 3\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{2} - \frac{6}{5}\right) + 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$= \frac{1}{5} - \frac{3}{2}\times\frac{3}{10} + 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{5} - \frac{9}{20} + \frac{1}{4} = \frac{4-9+5}{20} = 0$$

Exemplo 2: $f(x) = 6x-6x^2$, $S_X = [0,1]$

$$\mu_4 = E(X^4) - 4\mu E(X^3) + 6\mu^2 E(X^2) - 3\mu^4$$
$$= \left[\int_0^1 x^4(6x-6x^2)dx\right] - 4\mu\left[\int_0^1 x^3(6x-6x^2)dx\right] + 6\mu^2\left[\int_0^1 x^2(6x-6x^2)dx\right] - 3\mu^4$$
$$= \left[\int_0^1 (6x^5-6x^6)dx\right] - 4\mu\left[\int_0^1 (6x^4-6x^5)dx\right] + 6\mu^2\left[\int_0^1 (6x^3-6x^4)dx\right] - 3\mu^4$$
$$= \left\{6\left[\frac{x^6}{6}\right]_0^1 - 6\left[\frac{x^7}{7}\right]_0^1\right\} - 4\mu\left\{6\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 - 6\left[\frac{x^6}{6}\right]_0^1\right\} + 6\mu^2\left\{6\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 - 6\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1\right\} - 3\mu^4$$
$$= \left(1-\frac{6}{7}\right) - 4\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{6}{5}-1\right) + 6\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(\frac{3}{2}-\frac{6}{5}\right) - 3\times\left(\frac{1}{2}\right)^4$$
$$= \frac{1}{7} - \frac{4}{2}\times\frac{1}{5} + \frac{3}{2}\times\frac{3}{10} - \frac{3}{16}$$
$$= \frac{1}{7} - \frac{4}{10} + \frac{9}{20} - \frac{3}{16} = \frac{80-224+252-105}{560} = \frac{3}{560} = 0{,}005357$$

Exemplo 2: $f(x) = 6x-6x^2$, $S_X = [0,1]$

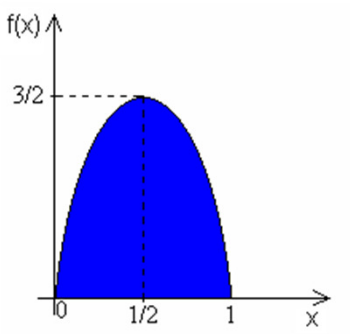
Calculando os momentos ordinários

$$\mu'_2 = E(X^2) = \int_{S_X} x^2 f(x)dx = \int_0^1 x^2(6x-6x^2)dx = \int_0^1 (6x^3-6x^4)dx$$
$$= 6\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 - 6\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{3}{2} - \frac{6}{5} = \frac{3}{10}$$

$$\mu'_3 = E(X^3) = \int_{S_X} x^3 f(x)dx = \int_0^1 x^3(6x-6x^2)dx = \int_0^1 (6x^4-6x^5)dx$$
$$= 6\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 - 6\left[\frac{x^6}{6}\right]_0^1 = \frac{6}{5} - 1 = \frac{2}{10}$$

$$\mu'_4 = E(X^4) = \int_{S_X} x^4 f(x)dx = \int_0^1 x^4(6x-6x^2)dx = \int_0^1 (6x^5-6x^6)dx$$
$$= 6\left[\frac{x^6}{6}\right]_0^1 - 6\left[\frac{x^7}{7}\right]_0^1 = 1 - \frac{6}{7} = \frac{1}{7}$$

Exemplo 2: $f(x) = 6x-6x^2$, $S_X = [0,1]$



$$\mu_3 = E(X^3) - 3\mu E(X^2) + 2\mu^3$$
$$= \frac{2}{10} - 3\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{10} + 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

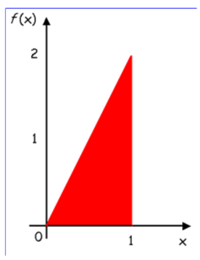
$$\mu_4 = E(X^4) - 4\mu E(X^3) + 6\mu^2 E(X^2) - 3\mu^4$$
$$= \frac{1}{7} - 4\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{10} + 6\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{3}{10} - 3\times\left(\frac{1}{2}\right)^4$$
$$= 0{,}005357$$

$$a_3 = \frac{\mu_3}{\mu_2\sqrt{\mu_2}} = \frac{0}{1/20\sqrt{1/20}} = 0 \quad \rightarrow \text{Simétrica}$$

$$a_4 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{0{,}005357}{(1/20)^2} = 2{,}14 \quad \rightarrow \text{Platicúrtica}$$

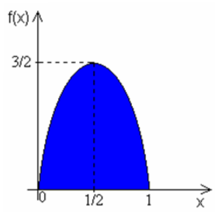
Descrição das variáveis aleatórias

$f(x) = 2x$, $S_X = [0,1]$



$$F(x) = x^2$$
$$\mu = \frac{2}{3} \qquad \sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{1}{18}} = \frac{1}{\sqrt{18}}$$
$$a_3 = -0{,}565 \quad \rightarrow \text{Assimétrica negativa}$$
$$a_4 = 40{,}8 \quad \rightarrow \text{Leptocúrtica}$$

$f(x) = 6x-6x^2$, $S_X = [0,1]$



$$F(x) = 3x^2 - 2x^3$$
$$\mu = \frac{1}{2} \qquad \sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{1}{20}} = \frac{1}{\sqrt{20}}$$
$$a_3 = 0 \quad \rightarrow \text{Simétrica}$$
$$a_4 = 2{,}14 \quad \rightarrow \text{Platicúrtica}$$

Exercício proposto:

Seja X uma variável aleatória contínua que descreve o volume de chuva em determinada região (X = 1000 mm de chuva) com

$$f(x) = \frac{3}{4}\,x\,(2-x),\ \text{sendo}\ S_X = \{x; 0 \le x \le 2\}\ \text{e}$$
$$f(x) = 0,\ \text{se x não pertence a}\ S_X.$$

a) Verifique se f(x) é função de densidade de probabilidade e trace o seu gráfico.
b) Determine a função distribuição F(x).
c) Dado que A = {x; 1 < x < 2}, obtenha a probabilidade do evento A.
d) Se chover mais de 1700 mm, haverá necessidade de drenar o excesso de água. Você acha razoável prever um sistema de drenagem?
e) Se chover menos do que 1300 mm, haverá necessidade de represar água. Você acha razoável prever a construção de barragens?
f) Encontre média e a variância de X.

91

Variável aleatória discreta	Variável aleatória contínua
Ex.: número de peças com defeito	Ex.: vida útil de uma lâmpada
Espaço amostral enumerável (finito ou infinito)	Espaço amostral contínuo ou não enumerável ou (intervalo infinito)
S_x={0, 1, 2, ..., n} ou S_x={0, 1, 2, ...}	S_x=[a, b] ou S_x= (-∞, +∞)
p(x) → função de probabilidade	f(x) → função densidade de probabilidade
Condições: 1. $p(x) \ge 0,\ \forall\ x \in S_X$ 2. $\sum_{x \in S_X} p(x) = 1$	Condições: 1. $f(x) \ge 0,\ \forall\ x \in S_X$ 2. $\int_{S_X} f(x)dx = 1$
O valor da função p(x) expressa a probabilidade de ocorrência de cada valor de X	A área sob f(x) num intervalo [a, b] expressa a probabilidade de ocorrer um valor da variável X entre os limites a e b.
F(x) → função de distribuição ou de probabilidade acumulada	F(x) → função de distribuição ou de probabilidade acumulada

A função F(x) expressa a probabilidade da variável X assumir um valor menor ou igual a x → P(X≤x)

Medidas descritivas	Variável aleatória discreta	Variável aleatória contínua
Média	$\mu = E(X) = \sum_{x \in S_X} x\,p(x)$	$\mu = E(X) = \int_{S_X} x\,f(x)dx$
Variância	$\sigma^2 = E(X-\mu)^2 = \sum_{x \in S_X} (x-\mu)^2\,p(x)$	$\sigma^2 = E(X-\mu)^2 = \int_{S_X} (x-\mu)^2\,f(x)dx$
Desvio padrão	$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$	$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$
Momentos	$\mu_r = E(X-\mu)^r = \sum_{x \in S_X} (x-\mu)^r\,p(x)$	$\mu_r = E(X-\mu)^r = \int_{S_X} (x-\mu)^r\,f(x)dx$
Assimetria	$a_3 = \frac{\mu_3}{\mu_2\sqrt{\mu_2}}$	$a_3 = \frac{\mu_3}{\mu_2\sqrt{\mu_2}}$
Curtose	$a_4 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$	$a_4 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$

Bibliografia

BUSSAB, W.O.; MORETTIN, P.A. **Estatística Básica**. São Paulo: Saraiva. 2006. 526p.

FERREIRA, D.F. **Estatística Básica**. Lavras: Editora UFLA, 2005, 664p.

FREUND, J.E., SIMON, G.A. **Estatística Aplicada. Economia, Administração e Contabilidade**. 9.ed., Porto Alegre: Bookman, 2000. 404p.

MEYER, P. L. **Probabilidade: aplicações à estatística**. Rio de Janeiro: LTC, 1976.

NAGHETTINI, M.; PINTO, E. J. de A. **Hidrologia estatística**. Belo Horizonte: CPRM, 2007. 552 p.

SILVEIRA JÚNIOR, P., MACHADO, A.A., ZONTA, E.P., SILVA, J.B. da **Curso de Estatística**. v.2, Pelotas: Universidade Federal de Pelotas, 1992. 234p.