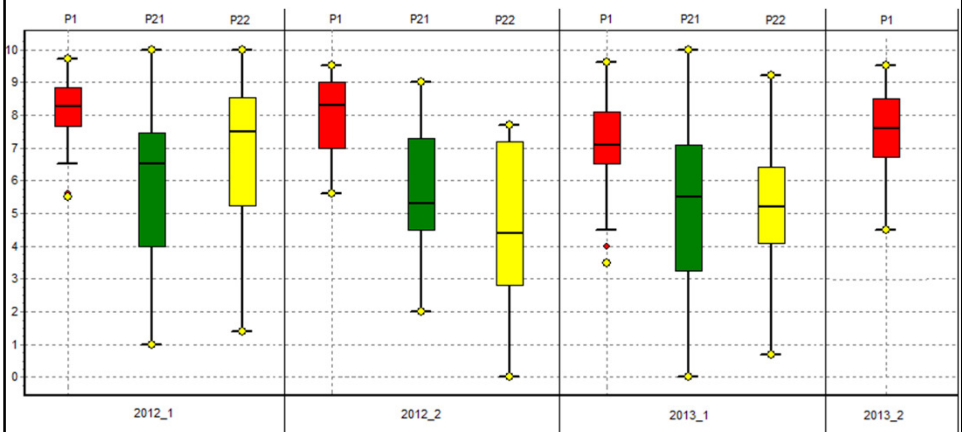
Avaliação do desempenho de turmas dos cursos da Computação na disciplina de Estatísticas Básica

Gráficos de caixa para as notas das provas 1, 2.1 e 2.2



Medidas descritivas para notas da prova 1 e notas da prova 2.1

2012 - 1	P 1	P 2.1	P 2.2
Mediana	8,3	6,5	7,5
Média	8,1	5,9	7,0
Desvio Padrao	1,1	2,5	2,2
CV (%)	13,6	42,2	31,2

2012 - 2	P 1	P 2.1	P 2.2
Mediana	8,3	5,3	4,4
Média	8,0	5,8	4,7
Desvio Padrao	1,2	2,0	2,4
CV (%)	15,1	35,0	50,5

2013 - 1	P 1	P 2.1	P 2.2
Mediana	7,1	5,5	5,2
Média	7,1	5,4	5,1
Desvio Padrao	1,4	2,7	2,1
CV (%)	19,7	49,9	40,2

2013 - 2	P 1
Mediana	7,6
Média	7,5
Desvio Padrao	1,3
CV (%)	16,8

UNIDADE III - Elementos de probabilidades

Probabilidade no espaço básico

ESTATÍSTICA - Divisão

ESTATÍSTICA DESCRITIVA ↔ INFERÊNCIA ESTATÍSTICA

ESTATÍSTICA DESCRITIVA

Trata do resumo e da apresentação de dados

INFERÊNCIA ESTATÍSTICA

PROBABILIDADE

AMOSTRAGEM

Fornece métodos para o estudo de populações por meio de amostras

Profa. Clause Piana 5

De 3000 a.C. até o século XIX
Estatística Descritiva

⇩

Organização, resumo e apresentação de dados

A partir do século XIX
Desenvolvimento da teoria das probabilidades

⇩

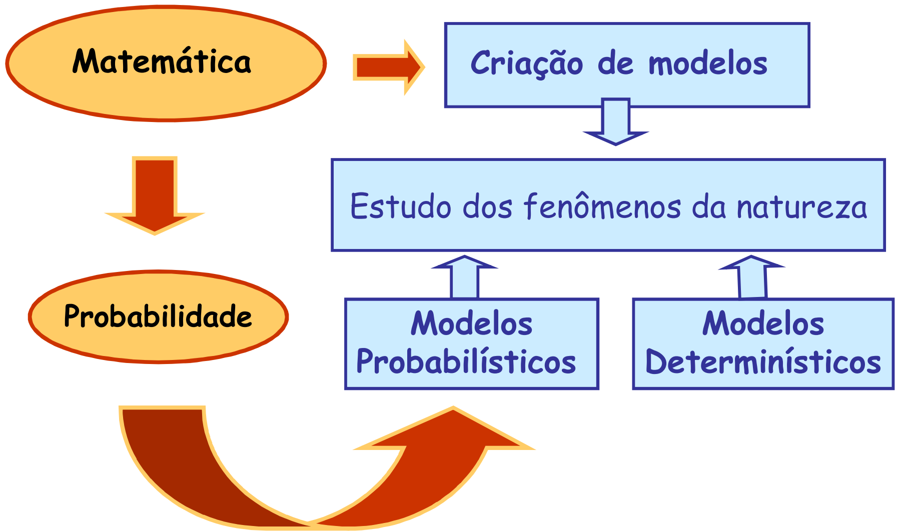
Estruturação orgânica da Estatística

⇩

Criação de técnicas de amostragem

⇩

Inferência Estatística



Um pouco de história...

- A noção de probabilidade tem a sua origem mais remota relacionada não só à prática de jogos ditos "de azar" mas também, antes disso, à instituição do seguro que foi usado já pelas civilizações mais antigas, a fim de protegerem sua atividade comercial.
- Vinte e três séculos antes de Cristo, na Babilônia, quando as caravanas atravessavam o deserto para comercializar camelos em cidades vizinhas, surgiram as primeiras modalidades de seguros. Como era comum alguns animais morrerem durante o caminho, todos os cameleiros, cientes do grande risco, firmaram um acordo no qual pagariam para substituir o camelo de quem o perdesse. Além de uma atitude solidária por parte do grupo, já era uma forma primária de seguro.

Um pouco de história...

- No ramo da navegação, também foi adotado o princípio de seguro entre os hebreus e fenícios, cujos barcos navegavam através dos mares Egeu e Mediterrâneo. Existia entre os navegadores um acordo que garantia a quem perdesse um navio, a construção de outro, pago pelos demais participantes da mesma viagem.

O **cálculo das probabilidades** parece ter nascido, enquanto tal, na Idade Média, com as primeiras tentativas de matematização dos jogos de azar, muito difundidos na época. É sabido que desde sempre os jogos foram praticados como apostas mas também para prever o futuro, decidir conflitos, dividir heranças, etc.
Devem-se aos algebristas italianos Pacioli, Cardano e Tartaglia (séc. XVI) as primeiras considerações matemáticas acerca dos jogos e das apostas. Eles limitam-se, no entanto, a resolver alguns problemas concretos mas ainda sem demonstração de teoremas, embora façam já comparação de frequência de ocorrências e estimativas de ganhos.

Luca **Pacioli**
(1445 -1517)

Girolamo **Cardano**
(1501-1576)

Nicollo **Tartalgia**
(1499-1557)

➩ Mas a contribuição decisiva para o início da Teoria das Probabilidades foi dado pela correspondência trocada entre os matemáticos franceses **Blaise Pascal** e seu amigo **Pierre de Fermat**, em que ambos, por diferentes caminhos, chegam à solução correta do célebre *problema da divisão das apostas,* em 1654.
Este problema teria sido posto a Pascal pelo cavaleiro De Méré (considerado por alguns autores jogador inveterado e por outros, filósofo e homem de letras) quando viajava em sua companhia. Sem que Pascal e Fermat o soubessem, este problema era basicamente o mesmo que, um século antes, interessara também Pacioli, Tartaglia e Cardano.

Blaise Pascal
(1623 – 1662)

Pierre de Fermat
(1601 - 1665)

A importância de Fermat para a matemática...


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX.
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
AVCTORE CLAVDIO GASPARE BACHETO
LVTETIAE PARISIORVM,
Sumptibus SEBASTIANI CRAMOISY, via
Iacobæa, sub Ciconiis.
M. DC. XXI.
CVM PRIVILEGIO REGIS.

O que mais interessava a Fermat, na verdade, era um ramo da Matemática chamado teoria dos números, que tem poucas aplicações práticas claras.

É da teoria dos números seu famoso teorema, conhecido como Último Teorema de Fermat.

O teorema foi escrito nas margens do livro Aritmética de Diofante, seguido de uma frase:

"Eu tenho uma demonstração realmente maravilhosa para esta proposição, mas esta margem é muito estreita para contê-la".

Era um costume de Fermat escrever nas margens dos livros e foi graças ao seu filho mais velho que suas anotações não se perderam para sempre.

Depois de passar cinco anos recolhendo cartas e anotações de seu pai, Clément-Samuel publica em 1670 a Aritmética de Diofante contendo observações de Pierre de Fermat, cuja página 61 continha o teorema.

Teorema de Pitágoras: num triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos

$$x^2 + y^2 = z^2$$

O Último Teorema de Fermat

$$x^3 + y^3 \neq z^3$$
$$x^4 + y^4 \neq z^4$$
$$\ldots$$
$$x^n + y^n \neq z^n$$

Não existe solução em números inteiros para a equação

$$x^n + y^n = z^n, \quad \text{para } n>2$$

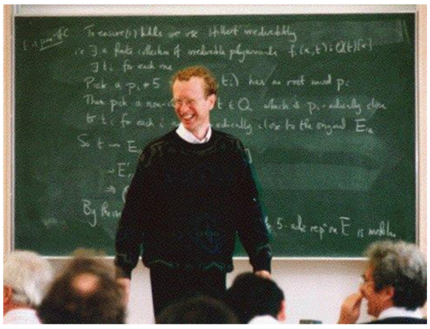
Há quem duvide que Fermat tenha dito a verdade, já que não se sabe ao certo se ele de fato conhecia alguma demonstração ou equivocou-se ao apenas acreditar que poderia demonstrar.

Por mais de três séculos, praticamente todos os grandes expoentes da Matemática debruçaram-se sobre o assunto.

Com o advento dos computadores foram testados milhões de algarismos com diferentes valores para x, y, z e n e a igualdade $x^n + y^n = z^n$ não se verificou.

Assim, empiricamente se comprova que Fermat tinha razão. Mas e a demonstração?

O teorema desafiou matemáticos por todo o mundo durante 358 anos, até que **Andrew Wiles**, um matemático inglês, conseguiu demonstrá-lo em 1995.



Wiles utilizou conceitos avançadíssimos, com os quais Fermat nem poderia ter imaginado; desta forma, se Fermat realmente conhecia alguma demonstração, certamente esta seria diferente (e mais simples) que a de Wiles.

Assim, chega ao fim uma história épica na busca do Santo Graal da Matemática.

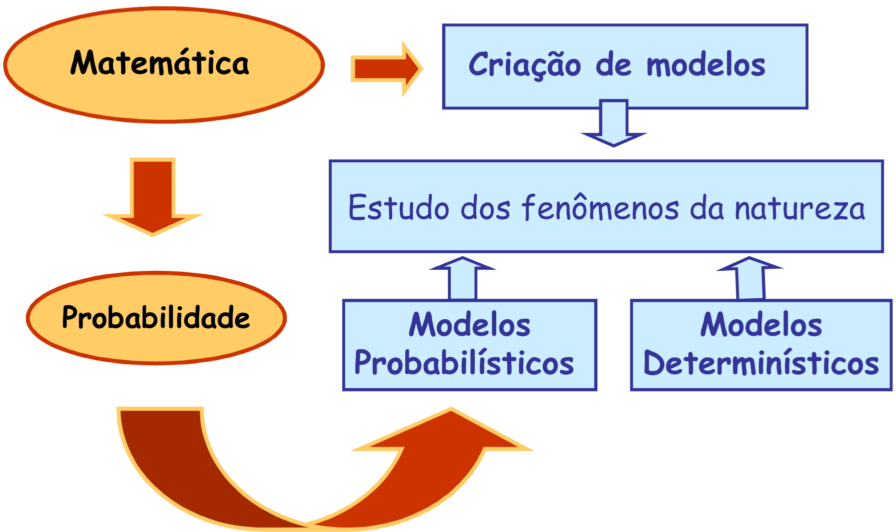
⇨ O avanço das probabilidades (início séc. XIX) → estudos do francês Laplace e do alemão Gauss

Ambos matemáticos e astrônomos, em trabalhos individuais, chegaram ao mesmo resultado: a distribuição normal

Pierre-Simon Laplace
(1749 - 1827)

Distribuições de probabilidades
⇩
espinha dorsal da teoria estatística
⇩
processos de inferência
⇩
aplicações de distribuições de probabilidades

Carl Friedrich Gauss
(1777 -1855)



Tipos de modelos

Modelo determinístico: é aquele em que ao conhecermos as variáveis de entrada (condições do experimento) é possível determinar variáveis de saída (os seus resultados).

⇨ Em **fenômenos determinísticos** existe a **certeza** do resultado que ocorrerá

⇨ **Física clássica** → fenômenos determinísticos

Exemplo: O deslocamento de um objeto é definido pela expressão

$$s = vt$$

onde:

s: deslocamento
t: tempo
v: velocidade

Modelo aleatório, probabilístico ou estocástico: é aquele em que, mesmo conhecendo as condições do experimento, não é possível determinar o seu resultado final.

⇨ Existe um **componente aleatório** e só é possível determinar a **chance** de ocorrência de um resultado.

⇨ **Biologia** → fenômenos probabilísticos

Exemplo: O nascimento de um bovino.

Não é possível conhecer o sexo do animal antes do nascimento

Só é possível determinar a probabilidade de ocorrência de cada sexo: 0,5 para fêmea e 0,5 para macho.

Conceitos fundamentais

- Experimento probabilístico ou aleatório
- Espaço amostral
- Evento ou ocorrência
- Ponto amostral
- Álgebra de eventos
- Eventos especiais

Experimento probabilístico ou aleatório: é aquele experimento cujos resultados podem não ser os mesmos, ainda que seja repetido sob condições idênticas.

Principais características:

- ⇨ o experimento pode ser repetido indefinidamente sob condições inalteradas;
- ⇨ é sempre possível descrever o conjunto de todos os resultados;
- ⇨ quando o experimento é realizado um grande número de vezes uma configuração definida ou regularidade surgirá.

Descrição do experimento → **ação** e **observação**

Exemplos:

E_1: **Ação:** jogar um dado de seis faces
observação: face voltada para cima

E_2: **Ação:** selecionar uma carta do baralho
observação: valor e naipe da carta

E_3: **Ação:** lançar uma moeda até que apareça cara
observação: número de lançamentos

E_4: **Ação:** acender uma lâmpada
observação: tempo decorrido até que ela se apague

E_5: **Ação:** lançar uma moeda e um dado simultaneamente
observação: valor da face do dado e a face da moeda voltados para cima

Espaço amostral (S)

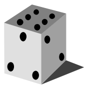
É o conjunto de **todos os possíveis resultados** de um experimento aleatório.

⇨ É o **conjunto universo** relativo aos resultados de um experimento.

A cada experimento aleatório está associado um conjunto de resultados possíveis ou espaço amostral.

Exemplos:

E_1: Jogar um dado e observar a face voltada para cima.



S_1={1,2,3,4,5,6} ← enumerável e finito

E_2: Selecionar uma carta do baralho e observar o seu valor e naipe.

S_2={ás de ouro,..., rei de ouro, ás de paus,..., rei de paus,..., ás de espada,..., rei de espada, ás de copas,..., rei de copas} ← enumerável e finito

E_3: Lançar uma moeda até que apareça cara e observar o número de lançamentos.

Cara | Coroa Cara | Coroa Coroa Cara

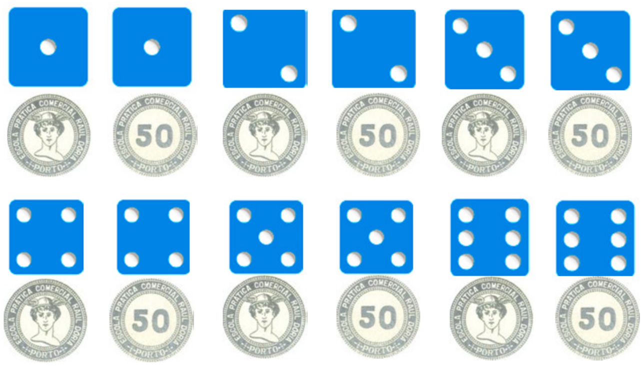
1 | 1 2 | 1 2 3 ← lançamentos

S_2={1, 2, 3, 4, 5,...} ← enumerável e infinito

E_4: Acender uma lâmpada e observar o tempo decorrido até que ela se apague.

S_4={t; t≥0} ← contínuo e infinito

E_5: Lançar uma moeda e um dado e observar o valor da face do dado e a face da moeda voltados para cima.



c=cara
k=coroa

S_5={(1,c), (1,k), (2,c), (2,k), (3,c), (3,k), (4,c), (4,k), (5,c), (5,k), (6,c), (6,k)}

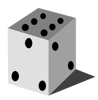
enumerável e finito

Evento ou ocorrência: é todo conjunto particular de resultados de **S** ou ainda todo subconjunto de **S**.

⇨ É designado por uma letra maiúscula (A, B, C).

⇨ A todo evento será possível associar uma probabilidade.

Exemplo: Lançamento de um dado



Conjunto universo → S={1,2,3,4,5,6} ← Espaço amostral

Subconjuntos:
- A = {1,2,3}
- B = Ocorrência de faces pares
- C = {5}

Eventos

Ponto amostral: é qualquer resultado particular de um experimento aleatório

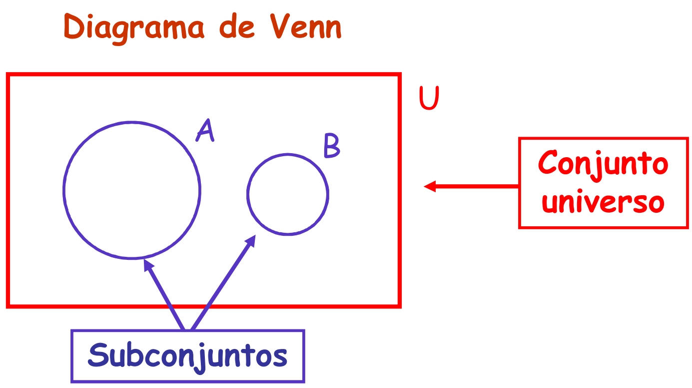
⇨ Todo espaço amostral e todo evento são constituídos por pontos amostrais.

Exemplo: $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ ← seis pontos amostrais

$A = \{1,3,5\}$ ← três pontos amostrais

$B = \{5,6\}$ ← dois pontos amostrais

Representação geométrica de conjuntos

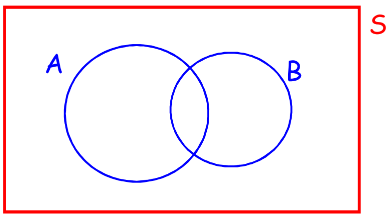


Os **diagramas de Venn** são úteis para dar intuição geométrica sobre a relação entre conjuntos.

Álgebra de Eventos

Como o espaço amostral S e os eventos são conjuntos, as mesmas operações realizadas com conjuntos são válidas para os eventos.

Exemplo: **A** e **B** são eventos de **S**

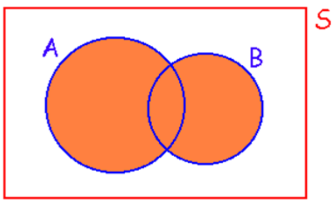


S={1,2,3,4,5,6}

A={1,3,5}

B={5,6}

⇨ **União:** Ocorre $A \cup B$, se ocorrer **A ou B** (ou ambos).



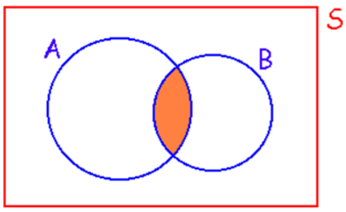
S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

A = {**1**,**3**,**5**}

B = {**5**,**6**}

A∪B={1,3,5,6}

⇨ **Intersecção:** Ocorre $A \cap B$, se ocorrer **A e B**.



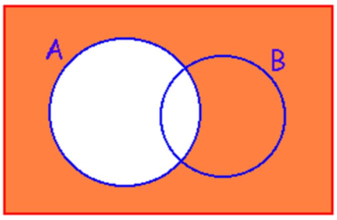
S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

A = {1, 3, **5**}

B = {**5**, 6}

A∩B={5}

⇨ **Complemento:** Ocorre $\bar{A}$, se ocorrer **S**, mas **não** ocorrer **A**.

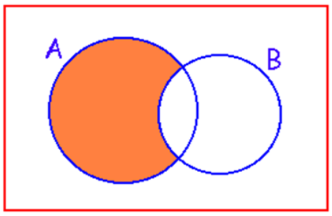


$S = \{1, \mathbf{2}, 3, \mathbf{4}, 5, \mathbf{6}\}$

$A = \{1, 3, 5\}$

$\bar{A} = \{2,4,6\}$

⇨ **Diferença:** Ocorre **A-B**, se ocorrer **A**, mas **não** ocorrer **B**.



$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A = \{\mathbf{1}, \mathbf{3}, 5\}$

$B = \{5, 6\}$

$A-B=\{1,3\}$

Eventos Especiais

Evento Impossível: é aquele evento que nunca irá ocorrer, é também conhecido como o conjunto vazio (∅).

⇨ É um evento porque é subconjunto de qualquer conjunto, portanto, é subconjunto de **S** (∅⊂S).

Exemplo: $A_1 = \{(x, y);\ x^2 + y^2 < 0\}$

Evento Certo: é aquele evento que ocorre toda vez que se realiza o experimento, portanto, esse evento é o próprio **S**.

⇨ É um evento porque todo conjunto é subconjunto de si mesmo (S⊂S).

Exemplo: $A_2 = \{(x, y);\ x^2 + y^2 \geq 0\}$

Se n é finito, então temos k eventos possíveis: $k = 2^n$

Exemplo: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow n=6$ e $k=2^6 = 64$

Evento impossível

$A_1 = \{\ \} = \varnothing$	$A_8 = \{1, 2\}$	$A_{15} = \{2, 5\}$	$A_{23} = \{1, 2, 3\}$
$A_2 = \{1\}$	$A_9 = \{1, 3\}$	$A_{16} = \{2, 6\}$	$A_{24} = \{1, 2, 4\}$
$A_3 = \{2\}$	$A_{10} = \{1, 4\}$	$A_{17} = \{3, 4\}$	$A_{25} = \{1, 2, 5\}$
$A_4 = \{3\}$	$A_{11} = \{1, 5\}$	$A_{18} = \{3, 5\}$	$A_{26} = \{1, 2, 6\}$
$A_5 = \{4\}$	$A_{12} = \{1, 6\}$	$A_{19} = \{3, 6\}$	...
$A_6 = \{5\}$	$A_{13} = \{2, 3\}$	$A_{20} = \{4, 5\}$	$A_{63} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$A_7 = \{6\}$	$A_{14} = \{2, 4\}$	$A_{21} = \{4, 6\}$	$A_{64} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Evento certo

Conjunto das partes de S:

$\mathcal{P}(S)=\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, ..., \{1, 2, 3, 4, 5\}, S\}$

Eventos mutuamente exclusivos:

Dois eventos **A** e **B** associados a um mesmo espaço amostral **S**, são mutuamente exclusivos quando a ocorrência de um **impede** a ocorrência do outro.

⇨ Na teoria dos conjuntos, correspondem aos conjuntos disjuntos, que não possuem elementos comuns ($A \cap B = \varnothing$).

Exemplos:

Exp.1. Lançamento de uma moeda e observação do resultado

S={c,k}

A = Ocorrência de cara $A = \{c\}$
B = Ocorrência de coroa $B = \{k\}$

A e B são mutuamente exclusivos

Exp.2. Lançamento de um dado e observação da face voltada para cima

$$S=\{1,2,3,4,5,6\}$$

$A = \{1, 3, 5\}$

$B = \{5, 6\}$

$C = \{2, 4, 6\}$

$A \cap B = \{5\}$ $\rightarrow$ A e B não são mutuamente exclusivos

$A \cap C = \varnothing$ $\rightarrow$ A e C são mutuamente exclusivos

$B \cap C = \{6\}$ $\rightarrow$ B e C não são mutuamente exclusivos

Conceitos de probabilidade

1. Conceito clássico ou probabilidade "a priori"
2. Frequência relativa ou probabilidade "a posteriori"
3. Conceito moderno ou axiomático
4. Probabilidade geométrica ou calculada como área

1.Conceito clássico ou probabilidade "a priori"

Jogos de azar

Teoria das probabilidades

Pierre-Simon Laplace
(1749-1827)

Como a teoria das probabilidades está historicamente ligada aos jogos de azar, esta associação gerou, inicialmente, um conceito chamado de conceito clássico ou probabilidade "a priori", devido a Laplace.

Em 1812, **Laplace** escreveu sua grande obra **"Teoria Analítica das probabilidades"** onde sistematizou os conhecimentos da época sobre probabilidades

A propósito do Cálculo das Probabilidades de Pascal, **Laplace** escreveu:

"A teoria das probabilidades, no fundo, não é mais do que o bom senso traduzido em cálculo; permite calcular com exatidão aquilo que as pessoas sentem por uma espécie de instinto... É notável que tal ciência, que começou com estudos sobre jogos de azar, tenha alcançado os mais altos níveis do conhecimento humano."

Pierre-Simon Laplace
(1749-1827)

1.Conceito clássico ou probabilidade "a priori"

Definição: Seja **E** um experimento aleatório e **S** o espaço amostral a ele associado, com **n pontos amostrais**, todos equiprováveis.
Se existe, em **S**, **m pontos favoráveis** à realização de um evento **A**, então a probabilidade de **A**, indicada por **P(A)**, será:

$$P(A) = \frac{\overset{\text{pontos favoráveis}}{m}}{\underset{\text{pontos possíveis}}{n}} = \frac{\#A}{\#S} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{número de elementos de } A \\ \leftarrow \text{número de elementos de } S \end{array}$$

Pressuposições básicas:

1. O espaço amostral S é **enumerável** e **finito**.
2. Os resultados do espaço amostral S são todos **equiprováveis**.

Exemplo:

Exp.: Lançar uma moeda não viciada duas vezes e observar a face voltada para cima em cada lançamento.

S = {cc, ck, kc, kk}

p(cc) = p(kc) = p(ck) = p(kk)

A = ocorrência de uma cara

A = {ck,kc}

S={cc,ck,kc,kk} #S = número de elementos de S = 4

A={ck,kc} #A = número de elementos de A = 2

n = número de pontos possíveis = #S=4

m = número de pontos favoráveis à ocorrência de A = #A=2

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\#A}{\#S} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

A probabilidade de ocorrer uma cara em dois lançamentos de uma moeda não viciada é $\frac{1}{2}$.

Outra situação:

O espaço amostral se refere ao **número de caras** que pode ocorrer em dois lançamentos de uma moeda não viciada.

S={0,1,2} #S=3

A={1} #A=1

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\#A}{\#S} = \cancel{\frac{1}{3}}$$

Não é possível usar o conceito clássico para calcular a probabilidade de A

As pressuposições foram atendidas?

S={0,1,2}

$p(0) = p(kk) = \frac{1}{4}$

$p(1) = p(kc) + p(ck) = \frac{1}{2}$

$p(2) = p(cc) = \frac{1}{4}$

Espaço amostral não equiprovável

⇨ Para usar o **conceito clássico** no cálculo das probabilidades, é recomendável partir sempre do **espaço amostral básico** (mais detalhado) do experimento que, geralmente, é não numérico.

Espaço amostral básico

S = {cc, ck, kc, kk} ← enumerável, mas não numérico

Espaço amostral numérico

S = {0, 1, 2}

Exercícios propostos:

1. Em um experimento aleatório de plantio de três sementes, especifique o espaço amostral **S** e os seguintes eventos:

A: duas sementes germinam
B: pelo menos uma semente germina
C: nenhuma semente germina

2. Dez estudantes de um colégio são selecionados para formar a equipe de basquete para a competição.

a) de quantas maneiras diferentes pode ser escolhida a equipe para entrar no primeiro jogo?
b) quantas dessas combinações incluem um estudante cujo nome é Afonso?
c) se a escolha é feita por sorteio, qual é a probabilidade de Afonso fazer parte da equipe neste primeiro jogo?

Análise combinatória

Técnicas de contagem → determinar o número de elementos de um conjunto ou o número de resultados possíveis de um experimento.

Seja *A* um conjunto com *n* elementos distintos entre si.

A = { a, b, c, d}

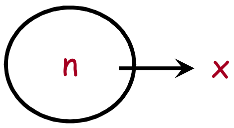
Se são retirados x elementos do conjunto ***A*** é possível formar grupos de três tipos:

- Permutações
- Arranjos
- Combinações

$$\text{ordem} \begin{cases} (b, c) \text{ e } (c, b) \\ (a, b, c) \text{ e } (a, c, b) \end{cases}$$

$$\text{natureza} \begin{cases} (b, c) \text{ e } (b, d) \\ (a, b, c) \text{ e } (a, b, d) \end{cases}$$

Permutações: grupos que se distinguem apenas pela ordem dos seus elementos. Todos os grupos têm os mesmos elementos.



n: número de elementos distintos
x: número de elementos retirados

Os grupos serão permutações somente quando $x = n$

Como calcular?

O número de permutações possíveis de n elementos é dado por

$$P_n = n! \text{ grupos}$$

Exemplo: A = { a, b, c, d} $n = 4$ e $x = 4$

Quantos permutações de quatro elementos é possível formar?

{(a, b, c, d), (a, b, d, c), (a, c, b, d), (a, c, d, b), ...

$$P_4 = 4! = 24 \text{ grupos}$$

{(a, b, c, d), (a, b, d, c), (a, c, b, d), (a, c, d, b), (a, d, b, c), (a, d, c, b), (b, a, c, d), (b, a, d, c), (b, c, a, d), (b, c, d, a), (b, d, a, c) (b, d, c, a), (c, a, b, d), (c, a, d, b), (c, b, a, d), (c, b, d, a), (c, d, a, b), (c, d, b, a), (d, a, b, c), (d, a, c, b), (d, b, a, c), (d, b, c, a), (d, b, a, c)}

Arranjos: grupos que se distinguem pela **ordem** e pela **natureza** dos seus elementos.

Condição: $x < n$

Como calcular?

Se $x<n$, o número de arranjos de n, tomados x a x, é dado por

$$A_n^x = \frac{n!}{(n-x)!} \text{ grupos}$$

$$A_n^x = \frac{n!}{(n-x)!} \text{ grupos}$$

Exemplo: **A = { a, b, c, d}** $n = 4$ e $x = 2$

Quantos arranjos de dois elementos é possível formar?

{(a, b), (b, a), (a, c), (c, a), ...

$$A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!} = 12 \text{ grupos}$$

{(a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (a, d), (d, a), (b, c), (c, b), (b, d), (d, b), (c, d), (d, c)}

Combinações: grupos que se distinguem apenas pela **natureza** dos seus elementos.

Condição: $x < n$

Como calcular?

Se $x<n$, o número de combinações de n, tomados x a x, é dado por

$$C_n^x = \frac{n!}{x!(n-x)!} \text{ grupos}$$

$$C_n^x = \frac{n!}{x!(n-x)!} \text{ grupos}$$

Exemplo: **A = { a, b, c, d}** $n = 4$ e $x = 2$

Quantas combinações de dois elementos é possível formar?

{(a, b) , (a, c) , (a, d), ...

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!\ 2!} = 6 \text{ grupos}$$

{(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (c, d)}

Permutações → ordem → (x = n)

$$P_n = n! \text{ grupos}$$

Arranjos → ordem e natureza → (x < n)

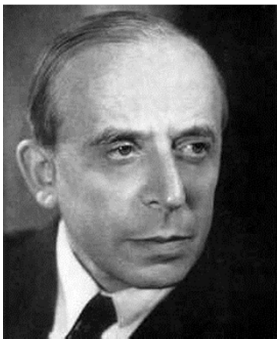
$$A_n^x = \frac{n!}{(n-x)!} \text{ grupos}$$

Combinações → natureza → (x < n)

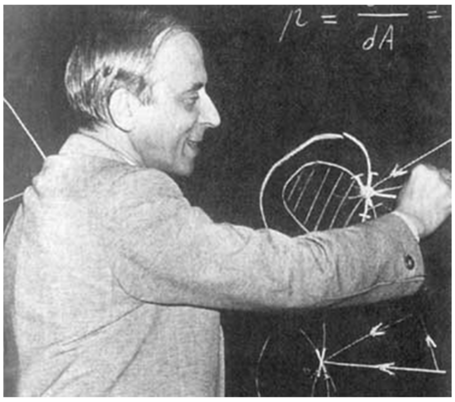
$$C_n^x = \frac{n!}{x!(n-x)!} \text{ grupos} \qquad C_n^x = \frac{1}{x!} A_n^x$$

2.Freqüência relativa ou probabilidade "a posteriori"

O conceito de frequência relativa como estimativa de probabilidade foi proposto pelo físico alemão Richard Von Mises.



Richard Von Mises
(1883-1953)



2.Freqüência relativa ou probabilidade "a posteriori"

Definição: Seja **E** um experimento aleatório e **A** um evento. Se após **n repetições** do experimento **E** (sendo n suficientemente grande), forem observados **m resultados favoráveis** ao evento **A**, então uma **estimativa** da probabilidade **P(A)** é dada pela freqüência relativa

$$f = \frac{m}{n} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{ocorrências de } A \\ \leftarrow \text{repetições de } E \end{array}$$

⇨ O conceito de probabilidade "a posteriori" é baseado no princípio estatístico da estabilidade (Lei dos grandes números ou Teorema Áureo de Jakob Bernoulli):

"À medida que o número de repetições do experimento (n) aumenta, a frequência relativa f se aproxima de P(A)."

⇨ **n** deve ser suficientemente grande para que se possa obter um resultado com margem de erro razoável.

Define-se o erro desta estimativa pela expressão:

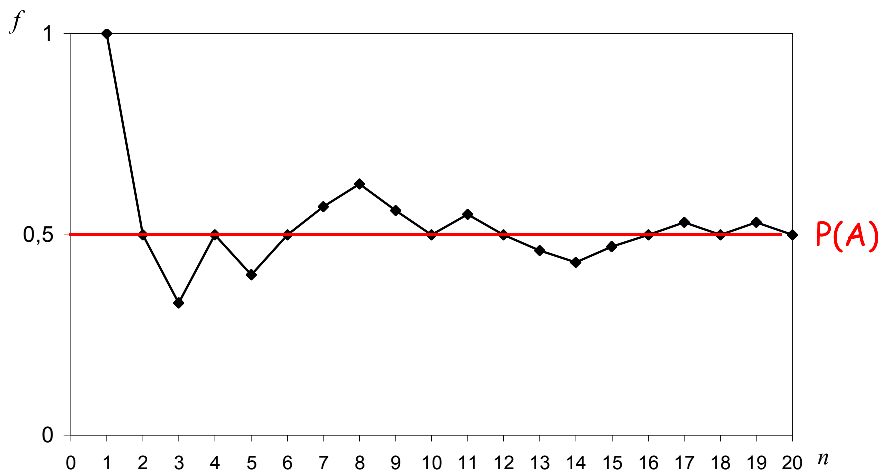
$$f - P(A) = \text{erro}$$

Exemplo: Lançamento de uma moeda honesta.

A = ocorrência de cara

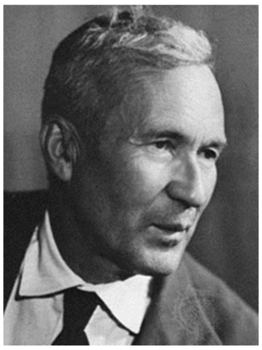
P(A) = 0,5

Repetições do exper.	Resultado	Ocorrências de A	Freqüência relativa f
1	c	1	1
2	k	1	1/2
3	k	1	1/3
4	c	2	2/4
5	k	2	2/5
6	c	3	3/6
7	c	4	4/7
8	c	5	5/8
...	...	...	...
n	-	m	m/n



Estabilização da frequência relativa f quando n cresce.

3. Conceito moderno ou axiomático



Andrei N. Kolmogorov
(1903–1987)

No século XX, Andrei Kolmogorov conceituou probabilidade através de axiomas rigorosos, tendo por base a teoria da medida.

3. Conceito moderno ou axiomático

Definição: Se **A** é um evento do espaço amostral **S**, então o número real **P(A)** será denominado probabilidade da ocorrência de **A**, se satisfizer os seguintes axiomas:

Axioma 1. $0 \leq P(A) \leq 1$

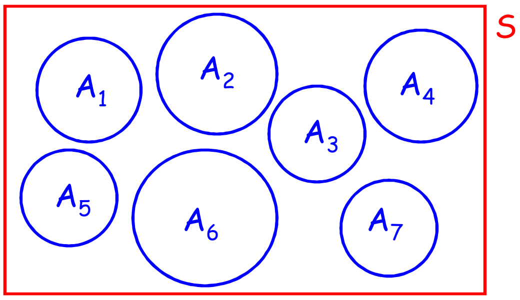
Axioma 2. $P(S)=1$

Axioma 3. Se **A** e **B** são eventos de **S** mutuamente exclusivos, então, $P(A \cup B) = P(A)+P(B)$

A e **B** são **mutuamente exclusivos** se e somente se $A \cap B = \varnothing$

⇨ O terceiro axioma pode ser generalizado para um número finito de eventos mutuamente exclusivos

Exemplo:



$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7) = P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_7) = \sum_{i=1}^{7} P(A_i)$$

Generalizando: $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

Profa. Clause Piana 61

⇨ O conceito axiomático não fornece formas e sim **condições** para o cálculo das probabilidades. Os conceitos "a priori" e "a posteriori" se enquadram no conceito axiomático.

Exemplos:

1. Lançamento de um dado honesto e observação da face voltada para cima

S={1,2,3,4,5,6}

A={2}

B={1,3,5}

P(A∪B)=?

Primeiro axioma

$$P(A) = \frac{\#A}{\#S} = \frac{1}{6}$$

$$P(B) = \frac{\#B}{\#S} = \frac{3}{6}$$

Terceiro axioma

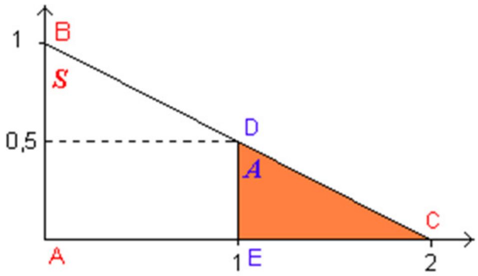
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$P(A \cup B) = 1/6 + 3/6$

$P(A \cup B) = 4/6$

Profa. Clause Piana 62

2. Seja o triângulo **ABC** um espaço amostral **S** e o triângulo **CDE** um evento **A**. A probabilidade **P(A)** é obtida da seguinte forma



$$P(A)=\frac{\text{área de }A}{\text{área de }S}$$

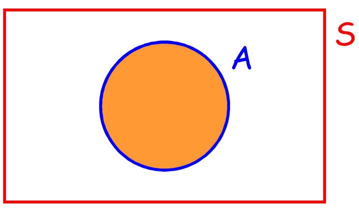
$$P(A)=\frac{1/4}{1}=\frac{1}{4}$$

$$\text{área de }S=\frac{b\times h}{2}=\frac{2\times 1}{2}=1$$

$$\text{área de }A=\frac{b\times h}{2}=\frac{1\times 0{,}5}{2}=\frac{1}{4}$$

4.Probabilidade geométrica ou calculada como área

Definição: Seja **S** o espaço amostral associado a um experimento aleatório e **A** um evento de **S**. A probabilidade de **A**, indicada por **P(A)**, será a razão entre a **área de A** e a **área de S**.



$$P(A)=\frac{\text{área de }A}{\text{área de }S}$$

$$P(A) = \frac{\text{área de } A}{\text{área de } S}$$

Generalização

A probabilidade de ocorrência de um evento é a **medida** do conjunto que representa o evento e pode ser calculada de diversas formas.

Daí podemos fazer a seguinte generalização:

$$P(A) = \frac{\text{medida de } A}{\text{medida de } S} \qquad \text{medida} \begin{cases} \text{área} \\ \text{comprimento} \\ \text{contagem} \end{cases}$$

⇨ A principal **vantagem** do conceito axiomático é a possibilidade de **extensão do estudo às variáveis contínuas**, englobando eventos pertencentes a espaços amostrais infinitos não enumeráveis.

Teoremas para o cálculo de probabilidades

Teorema 1. Se $\varnothing$ é um evento impossível, então **$P(\varnothing)=0$**.

Demonstração:

Se $A \cup \varnothing = A$, então $P(A \cup \varnothing) = P(A)$

$A \cap \varnothing = \varnothing$, então A e $\varnothing$ são mutuamente exclusivos

Utilizando o terceiro axioma, temos

$P(A) = P(A \cup \varnothing) = P(A) + P(\varnothing)$, logo

$P(A) = P(A) + P(\varnothing)$

$P(\varnothing) = P(A) - P(A) = 0$

Teorema 2. Se $\bar{A}$ é o complemento de **A**, então **$P(\bar{A})=1-P(A)$**.

Demonstração:

Se $A \cup \bar{A} = S$, então $P(A \cup \bar{A}) = P(S)$

$A \cap \bar{A} = \varnothing$, então A e $\bar{A}$ são mutuamente exclusivos

$P(S) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$

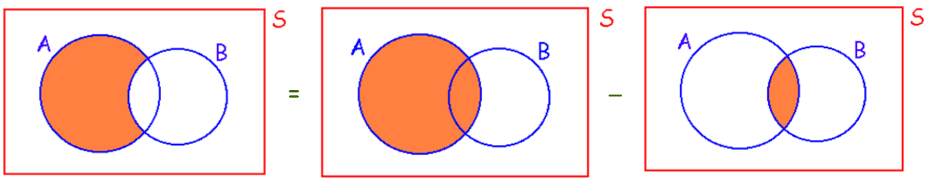
$1 = P(A) + P(\bar{A})$

$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Teorema 3. Se **A** e **B** são dois eventos quaisquer, então

$$P(A-B) = P(A) - P(A \cap B).$$

Demonstração:



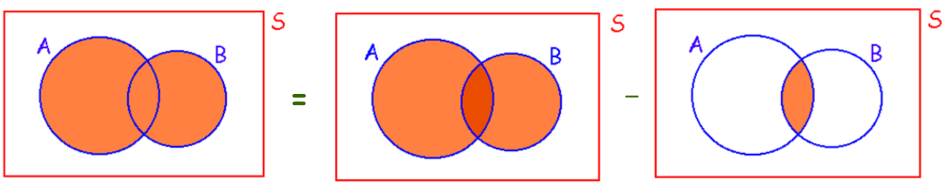
$P(A-B) =$ $\quad P(A) \quad$ $- P(A \cap B)$

4. Teorema da Soma das Probabilidades

Se **A** e **B** são dois eventos quaisquer, então

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Demonstração:



$P(A \cup B) \quad = \quad P(A) + P(B) \quad - \quad P(A \cap B)$

Exercício proposto:

A probabilidade de ocorrer um acidente em uma competição de carros é 0,18; a probabilidade de chover em um dia de competição é 0,28; e a probabilidade de ocorrer acidente e chuva em um dia de competição é 0,08. Determine a probabilidade de:

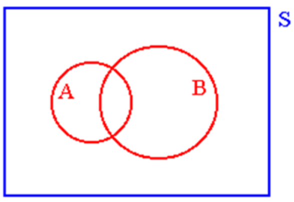
a) não ocorrer acidente na próxima competição;
b) chover ou ocorrer um acidente na próxima competição;
c) chover, mas não ocorrer acidente na próxima competição
d) não chover e não ocorrer acidente na próxima competição;

Sejam os eventos:

A: ocorrer um acidente em uma competição

B: ocorrer chuva no dia da próxima corrida

A∩B: ocorrer acidente **e** chuva em um dia de competição

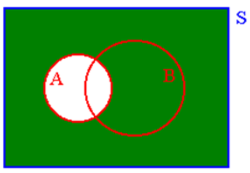


$P(A) = 0,18$

$P(B) = 0,28$

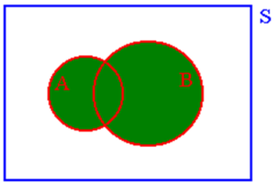
$P(A \cap B) = 0,08$

a) P(não ocorrer acidente na próxima competição)



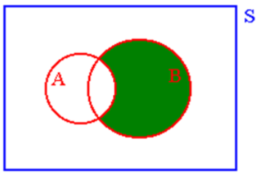
$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,18 = 0,82$

b) P(chover ou ocorrer um acidente)



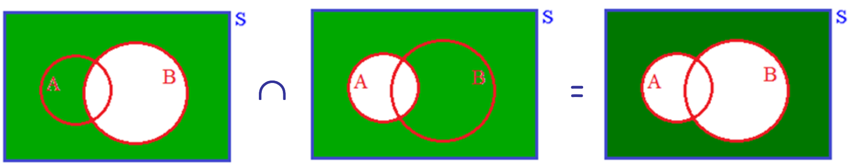
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= 0{,}18 + 0{,}28 - 0{,}08$$
$$= 0{,}38$$

c) P(chover, mas não ocorrer acidente)



$$P(B-A) = P(B) - P(A \cap B)$$
$$= 0{,}28 - 0{,}08$$
$$= 0{,}20$$

d) P(não chover e não ocorrer acidente)



$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0{,}38 = 0{,}62$$

Teorema de Morgan

$$P(\overline{A \cup B}) = P(\bar{A} \cap \bar{B})$$
$$P(\overline{A \cap B}) = P(\bar{A} \cup \bar{B})$$

Generalização: Ao "aplicar" a barra sobre uma operação, esta muda seu sinal, restando uma barra para cada membro da operação.

Teoremas para o cálculo de probabilidades

Teorema 1. $P(\varnothing)=0$

Teorema 2. $P(\bar{A})=1-P(A)$

Teorema 3. $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$

Teorema 4. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

Teorema 5. $P(\overline{A\cup B}) = P(\bar{A}\cap\bar{B})$

$P(\overline{A\cap B}) = P(\bar{A}\cup\bar{B})$

$P(A\cap B)=?$

Profa. Clause Piana 75

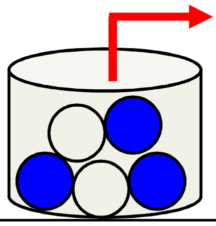
5. Probabilidade condicional e independência

Sejam **A** e **B** dois eventos associados a um mesmo espaço amostral **S**. Se **A** e **B** não são eventos mutuamente exclusivos, ou seja, se $A\cap B\neq\varnothing$, então **A** e **B** poderão ser eventos **independentes** ou **condicionados**.

Exemplo:

Exp.: Uma caixa contém cinco bolas, sendo três azuis e duas brancas. Duas bolas são retiradas ao acaso, uma a uma, e suas cores são observadas.

duas bolas



Definimos, então, dois eventos:

A_1: a primeira bola é azul

A_2: a segunda bola é branca

As probabilidades dos eventos **A_1** e **A_2** serão calculadas em duas situações: retiradas sem e com reposição da primeira bola.

Situação 1. Consideremos que a primeira bola retirada não é reposta → **retirada sem reposição**

S = {B, B, A, A, A} ← enumerável, finito e equiprovável

A_1 = {A, A, A }

$$P(A_1) = \frac{\#A_1}{\#S} = \frac{3}{5}$$

A probabilidade do **A_2** depende da ocorrência do **A_1** ?

⇨ Se ocorreu **A_1**, então temos $P(A_2/A_1)$

S = {B, B, A, A}

A_2/A_1 = {B, B}

$$P(A_2/A_1) = \frac{\#A_2/A_1}{\#S} = \frac{2}{4}$$

⇨ Se não ocorreu **A_1**, então temos $P(A_2/\bar{A}_1)$

S = {B, A, A, A }

$A_2/\bar{A}_1$ = {B}

$$P(A_2/\bar{A}_1) = \frac{\#A_2/\bar{A}_1}{\#S} = \frac{1}{4}$$

Se a bola **não for reposta**, a probabilidade de ocorrência do A_2 fica **alterada** pela ocorrência ou não do A_1

$$P(A_2/A_1) \neq P(A_2/\bar{A}_1)$$

Eventos condicionados

Definição: dois eventos quaisquer, **A** e **B**, são condicionados quando a ocorrência de um **altera** a probabilidade de ocorrência do outro.

A probabilidade condicional de **A** é denotada por

P(A/B)

(lê-se probabilidade de A dado que ocorreu B)

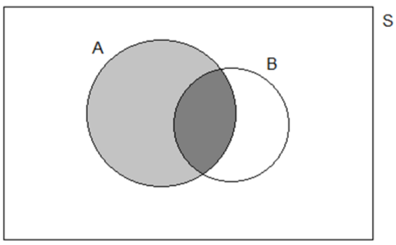
A probabilidade condicional de **B** é denotada por

P(B/A)

Como calcular a probabilidade condicional?

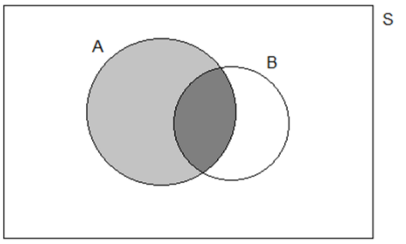
$$P(B/A) = ?$$

A condição restringe o espaço amostral que passa a ser o próprio A.



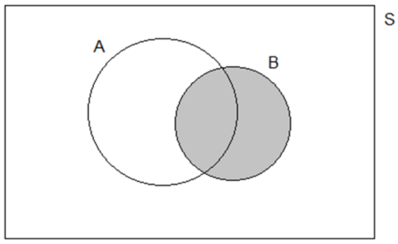
$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Probabilidade condicional de B



$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Probabilidade total de B

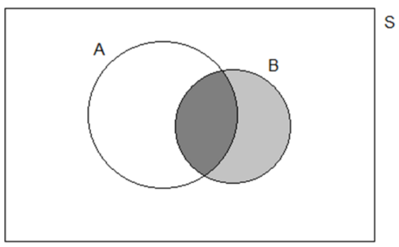


$$P(B) = \frac{\text{medida de } B}{\text{medida de } S}$$

Se **$P(B/A) \neq P(B)$**, os eventos A e B são condicionados.

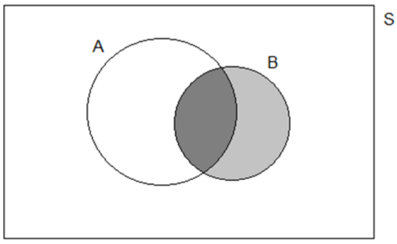
$$P(A/B) = ?$$

A condição restringe o espaço amostral que passa a ser o próprio B.



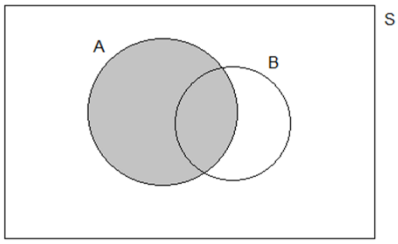
$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Probabilidade condicional de A



$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Probabilidade total de A



$$P(A) = \frac{\text{medida de } A}{\text{medida de } S}$$

Se **P(A/B) ≠ P(A)**, os eventos A e B são condicionados.

Situação 2. Consideremos que a primeira bola retirada é reposta antes de tirar a segunda → **retirada com reposição**.

A_1: a primeira bola é azul

A_2: a segunda bola é branca

S = {B, B, A, A, A}

A_1 = {A, A, A }

$$P(A_1) = \frac{\# A_1}{\# S} = \frac{3}{5}$$

A probabilidade do $\mathbf{A_2}$ depende da ocorrência do $\mathbf{A_1}$?

⇨ Se ocorreu $\mathbf{A_1}$, então temos $P(A_2/A_1)$

$S = \{B, B, A, A, A\}$

$A_2/A_1 = \{B, B\}$

$$P(A_2/A_1) = \frac{\# A_2/A_1}{\# S} = \frac{2}{5}$$

⇨ Se não ocorreu $\mathbf{A_1}$, então temos $P(B_2/\bar{A}_1)$

$S = \{B, B, A, A, A\}$

$A_2/\bar{A}_1 = \{B, B\}$

$$P(A_2/\bar{A}_1) = \frac{\# A_2/\bar{A}_1}{\# S} = \frac{2}{5}$$

Se a bola **for reposta**, a probabilidade de ocorrência do A_2 **não é alterada** pela ocorrência ou não do A_1

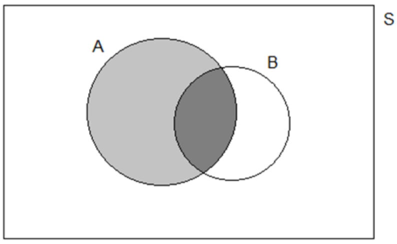
$$P(A_2/A_1) = P(A_2/\bar{A}_1)$$

Eventos independentes

Definição: Dois eventos quaisquer, **A** e **B**, são independentes quando a ocorrência de um **não altera** a probabilidade de ocorrência do outro.

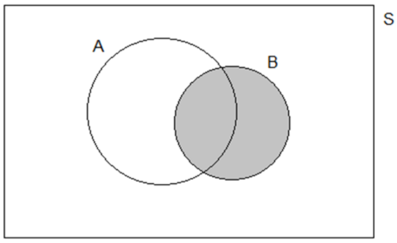
$$\mathbf{P(A/B)=P(A)} \quad \text{e} \quad \mathbf{P(B/A)=P(B)}$$

Probabilidade condicional de B



$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

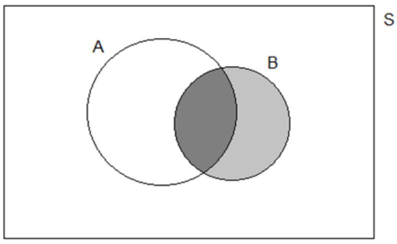
Probabilidade total de B



$$P(B) = \frac{\text{medida de } B}{\text{medida de } S}$$

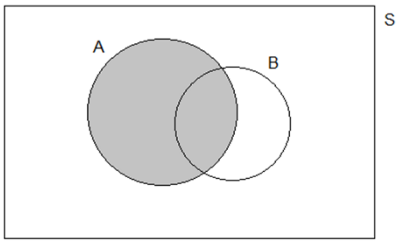
Se **P(B/A) = P(B)**, os eventos A e B são independentes.

Probabilidade condicional de A



$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Probabilidade total de A



$$P(A) = \frac{\text{medida de } A}{\text{medida de } S}$$

Se **P(A/B) = P(A)**, os eventos A e B são independentes.

6. Teorema do Produto das Probabilidades

Se A e B são dois eventos quaisquer, então

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{e} \quad P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Daí resulta que:

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B/A) \quad \text{ou} \quad P(A \cap B) = P(B)\,P(A/B)$$

Caso particular:

Se A e B são dois **eventos independentes**, então

$$P(B/A)=P(B) \quad \text{e} \quad P(A/B)=P(A)$$

Daí resulta que

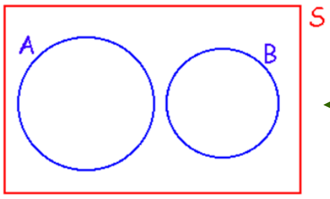
$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B/A) \quad \text{ou} \quad P(A \cap B) = P(B)\,P(A/B)$$

torna-se $P(A \cap B) = P(A)\,P(B) = P(B)\,P(A)$

$$\text{A e B são independentes} \Leftrightarrow \begin{cases} P(B/A)=P(B) \text{ e } P(A/B)=P(A) \\ P(A \cap B)=P(A)P(B)=P(B)P(A) \end{cases}$$

Conjuntos disjuntos
Eventos mutuamente exclusivos

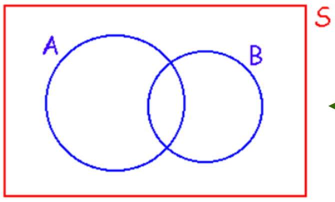
$A \cap B = \varnothing$



Grau máximo de dependência entre dois eventos: a ocorrência de um impede a ocorrência do outro

Conjuntos não disjuntos
Eventos interseccionados

$A \cap B \neq \varnothing$



Condicionados: a ocorrência de um altera a probabilidade de ocorrência do outro

Independentes: a ocorrência de um não altera a probabilidade de ocorrência do outro

A intersecção é condição necessária (mas não suficiente) para a independência.

Exercício proposto:

Um grupo de pessoas é constituído de 60 homens e 40 mulheres. Sabe-se que 45 desses homens e 30 dessas mulheres votaram numa determinada eleição. Tomando-se, aleatoriamente, uma dessas pessoas, calcule a probabilidade de:

a) ser homem;
b) ser mulher;
c) ter votado;
d) não ter votado;
e) ser homem, sabendo-se que votou;
f) ser mulher, sabendo-se que não votou;
g) ter votado, sabendo-se que é mulher;
h) não ter votado, sabendo-se que é homem.

	Votou	Não votou	Totais
Homem	45	15	60
Mulher	30	10	40
Totais	75	25	100

Eventos

H = ser homem
M = ser mulher
V = ter votado
NV = não ter votado

a) $P(H)=\frac{\#H}{\#S}=\frac{60}{100}=0{,}6$

b) $P(M)=\frac{\#M}{\#S}=\frac{40}{100}=0{,}4$

c) $P(V)=\frac{\#V}{\#S}=\frac{75}{100}=0{,}75$

d) $P(NV)=\frac{\#NV}{\#S}=\frac{25}{100}=0{,}25$

e) $P(H/V)=\frac{P(H\cap V)}{P(V)}=\frac{45/100}{75/100}=\frac{45}{75}$

f) $P(M/NV)=\frac{P(M\cap NV)}{P(NV)}=\frac{10/100}{25/100}=\frac{10}{25}$

g) $P(V/M)=\frac{P(V\cap M)}{P(M)}=\frac{30/100}{40/100}=\frac{30}{40}$

h) $P(NV/H)=\frac{P(NV\cap H)}{P(H)}=\frac{15/100}{60/100}=\frac{15}{60}$

Teorema de Bayes

Thomas Bayes
(1702 -1761)

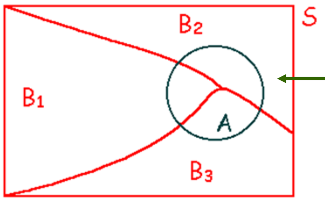
- Reverendo presbiteriano que viveu no início do século 18 na Inglaterra
- Estudou teologia na Escócia e assumiu uma paróquia numa cidade vizinha a Londres
- Em 1736 publicou seu primeiro e único livro de matemática
- Dois anos após sua morte, foi encontrado entre seus papéis um artigo com a demonstração do teorema
- Após sua publicação, o trabalho caiu no esquecimento, do qual só foi resgatado pelo matemático francês Laplace, que o revelou ao mundo em 1812

Teorema de Bayes

Seja S um espaço amostral, com n partições, onde está definido o evento A.

n=3

$B_1 \cup B_2 \cup B_3 = S$



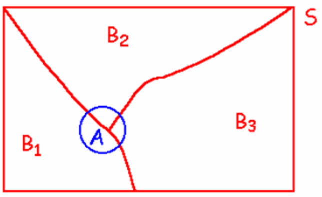
Evento de interesse

$$\left.\begin{array}{l} B_1 \cap B_2 = \varnothing \\ B_1 \cap B_3 = \varnothing \\ B_2 \cap B_3 = \varnothing \end{array}\right\} B_i \cap B_j = \varnothing$$

Profa. Clause Piana 95

Exemplo: Em uma fábrica de parafusos, as máquinas A, B e C produzem 25%, 35% e 40% do total produzido. Da produção de cada máquina, 5%, 4% e 2%, respectivamente, são defeituosos.

S = produção total da fábrica



B_1 = produção da máquina A

B_2 = produção da máquina B

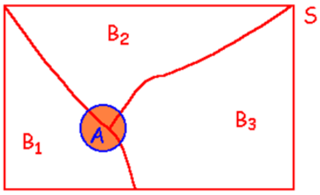
B_3 = produção da máquina C

A = produção defeituosa

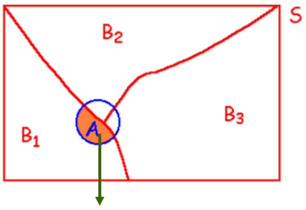
Se escolhemos ao acaso um parafuso desta fábrica, qual é a probabilidade de que este parafuso seja defeituoso?

96

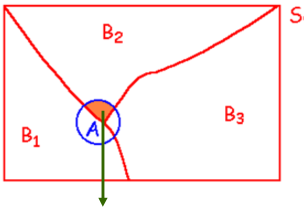
Se escolhemos ao acaso um parafuso desta fábrica, qual é a probabilidade de que este parafuso seja defeituoso?



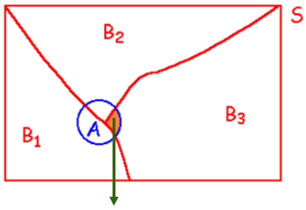
$P(A)$?



$B_1 \cap A$

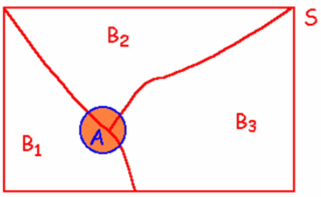


$B_2 \cap A$



$B_3 \cap A$

$$A = (B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A) \cup (B_3 \cap A)$$



$$A = (B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A) \cup (B_3 \cap A)$$

$$P(A) = ?$$

$$P(A) = P[(B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A) \cup (B_3 \cap A)]$$

$$P(A) = P(B_1 \cap A) + P(B_2 \cap A) + P(B_3 \cap A)$$

$$P(B_1 \cap A) = P(B_1) \,.\, P(A/B_1)$$

$$P(B_2 \cap A) = P(B_2) \,.\, P(A/B_2)$$

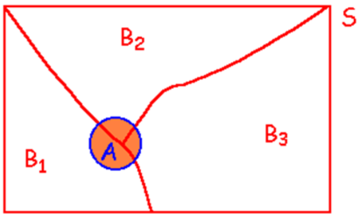
$$P(B_3 \cap A) = P(B_3) \,.\, P(A/B_3)$$

$$P(A) = P(B_1 \cap A) + P(B_2 \cap A) + P(B_3 \cap A)$$

$$P(A) = P(B_1) \,.\, P(A/B_1) + P(B_2) \,.\, P(A/B_2) + P(B_3) \,.\, P(A/B_3)$$

$$P(A) = P(B_1) \,.\, P(A/B_1) + P(B_2) \,.\, P(A/B_2) + P(B_3) \,.\, P(A/B_3)$$

Exemplo: Em uma fábrica de parafusos, as máquinas A, B e C produzem 25%, 35% e 40% do total produzido. Da produção de cada máquina, 5%, 4% e 2%, respectivamente, são defeituosos.



$P(B_1)= 0{,}25$

$P(B_2)= 0{,}35$

$P(B_3)= 0{,}40$

Probabilidade de ser defeituoso dado que foi fabricado pela máquina A $\rightarrow$ $P(A/B_1) = 0{,}05$

Probabilidade de ser defeituoso dado que foi fabricado pela máquina B $\rightarrow$ $P(A/B_2) = 0{,}04$

Probabilidade de ser defeituoso dado que foi fabricado pela máquina C $\rightarrow$ $P(A/B_3) = 0{,}02$

$P(B_1)= 0{,}25$ $\quad$ $P(A/B_1) = 0{,}05$

$P(B_2)= 0{,}35$ $\quad$ $P(A/B_2) = 0{,}04$

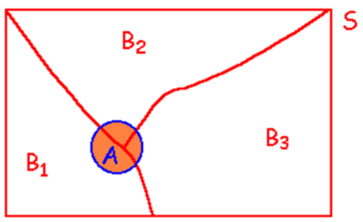
$P(B_3)= 0{,}40$ $\quad$ $P(A/B_3) = 0{,}02$

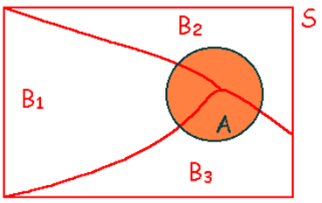
$$P(A) = P(B_1) \,.\, P(A/B_1) + P(B_2) \,.\, P(A/B_2) + P(B_3) \,.\, P(A/B_3)$$

$$P(A) = 0{,}25 \,.\, 0{,}05 + 0{,}35 \,.\, 0{,}04 + 0{,}40 \,.\, 0{,}02$$

$$P(A) = 0{,}0345$$

3,45% da produção de parafusos desta fábrica é defeituosa





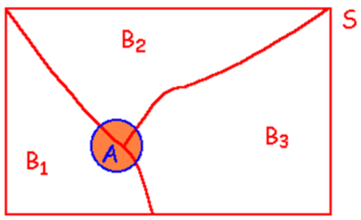
$P(A) = P(B_1) \cdot P(A/B_1) + P(B_2) \cdot P(A/B_2) + P(B_3) \cdot P(A/B_3)$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(B_i).P(A/B_i)$$

Teorema da probabilidade total:

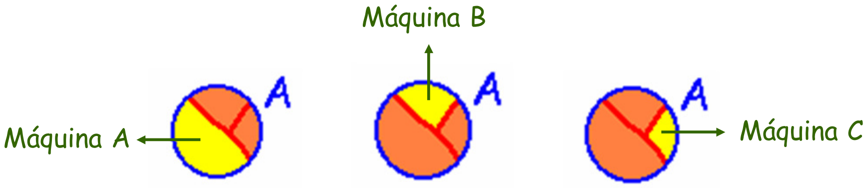
$P(A) = P(B_1) \cdot P(A/B_1) + P(B_2) \cdot P(A/B_2) + \ldots + P(B_n) \cdot P(A/B_n)$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i).P(A/B_i)$$

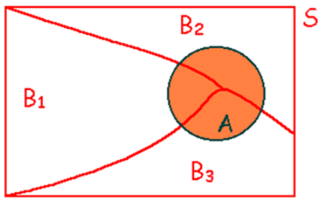


B_1 = máquina A
B_2 = máquina B
B_3 = máquina C

Escolhe-se ao acaso um parafuso e verifica-se que ele é defeituoso. Qual é a probabilidade de que seja da máquina A, da máquina B e da máquina C?



$P(B_1/A)$ = ? $P(B_2/A)$ = ? $P(B_3/A)$ = ?



Qual é a probabilidade de ocorrer B_1, sabendo-se que ocorreu A?

Probabilidade condicionada:

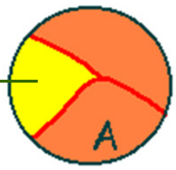
$P(B_1/A) = ?$

$$P(B_1/A) = \frac{P(B_1 \cap A)}{P(A)}$$

$P(B_1 \cap A) = P(B_1) \,.\, P(A/B_1)$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(B_i).P(A/B_i)$$

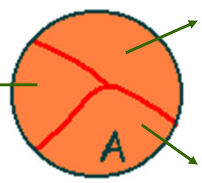
$P(B_1/A)$



$$P(B_1/A) = \frac{P(B_1)\,.\,P(A/B_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(B_i).P(A/B_i)}$$

$P(B_2/A)$

$P(B_1/A)$



$P(B_3/A)$

Teorema:

$$P(B_i/A) = \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B_i)\,.\,P(A/B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i).P(A/B_i)}$$

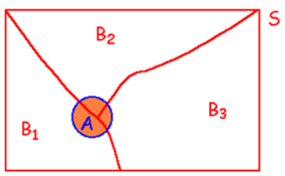
Teorema de Bayes

$$P(B_i/A) = \frac{P(B_i)\,.\,P(A/B_i)}{P(A)}$$

Teorema da probabilidade total

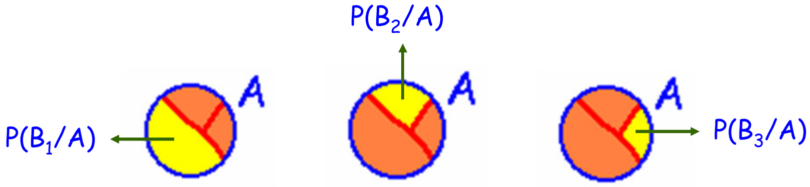
$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i).P(A/B_i)$$

Exemplo: Em uma fábrica de parafusos, as máquinas A, B e C produzem 25%, 35% e 40% do total produzido. Da produção de cada máquina, 5%, 4% e 2%, respectivamente, são defeituosos.

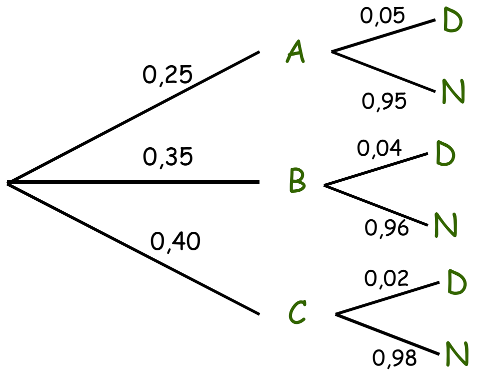


B_1 = produção da máquina A
B_2 = produção da máquina B
B_3 = produção da máquina C
A = produção defeituosa

Escolhe-se ao acaso um parafuso e verifica-se que ele é defeituoso. Qual é a probabilidade de que seja da máquina A, da máquina B e da máquina C?



Resolução com o uso do diagrama em árvore



$$P(D) = 0{,}25 \times 0{,}05 + 0{,}35 \times 0{,}04 + 0{,}40 \times 0{,}02 = 0{,}0345$$

$$P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0{,}25 \times 0{,}05}{0{,}0345} = 0{,}3623$$

$$P(B/D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{0{,}35 \times 0{,}04}{0{,}0345} = 0{,}4058$$

$$P(C/D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{0{,}40 \times 0{,}02}{0{,}0345} = 0{,}2319$$

Exercício proposto:

Um satélite meteorológico envia um conjunto de códigos binários ('0' ou '1') para descrever o desenvolvimento de uma tempestade. Entretanto, interferências diversas no sinal emitido pelo satélite podem provocar erros de transmissão.

Suponha que uma certa mensagem binária contendo 80% de dígitos '0' tenha sido transmitida e que exista uma probabilidade de 85% de que um dado '0' ou '1' tenha sido recebido corretamente. Se houve a recepção de um dígito '1', qual é a probabilidade de ter sido emitido um dígito '0'?

Estatística bayesiana

- Atualmente, a análise bayesiana é amplamente utilizada na ciência e na indústria.
- A teoria de Bayes mostra que a probabilidade de que A ocorra se B ocorrer geralmente difere da probabilidade de que B ocorra se A ocorrer: $P(A/B) \neq P(B/A)$.
- Não levar em conta esse fato é um erro muito comum em várias áreas, particularmente na medicina e no direito.
- Nos círculos jurídicos americanos, o erro da inversão costuma ser chamado de falácia da acusação, pois frequentemente advogados de acusação usam esse argumento para levar o júri a condenar suspeitos com base em provas frágeis.

Teoremas para o cálculo de probabilidades

Teorema 1. $P(\varnothing)=0$

Teorema 2. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Teorema 3. $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$

Teorema 4. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

Teorema 5. $\left.\begin{array}{l} P(\overline{A\cup B}) = P(\bar{A}\cap \bar{B}) \\ P(\overline{A\cap B}) = P(\bar{A}\cup \bar{B}) \end{array}\right\}$ Morgan

Teorema 6. $P(A\cap B)= P(A)\,P(B/A)$ ou $P(A\cap B)= P(B)\,P(A/B)$

Teorema 7. $\left.\begin{array}{l} P(B_i/A) = \dfrac{P(B_i)\,.\,P(A/B_i)}{P(A)} \\ P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i).P(A/B_i) \end{array}\right\}$ Bayes

Bibliografia

MLODINOW, L. **O andar do bêbado. Como o acaso determina nossas vidas**. Rio de Janeiro: Editora Zahar, 2009, 264p.

SILVEIRA JUNIOR, P. ; MACHADO, A.A. ; ZONTA, E.P.; SILVA, J.B. da. **Curso de Estatística** v.1. Pelotas: Universidade Federal de Pelotas, 1992, 135p.

WALPOLE, E.R.; MYERS, R.H.; MYERS, S.L.; YE, Y. Probabilidade e estatística para engenharia e ciências. 8 ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2009, 491p.

SINGH, Simon **O Último Teorema de Fermat**. Rio de Janeiro: Editora Record, 1998, 324p.

Sistema Galileu de Educação Estatística. Disponível em: http://www.galileu.esalq.usp.br/topico.html