Unidade IV – Inferência estatística

4.1. Introdução e histórico
4.2. Conceitos fundamentais
4.3. Distribuições amostrais e Teorema central do limite
4.4. Estimação de parâmetros
4.5. Testes de hipóteses
4.6. Quebras das pressuposições no processo de inferência
4.7. Testes de qui-quadrado

Testes para variância (σ^2) e proporção (π)

Algoritmo para construção de um teste de hipóteses

1. Definir as hipóteses estatísticas.
2. Fixar a taxa de erro aceitável.
3. Escolher a estatística para testar a hipótese e verificar as pressuposições para o seu uso.
4. Usar as observações da amostra para calcular o valor da estatística do teste.
5. Decidir sobre a hipótese testada e concluir.

Testes para a variância populacional (σ^2)

⇨ Comparação da variância de uma população (σ^2) com um valor padrão (σ_0^2)

⇨ Comparação de variâncias de duas populações (σ_1^2 e σ_2^2) → teste de homogeneidade de variâncias

Teste para a variância de uma população

Aplicação: no controle da qualidade, pois o monitoramento da variabilidade é essencial para a garantia de qualidade.

Pressuposição:

- normalidade da população de onde é extraída a amostra

Hipóteses estatísticas

Uma hipótese testada com freqüência é a de que a variância da população tem um valor especificado, ou seja, é igual a um valor padrão σ_0^2. Nesse caso, as hipóteses a serem testadas são:

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$$

$$H_A : \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \leftarrow \boxed{\text{Bilateral}}$$

$$\sigma^2 > \sigma_0^2 \leftarrow \boxed{\text{Unilateral direita}}$$

$$\sigma^2 < \sigma_0^2 \leftarrow \boxed{\text{Unilateral esquerda}}$$

Estatística do teste

A estatística do teste é **Q** que tem distribuição qui-quadrado com parâmetro ν=n-1 e é assim definida:

$$Q = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(\nu)$$

$$Q = Z_1^2 + Z_2^2 + \ldots + Z_\nu^2$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} = \frac{\sum(X_i - \bar{X} + \mu - \mu)^2}{\sigma^2} = \frac{\sum(X_i - \mu)^2}{\sigma^2} - \frac{n(\bar{X} - \mu)^2}{\sigma^2} = \sum\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 - \left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2$$

Estatística do teste

A estatística do teste é **Q** que tem distribuição qui-quadrado com parâmetro ν=n-1 e é assim definida:

$$Q = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(\nu)$$

Valor que deve ser calculado na amostra

onde:

S^2 é o estimador da variância populacional σ^2;
n é o tamanho da amostra;
ν=n–1 é o número de graus de liberdade associado à variância.

Profa. Clause Piana 7

Distribuição qui-quadrado (χ^2)

A variável Q é definida como a soma dos quadrados de n-1 variáveis Z independentes entre si:

$$Q = Z_1^2 + Z_2^2 + \ldots + Z_\nu^2 \sim \chi^2\ (\nu)$$

Sendo definida como uma soma de quadrados, os valores da variável Q nunca serão negativos.

A função densidade de probabilidade da distribuição χ^2 é dada por

$$f(q) = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} e^{-\frac{q}{2}} q^{\frac{\nu}{2}-1}\text{, sendo } 0 \le q < +\infty$$

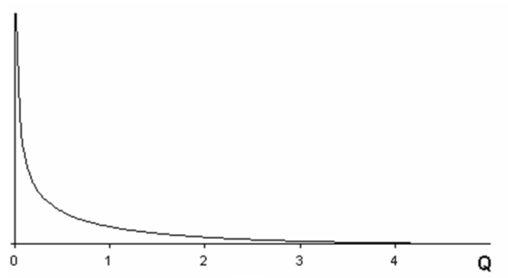
parâmetro

Profa. Clause Piana 8

Como o parâmetro da distribuição χ^2 é o número de graus de liberdade (ν), a curva muda o seu formato à medida que varia o valor de ν.

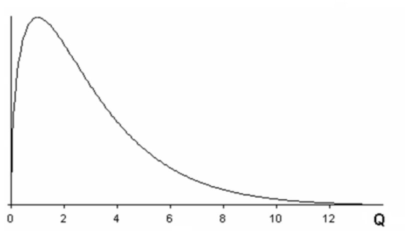
Quando $\nu = 1$, a curva assume um formato atípico.

Para $\nu = 1$

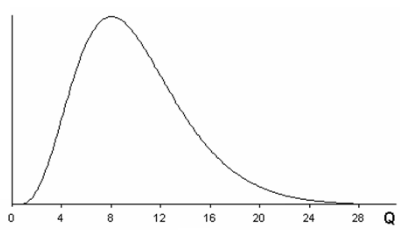


Quando $\nu > 1$, a curva assume a forma assimétrica positiva.

Para $\nu = 3$



Para $\nu = 10$



A distribuição χ^2 tem média $\mu = \nu$ e variância $\sigma^2 = 2\nu$ e se aproxima da normal quando ν cresce.

Critério de decisão – Teste bilateral

A região de rejeição de H_0 é definida em função do tipo de hipótese alternativa.

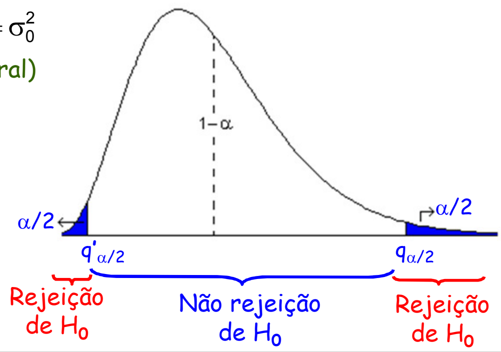
Fixado um nível de significância α, a hipótese nula é rejeitada se o valor da estatística do teste ultrapassar o valor crítico (superior ou inferior):

– se $q > q_{(\nu;\alpha/2)}$ ou $q < q'_{(\nu;\alpha/2)}$, rejeitamos H_0;

– se $q < q_{(\nu;\alpha/2)}$ e $q > q'_{(\nu;\alpha/2)}$, não rejeitamos H_0.

Para: $H_A : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

(bilateral)



Critério de decisão – Teste unilateral

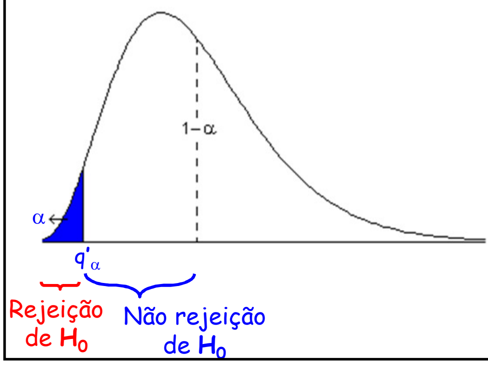
Fixado um nível de significância α, a hipótese nula é rejeitada se o valor da estatística do teste ultrapassar o valor crítico (superior ou inferior):

– se $q > q_{(\nu;\alpha)}$ ou $q < q'_{(\nu;\alpha)}$, rejeitamos H_0;

– se $q < q_{(\nu;\alpha)}$ ou $q > q'_{(\nu;\alpha)}$, não rejeitamos H_0;

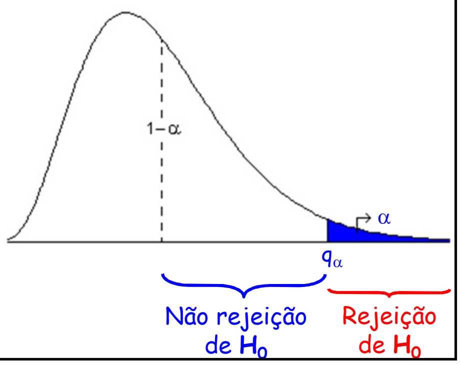
(unilateral esquerda)

Para: $H_A : \sigma^2 < \sigma_0^2$



(unilateral direita)

Para: $H_A : \sigma^2 > \sigma_0^2$



Graus de Liberdade	Nível de significância (α)									
	Esquerda (q')					Direita (q)				
(ν)	0,005	0,01	0,025	0,05	0,1	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005
1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	0,01	0,02	0,05	0,10	0,21	4,61	5,99	7,38	9,21	10,60
3	0,07	0,11	0,22	0,35	0,58	6,25	7,81	9,35	11,34	12,84
4	0,21	0,30	0,48	0,71	1,06	7,78	9,49	11,14	13,28	14,86
5	0,41	0,55	0,83	1,15	1,61	9,24	11,07	12,83	15,09	16,75
6	0,68	0,87	1,24	1,64	2,20	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55
7	0,99	1,24	1,69	2,17	2,83	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	13,36	15,51	17,53	20,09	21,95
9	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19
11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	17,28	19,68	21,92	24,72	26,76
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	18,55	21,03	23,34	26,22	28,30
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	21,06	23,68	26,12	29,14	31,32
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	22,31	25,00	27,49	30,58	32,80
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	23,54	26,30	28,85	32,00	34,27
17	5,70	6,41	7,56	8,67	10,09	24,77	27,59	30,19	33,41	35,72
18	6,26	7,01	8,23	9,39	10,86	25,99	28,87	31,53	34,81	37,16
19	6,84	7,63	8,91	10,12	11,65	27,20	30,14	32,85	36,19	38,58
20	7,43	8,26	9,59	10,85	12,44	28,41	31,41	34,17	37,57	40,00
21	8,03	8,90	10,28	11,59	13,24	29,62	32,67	35,48	38,93	41,40
22	8,64	9,54	10,98	12,34	14,04	30,81	33,92	36,78	40,29	42,80
23	9,26	10,20	11,69	13,09	14,85	32,01	35,17	38,08	41,64	44,18
24	9,89	10,86	12,40	13,85	15,66	33,20	36,42	39,36	42,98	45,56
25	10,52	11,52	13,12	14,61	16,47	34,38	37,65	40,65	44,31	46,93
26	11,16	12,20	13,84	15,38	17,29	35,56	38,89	41,92	45,64	48,29
27	11,81	12,88	14,57	16,15	18,11	36,74	40,11	43,19	46,96	49,64
28	12,46	13,56	15,31	16,93	18,94	37,92	41,34	44,46	48,28	50,99
29	13,12	14,26	16,05	17,71	19,77	39,09	42,56	45,72	49,59	52,34
30	13,79	14,95	16,79	18,49	20,60	40,26	43,77	46,98	50,89	53,67
40	20,71	22,16	24,43	26,51	29,05	51,81	55,76	59,34	63,69	66,77
50	27,99	29,71	32,36	34,76	37,69	63,17	67,50	71,42	76,15	79,49
60	35,53	37,48	40,48	43,19	46,46	74,40	79,08	83,30	88,38	91,95
70	43,28	45,44	48,76	51,74	55,33	85,53	90,53	95,02	100,43	104,21
80	51,17	53,54	57,15	60,39	64,28	96,58	101,88	106,63	112,33	116,32
90	59,20	61,75	65,65	69,13	73,29	107,57	113,15	118,14	124,12	128,30
100	67,33	70,06	74,22	77,93	82,36	118,50	124,34	129,56	135,81	140,17

Esta tabela fornece os limites unilaterais da distribuição. Isto significa que os valores q' delimitam a área α à esquerda e os valores q delimitam a área α à direita.

Quando o teste for bilateral, temos que dividir α por 2. Só assim, vamos obter o valor q crítico correto, ou seja , aquele que delimita a área $\alpha/2$.

Exemplo resolvido:

Uma máquina de empacotar café está regulada para encher os pacotes, com média de 500 g e desvio padrão de 10 g, sendo o peso dos pacotes normalmente distribuído.
Colhida uma amostra de n = 16, observou-se uma variância de 169 g^2. É possível afirmar com este resultado que a máquina está desregulada quanto à variabilidade, supondo uma significância de 5%?

Resolução:

Hipóteses estatísticas: $\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = 100 \\ H_A : \sigma^2 \neq 100 \end{cases}$ $\qquad \sigma_0^2 = 100$

Sendo $s^2 = 169$ e n = 16, temos:

$$q = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{(16-1)\times 169}{100} = 25{,}35$$

Como α = 0,05 e ν=15, os valores críticos são $q_{\alpha/2}$ =27,49 e $q'_{\alpha/2}$=6,26.

O valor calculado está contido neste intervalo, portanto, não rejeitamos H_0. Concluímos, ao nível de 5% de significância, a variância populacional não difere de 100 g^2. Assim, não há evidência de que e a máquina esteja desregulada.

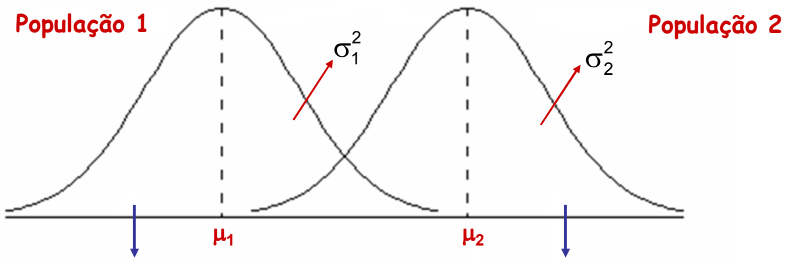
Comparação de variâncias de duas populações

- **Teste de homogeneidade de variância (teste F)**

Aplicação: Uma das aplicações deste teste é verificar se a pressuposição de homogeneidade de variância, requerida no teste t, é verdadeira.

Pressuposições:

- A variável em estudo tem distribuição normal
- As amostras retiradas das populações são independentes



Amostra 1 $[X_{11}, X_{12}, ..., X_{1n1}]$ **Amostra 2** $[X_{21}, X_{22}, ..., X_{2n2}]$

Hipóteses estatísticas

Nesse caso, as hipóteses estatísticas são:

$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$H_A : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ ← Bilateral

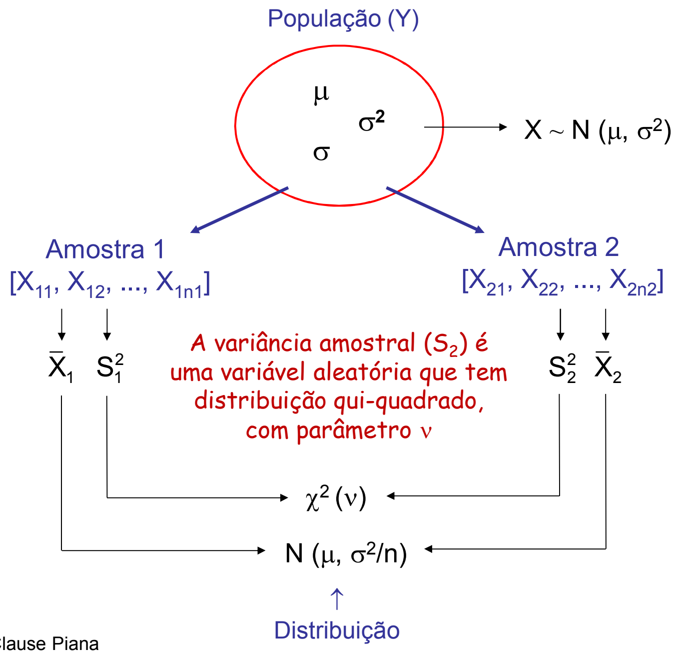
$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ ← Unilateral direita

$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ ← Unilateral esquerda

Estatística do teste: $F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$ — Valor que deve ser calculado na amostra

Sob H_0 verdadeira, a estatística F tem distribuição F com parâmetros ν_1 e ν_2, ou seja,

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(\nu_1, \nu_2)$$



Distribuição qui-quadrado (χ^2)

A variável Q é definida como a soma dos quadrados de n-1 variáveis Z independentes entre si:

$$Q = Z_1^2 + Z_2^2 + ... + Z_\nu^2 \sim \chi^2(\nu)$$

Sendo definida como uma soma de quadrados, os valores da variável Q nunca serão negativos.

A função densidade de probabilidade da distribuição χ^2 é dada por

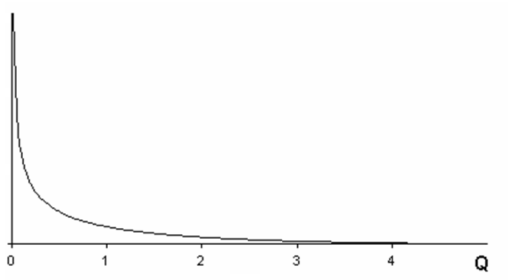
$$f(q) = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} e^{-\frac{q}{2}} q^{\frac{\nu}{2}-1}, \text{ sendo } 0 \le q < +\infty$$

parâmetro

Como o parâmetro da distribuição χ^2 é o número de graus de liberdade (ν), a curva muda o seu formato à medida que varia o valor de ν.

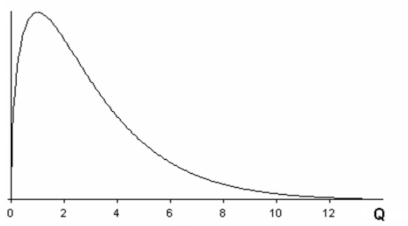
Quando ν = 1, a curva assume um formato atípico.

Para ν = 1

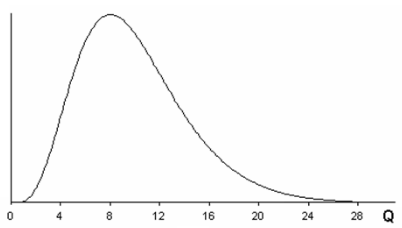


Quando ν > 1, a curva assume a forma assimétrica positiva.

Para ν = 3



Para ν = 10



A distribuição χ^2 tem média $\mu = \nu$ e variância $\sigma^2 = 2\nu$ e se aproxima da normal quando ν cresce.

Distribuição F de Snedecor

A variável F pode ser definida como a razão entre duas variáveis independentes com distribuição χ^2

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(\nu_1, \nu_2)$$

distribuição χ^2

Sendo definida como a razão entre duas variáveis positivas, os valores da variável F nunca serão negativos.

A função densidade de probabilidade da distribuição F é dada por

$$g(f) = \frac{1}{B\left(\frac{\nu_1}{2}, \frac{\nu_2}{2}\right)} \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_1}{2}} \frac{f^{\frac{\nu_1}{2}-1}}{\left(1 + \frac{\nu_1}{\nu_2} f\right)^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}}$$

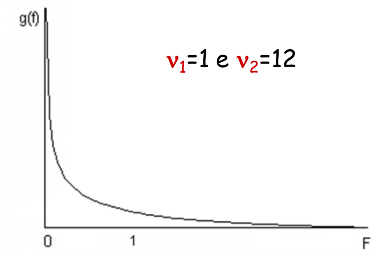
, sendo $0 \le f < +\infty$

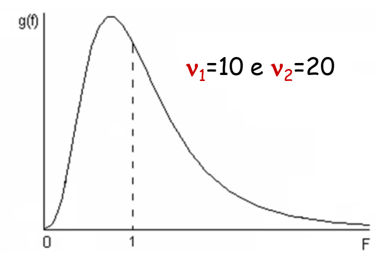
parâmetros

Profa. Clause Piana 21

Distribuição F de Snedecor

A forma do gráfico muda quando ν_1 e ν_2 se alteram





Profa. Clause Piana 22

Como tomar a decisão a respeito de H_0?

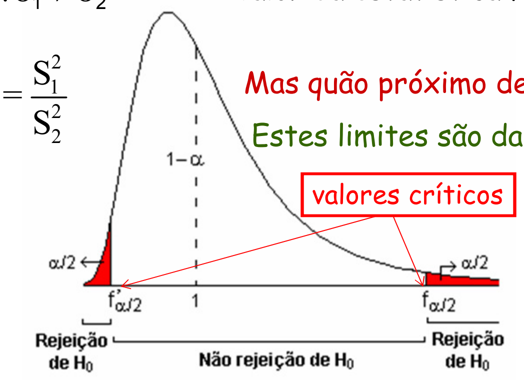
$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$
$$H_A: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

Se H_0 é verdadeira, devemos esperar que o valor da estatística F seja próximo de 1.

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

Mas quão próximo de 1 este valor deve estar?

Estes limites são dados pelos valores críticos



⇨ Se f < $f'_{\alpha/2}$ ou f > $f_{\alpha/2}$, rejeitamos H_0 ⇒ **f é atípico**

⇨ Se $f'_{\alpha/2}$ < f < $f_{\alpha/2}$, não temos motivos para rejeitar H_0 ⇒ **f é típico**

Para efetuar o teste F, convencionamos que a estatística F é obtida fixando a maior variância no numerador.

Teste bilateral condicionado

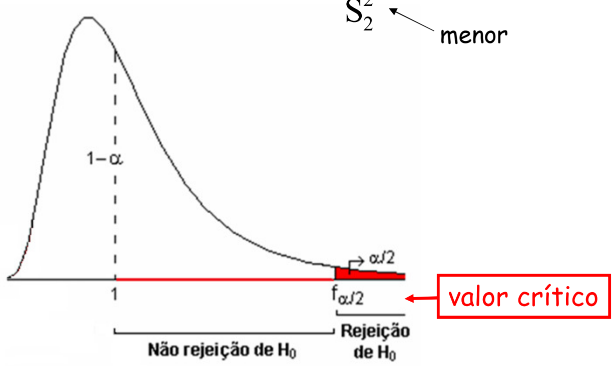
$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$
$$H_A: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

maior

nunca será menor que 1

menor



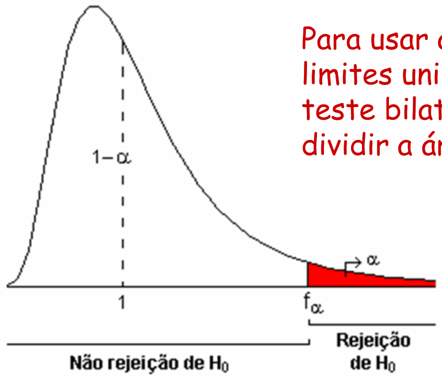
Critério de decisão

A regra de decisão a respeito de H_0 pode ser estabelecida com base num valor crítico.

Valor crítico → $f_{\alpha/2\,(\nu_1,\nu_2)}$: valor da estatística F que delimita a área $\alpha/2$, para os graus de liberdade ν_1 e ν_2 (Tabela: limites unilaterais)

O teste condicionado possibilita a utilização da tabela unilateral, mais disponíveis para consulta

A tabela da distribuição F fornece o valor f que delimita a área α à direita.



Para usar a tabela com limites unilaterais em um teste bilateral devemos dividir a área α por 2.

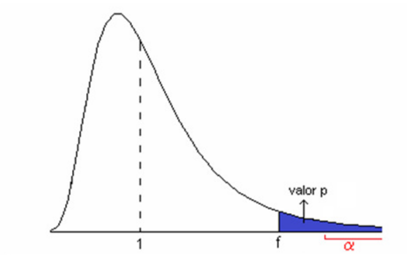
		ν_1																			
ν_2	α	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	15	20	24	30	40	60	120	Inf.
	0,05	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	236,8	238,9	240,5	241,9	243,0	243,9	245,9	248,0	249,1	250,1	251,1	252,2	253,3	254,3
1	0,025	647,8	799,5	864,2	899,6	921,8	937,1	948,2	956,7	963,3	968,6	976,7	984,9	984,9	993,1	997,2	1001,	1006,	1010,	1014,	1018,
	0,01	4052,	5000,	5403,	5625,	5764,	5859,	5928,	5982,	6022,	6056,	6082,	6106,	6157,	6209,	6235,	6261,	6287,	6313,	6339,	6366,
	0,001	4053*	5000*	5404*	5625*	5764*	5859*	5929*	5981*	6023*	6056*	6084*	6107*	6158*	6209*	6235*	6261*	6287*	6313*	6340*	6366*
	0,05	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,40	19,41	19,43	19,45	19,45	19,46	19,47	19,48	19,49	19,50
2	0,025	38,51	39,00	39,17	39,25	39,30	39,33	39,36	39,37	39,39	39,40	39,41	39,41	39,43	39,45	39,46	39,46	39,47	39,48	39,49	39,50
	0,01	98,50	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,36	99,37	99,39	99,40	99,41	99,42	99,43	99,45	99,46	99,47	99,47	99,48	99,49	99,50
	0,001	998,5	999,0	999,2	999,2	999,3	999,3	999,4	999,4	999,4	999,4	999,4	999,4	999,4	999,4	999,5	999,5	999,5	999,5	999,5	999,5
	0,05	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,76	8,74	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55	8,53
3	0,025	17,44	16,04	15,44	15,10	14,88	14,73	14,62	14,54	14,47	14,42	14,34	14,25	39,43	14,17	14,12	14,08	14,04	13,99	13,95	13,90
	0,01	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,35	27,23	27,13	27,05	26,87	26,69	26,60	26,50	26,41	26,32	26,22	26,13
	0,001	167,0	148,5	141,1	137,1	134,6	132,8	131,6	130,6	129,9	129,2	128,8	128,3	127,4	126,4	125,9	125,4	125,0	124,5	124,0	123,5
	0,05	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,93	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66	5,63
4	0,025	12,22	10,65	9,98	9,60	9,36	9,20	9,07	8,98	8,90	8,84	8,75	8,66	8,66	8,56	8,51	8,46	8,41	8,36	8,31	8,26
	0,01	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,55	14,45	14,37	14,20	14,02	13,93	13,84	13,75	13,65	13,56	13,46
	0,001	74,14	61,25	56,18	53,44	51,71	50,53	49,66	49,00	48,47	48,05	47,70	47,41	46,76	46,10	45,77	45,43	45,09	44,75	44,40	44,05
	0,05	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	8,82	4,77	4,74	4,70	4,68	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4,40	4,36
5	0,025	10,01	8,43	7,76	7,39	7,15	6,98	6,85	6,76	6,68	6,62	6,52	6,43	6,46	6,33	6,28	6,23	6,18	6,12	6,07	6,02
	0,01	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29	10,16	10,05	9,96	9,89	9,72	9,55	9,47	9,38	9,29	9,20	9,11	9,02
	0,001	47,18	37,12	33,20	31,09	29,75	28,84	28,16	27,64	27,24	26,92	26,64	26,42	25,91	25,39	25,14	24,87	24,60	24,33	24,06	23,79
	0,05	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,70	3,67
6	0,025	8,81	7,26	6,60	6,23	5,99	5,82	5,70	5,60	5,52	5,46	5,37	5,27	5,27	5,17	5,12	5,07	5,01	4,96	4,90	4,85
	0,01	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72	7,56	7,40	7,31	7,23	7,14	7,06	6,97	6,88
	0,001	35,51	27,00	23,70	21,92	20,81	20,03	19,46	19,03	18,69	18,41	18,18	17,99	17,56	17,12	16,89	16,67	16,44	16,21	15,99	15,75
	0,05	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	6,60	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27	3,23
7	0,025	8,07	6,54	5,89	5,52	5,29	5,12	4,99	4,90	4,82	4,76	4,67	4,57	3,51	4,47	4,42	4,36	4,31	4,25	4,20	4,14
	0,01	12,25	9,55	8,45	7,85	4,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62	6,54	6,47	6,31	6,16	6,07	5,99	5,91	5,82	5,74	5,65
	0,001	29,25	21,69	18,77	17,19	16,21	15,52	15,02	14,63	14,33	14,08	13,88	13,71	13,32	12,93	12,73	12,53	12,33	12,12	11,91	11,70
	0,05	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,31	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97	2,93
8	0,025	7,57	6,06	5,42	5,05	4,82	4,65	4,53	4,43	4,36	4,30	4,20	4,10	4,10	4,00	3,95	3,89	3,84	3,78	3,73	3,67
	0,01	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81	5,74	5,67	5,52	5,36	5,28	5,20	5,12	5,03	4,95	4,86
	0,001	25,42	18,49	15,83	14,39	13,49	12,86	12,40	12,04	11,77	11,54	11,35	11,19	10,84	10,48	10,30	10,11	9,92	9,73	9,53	9,33
	0,05	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,10	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75	2,71
9	0,025	7,21	5,71	5,08	4,72	4,48	4,32	4,20	4,10	4,03	3,96	3,87	3,77	3,77	3,67	3,61	3,56	3,51	3,45	3,39	3,33
	0,01	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11	4,96	4,81	4,73	4,65	4,57	4,48	4,40	4,31
	0,001	22,86	16,39	13,90	12,56	11,71	11,13	10,70	10,37	10,11	9,89	9,72	9,57	9,24	8,90	8,72	8,55	8,37	8,19	8,00	7,81
	0,05	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,94	2,91	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58	2,54
10	0,025	6,94	5,46	4,83	4,47	4,24	4,07	3,95	3,85	3,78	3,72	3,62	3,52	3,52	3,42	3,37	3,31	3,26	3,20	3,14	3,08
	0,01	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85	4,78	4,71	4,56	4,41	4,33	4,25	4,17	4,08	4,00	3,91
	0,001	21,04	14,91	12,55	11,28	10,48	9,92	9,52	9,20	8,96	8,75	8,59	8,45	8,13	7,80	7,64	7,47	7,30	7,12	6,94	6,76
	0,05	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,82	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45	2,40
11	0,025	6,72	5,26	4,63	4,28	4,04	3,88	3,76	3,66	3,59	3,53	3,43	3,33	3,33	3,23	3,17	3,12	3,06	3,00	2,94	2,88
	0,01	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40	4,25	4,10	4,02	3,94	3,86	3,78	3,69	3,60
	0,001	19,69	13,81	11,56	10,35	9,58	9,05	8,66	8,35	8,12	7,92	7,76	7,63	7,32	7,01	6,85	6,68	6,52	6,35	6,17	6,00
	0,05	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,72	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34	2,30
12	0,025	6,55	5,10	4,47	4,12	3,89	3,73	3,61	3,51	3,44	3,37	3,28	3,18	3,18	3,07	3,02	2,96	2,91	2,85	2,79	2,72
	0,01	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16	4,01	3,86	3,78	3,70	3,62	3,54	3,45	3,36
	0,001	18,64	12,97	10,80	9,63	8,89	9,38	8,00	7,71	7,48	7,29	7,14	7,00	6,71	6,40	6,25	6,09	5,93	5,76	5,59	5,42

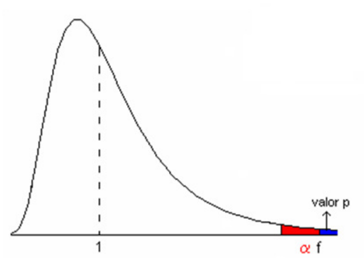
Esta tabela fornece os limites unilaterais superiores da distribuição. Isto significa que os valores f apresentados delimitam a área α à direita.

Quando o teste for bilateral, temos que dividir α por 2.
Só assim, vamos obter o valor crítico f correto, ou seja , aquele que delimita a área $\alpha/2$ à direita.

Outro critério de decisão

Valor p: probabilidade de que seja obtido um valor de F maior que o valor observado na amostra, dado que H_0 é verdadeira





Como tomar a decisão a respeito de H_0?

⇨ Se o **valor p** for maior ou igual a α: **não rejeitamos** a hipótese nula, pois **f é típico** ou está em uma região de alta probabilidade

⇨ Se o **valor p** for menor que α: **rejeitamos** a hipótese nula, pois **f é atípico** ou está em uma região de baixa probabilidade

Exemplo:

Durante o processo de fritura, um alimento absorve gordura. Um estudo foi conduzido com a finalidade de verificar se a quantidade absorvida depende do tipo de gordura. Para tanto foram utilizados dois tipos de gordura: vegetal e animal. Os dados obtidos foram:

Gordura animal	28	41	47	32	35	27
Gordura vegetal	25	43	28	21	13	

a) Faça o teste de homogeneidade de variâncias.
b) Verifique se os dados confirmam a hipótese de que a absorção depende do tipo de gordura. Utilize α=0,05.

Resolução: Variável em estudo: X = quantidade de gordura absorvida

1. Pressuposições: 1. A variável em estudo tem distribuição normal.
2. As amostras retiradas das populações são independentes.

2. Hipóteses estatísticas: $\begin{cases} H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_A : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{cases}$

3. Taxa de erro tipo I: α=0,05

4. Estatística do teste: $f = \dfrac{s_1^2}{s_2^2} = \dfrac{122{,}0}{60{,}4} = 2{,}02$

5. Decisão e conclusão:

$\left.\begin{array}{l} \nu_1 = 4 \text{ e } \nu_2 = 5 \\ \alpha/2 = 0{,}025 \end{array}\right\} f_{\alpha/2} = 7{,}39$

$f = 2{,}02 < f_{\alpha/2} = 7{,}39$ $\rightarrow$ Não rejeitamos H_0

Concluímos, ao nível de 5% de significância, que as variâncias populacionais não diferem entre si.

Estatística do teste

⇨ Comparação da variância de uma população (σ^2) com um valor padrão (σ_0^2)

$$Q = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(\nu)$$

⇨ Comparação de variâncias de duas populações (σ_1^2 e σ_2^2) → teste de homogeneidade de variâncias

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(\nu_1, \nu_2)$$

Exercícios propostos:

1. Os valores abaixo se referem aos pesos ao nascer (em kg) de bovinos da raça Ibagé, em duas épocas distintas:

Agosto: 18 25 16 30 35 23 21 33 32 22

Setembro: 27 30 20 30 33 34 17 33 20 23 39 23 28

Efetue o teste de homogeneidade de variâncias, ao nível α = 0,05.

2. Um experimento foi conduzido para comparar duas cultivares de soja (A e B) quanto ao rendimento médio por hectare. Os resultados obtidos foram os seguintes:

Cultivar A: $n_1 = 8$ $\bar{x}_1 = 3{,}8$ t/ha $s_1^2 = 0{,}04\ (t/ha)^2$

Cultivar B: $n_2 = 10$ $\bar{x}_2 = 4{,}6$ t/ha $s_2^2 = 0{,}36\ (t/ha)^2$

Verifique, utilizando α = 0,05, se a pressuposição de homogeneidade de variâncias foi atendida.

Testes para a proporção populacional (π)

- Comparação da proporção de uma população (π) com um valor padrão (π_0)
- Comparação de proporções de duas populações (π_1 e π_2)

Teste para a comparação da proporção de uma população (π) com um valor padrão (π_0)

Aplicação: verificar se uma proporção π de elementos da população que possuem uma determinada característica é igual a um determinado valor padrão (π_0).

Pressuposição:
- a amostra deve ser grande

Hipóteses estatísticas

Nesse caso, as hipóteses a serem testadas são:

$$H_0 : \pi = \pi_0$$

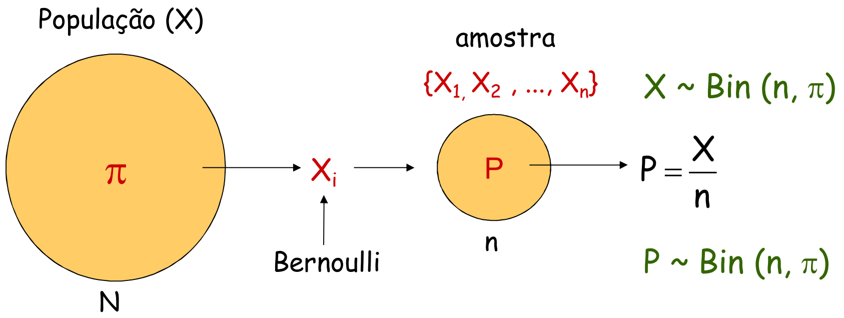
$$H_A : \pi \neq \pi_0 \leftarrow \boxed{\text{Bilateral}}$$

$$\pi > \pi_0 \leftarrow \boxed{\text{Unilateral direita}}$$

$$\pi < \pi_0 \leftarrow \boxed{\text{Unilateral esquerda}}$$

Parâmetro $\rightarrow \theta = \pi$ (proporção populacional)

Estimador $\rightarrow \hat{\theta} = P$ (proporção amostral)



$X \sim Ber(\pi)$

$X = x$	0	1	Σ
$P(X = x)$	$1-\pi$	π	1

$E(X) = \mu = \pi \qquad V(X) = \sigma^2 = \pi(1-\pi)$

Parâmetro $\rightarrow \theta = \pi$ (proporção populacional)

Estimador $\rightarrow \hat{\theta} = P$ (proporção amostral)

$P \sim Bin(n, \pi)$

De acordo com o Teorema Central do Limite (TCL), quando a amostra é grande, a distribuição binomial se aproxima da normal; logo, a distribuição de P se aproxima da normal:

$P \sim N(\mu_P, \sigma_P^2)$ onde: $\mu_P = \pi$

$$\sigma_P^2 = \frac{\pi(1-\pi)}{n}$$

Assim, utilizamos a variável **Z** para testar H_0:

Padronizando a variável P $\rightarrow$ $Z = \dfrac{P - \mu_P}{\sigma_P} \rightarrow Z = \dfrac{P - \pi}{\sqrt{\dfrac{\pi(1-\pi)}{n}}}$

Demonstração:

$$P = \frac{X}{n} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{número de sucessos} \\ \leftarrow \text{tamanho da amostra} \end{array}$$

$$X \sim \text{Bin}(n, \pi) \quad \begin{cases} E(X) = n\pi \\ V(X) = n\pi(1 - \pi) \end{cases}$$

$$\mu_P = E(P) = E\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n}E(X) = \frac{1}{n}n\pi = \pi$$

$$\sigma_P^2 = V(P) = V\left(\frac{X}{n}\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 V(X) = \frac{1}{n^2}n\pi(1-\pi) = \frac{\pi(1-\pi)}{n}$$

Estatística do teste

Pressuposição : A amostra é grande quando $np > 5$ e $n(1-p) > 5$.

$$H_0 : \pi = \pi_0$$

Sob H_0 verdadeira, temos

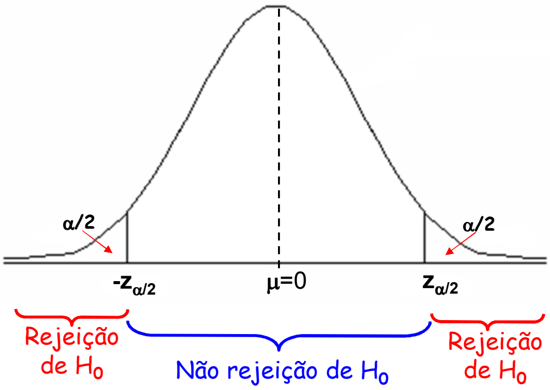
$$Z = \frac{P - \pi_0}{\sqrt{\dfrac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}}$$

Valor que deve ser calculado na amostra

A decisão sobre H_0 é baseada nos valores críticos, encontrados na tabela da distribuição normal padrão:

$z_{\alpha/2} \rightarrow$ para o teste bilateral
$z_{\alpha} \rightarrow$ para o teste unilateral

Critério de decisão



Fixando o nível de significância α, a hipótese nula será rejeitada se:

$|z| > z_{\alpha/2}$, no teste bilateral;
$|z| > z_{\alpha}$, no teste unilateral.

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0754
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2133	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2258	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2518	0,2549
0,7	0,2580	0,2612	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2996	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000

Exemplo resolvido:

As condições de mortalidade de uma região são tais que a proporção de nascidos que sobrevivem até 70 anos é de 0,60. Teste esta hipótese ao nível de 5% de significância, considerando que em 1000 nascimentos amostrados aleatoriamente, verificou-se 530 sobreviventes até os 70 anos.

Resolução:

Amostra grande $\begin{cases} np > 5 \text{ e } n(1-p) > 5 \\ 530 > 5 \text{ e } 470 > 5 \end{cases}$

Hipóteses estatísticas: $\begin{cases} H_0 : \pi = 0,6 \\ H_A : \pi \neq 0,6 \end{cases}$

Sendo p = 0,53 e π_0 = 0,6, temos:

$$z = \frac{p - \pi_0}{\sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}} = \frac{0,53 - 0,60}{\sqrt{\frac{0,60(1-0,60)}{1000}}} = -4,52$$

Como α = 0,05, então, $z_{\alpha/2}$ = 1,96.

Sendo o |z| calculado maior que o valor crítico, rejeitamos a hipótese de nulidade. Concluímos, ao nível de 5% de significância, que a taxa de nascidos que sobrevivem até os 70 anos é menor do que 60%.

Teste para a comparação de duas proporções (π_1 e π_2)

A aproximação da distribuição normal também pode ser usada para testar hipóteses sobre diferenças entre proporções de duas populações.

Hipóteses estatísticas

Nesse caso, as hipóteses a serem testadas são:

$H_0 : \pi_1 = \pi_2$

$H_A : \pi_1 \neq \pi_2$ ← Bilateral

$\pi_1 > \pi_2$ ← Unilateral direita

$\pi_1 < \pi_2$ ← Unilateral esquerda

Parâmetro → $\theta = \pi_1 - \pi_2$ (diferença entre as proporções populacionais)

Estimador → $\hat{\theta} = P_1 - P_2$ (diferença entre as proporções amostrais)

A distribuição do estimador se aproxima da normal:

$P_1 - P_2 \sim N(\mu_{P_1-P_2}, \sigma^2_{P_1-P_2})$ onde: $\mu_{P_1-P_2} = \pi_1 - \pi_2$

$$\sigma^2_{P_1-P_2} = \frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}$$

Assim, utilizamos a variável **Z** para testar H_0:

Padronizando $P_1 - P_2$ → $Z = \frac{(P_1 - P_2) - \mu_{P_1-P_2}}{\sqrt{\sigma^2_{P_1-P_2}}}$

$$Z = \frac{(P_1 - P_2) - (\pi_1 - \pi_2)}{\sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}}}$$

Estatística do teste

Sob $H_0 : \pi_1 = \pi_2$ verdadeira, temos

$$Z = \frac{P_1 - P_2}{\sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}}}$$

Como os valores de π_1 e π_2 não são conhecidos, devemos utilizar seus estimadores P_1 e P_2. Assim, o valor de Z é:

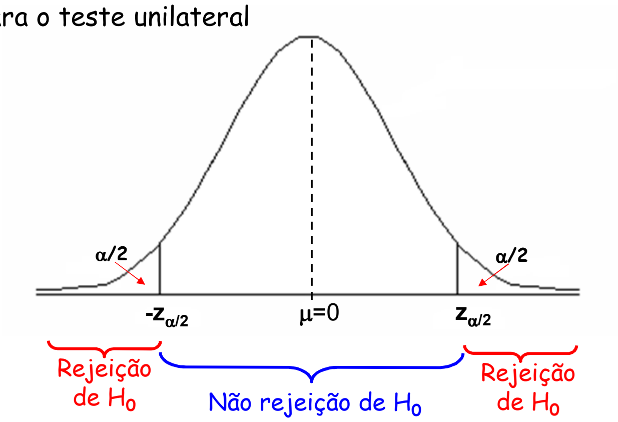
$$Z = \frac{P_1 - P_2}{\sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_2}}}$$

Valor que deve ser calculado na amostra

A decisão sobre H_0 é baseada nos valores críticos, encontrados na tabela da distribuição normal padrão:

$z_{\alpha/2}$ → para o teste bilateral

z_{α} → para o teste unilateral



Fixando o nível de significância α, a hipótese nula será rejeitada se:

$|z| > z_{\alpha/2}$, no teste bilateral;

$|z| > z_{\alpha}$, no teste unilateral.

Exemplo resolvido:

Em uma pesquisa de opinião, 32 entre 80 homens declararam apreciar certa revista, acontecendo o mesmo com 26 entre 50 mulheres. Ao nível de 5% de significância os homens e as mulheres apreciam igualmente a revista?

Resolução:

Hipóteses estatísticas: $\begin{cases} H_0: \pi_1 = \pi_2 \\ H_A: \pi_1 \neq \pi_2 \end{cases}$

Amostra grande $\begin{cases} np_1>5 \text{ e } n(1-p_1)>5 \\ 32 > 5 \text{ e } 48 > 5 \\ np_2>5 \text{ e } n(1-p_2)>5 \\ 26 > 5 \text{ e } 24 > 5 \end{cases}$

Sendo $p_1 = 32/80 = 0{,}40$ e $p_2 = 26/50 = 0{,}52$, temos:

$$z = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} = \frac{0{,}40 - 0{,}52}{\sqrt{\frac{0{,}40 \times 0{,}60}{80} + \frac{0{,}52 \times 0{,}48}{50}}} = -1{,}34$$

Como $\alpha = 0{,}05$, então, $z_{\alpha/2} = 1{,}96$.

Sendo o $|z|$ calculado menor que o valor crítico, não rejeitamos a hipótese de igualdade entre as preferências de homens e mulheres.

Concluímos, ao nível de 5% de significância, que não há diferença significativa entre as preferências de homens e mulheres quanto à revista.

Estatística do teste

⇨ Comparação de uma proporção (π) com um padrão (π_0)

$$Z = \frac{P - \pi_0}{\sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}} \sim N(0, 1)$$

⇨ Comparação de proporções de duas populações (π_1 e π_2)

$$Z = \frac{P_1 - P_2}{\sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_2}}} \sim N(0, 1)$$

Bibliografia

BUSSAB, W.O.; MORETTIN, P.A. **Estatística Básica**. São Paulo: Saraiva. 2006. 526p.

FERREIRA, D.F. **Estatística Básica**. Lavras: Editora UFLA, 2005, 664p.

MLODINOW, L. **O andar do bêbado. Como o acaso determina nossas vidas**. Rio de Janeiro: Editora Zahar, 2009, 264p.

SILVEIRA JÚNIOR, P., MACHADO, A.A., ZONTA, E.P., SILVA, J.B. da Curso de Estatística v.1, Pelotas: Universidade Federal de Pelotas, 1989. 135p.

Sistema Galileu de Educação Estatística. Disponível em: http://www.galileu.esalq.usp.br/topico.html