PPGOM-UFPel
Macroeconomia (2ª parte)

Sistemas de Equações Diferenciais e Alguns Problemas de Controle Ótimo- Lista

1. Considere a versão do modelo IS-LM de Kaldor tal como resumida a seguir.

$$\begin{aligned}\dot{Y} &= \alpha\left[I(Y,r) - S(Y,r)\right] \\ \dot{r} &= \beta\left[L(Y,r) - L_s\right]\end{aligned}$$, com as seguintes especificações:

$I_r < 0, S_r > 0, L_Y > 0, L_r < 0, 0 < S_Y < I_Y < 1$ e os parâmetros são positivos.

a) Usando a expansão de Taylor até a primeira ordem, construa a matriz Jacobiana, calcule seu traço e seu determinante. Os sinais do traço e do determinante podem ser definidos, apenas com as informações que temos? Responda, apresentando os cálculos pertinentes.

b) Encontre as inclinações da IS e da LM. Faça o diagrama de fase com as curvas IS e LM para o caso em que o traço da matriz Jacobiana é negativo e o determinante, positivo. Há convergência para o equilíbrio neste caso?

2. Considere o modelo de Cagan abaixo.

$$\begin{aligned}m(t) - p(t) &= -\alpha\pi^e(t) \\ \frac{d\pi^e(t)}{dt} &= \gamma\left[\pi(t) - \pi^e(t)\right]\end{aligned}$$, em que $\alpha, \gamma > 0$

Temos também que a inflação é definida como: $\dot{p}(t) = \pi(t)$. As variáveis são: m = logaritmo natural do estoque nominal de moeda, p = logaritmo natural do nível de preço, π^e = taxa de inflação esperada, π = taxa de inflação.

a) Suponha que o estoque de moeda é constante. Mostre que a equação diferencial relativa à lei de movimento no tempo do nível de preços é: $\dfrac{dp(t)}{dt} = \gamma\dfrac{(m(t) - p(t))}{1 - \alpha\gamma}$.

Especifique TODOS os cálculos. [Dica: derive a primeira equação com relação ao tempo]

b) Faça o diagrama de fase com dp/dt no eixo vertical e p no eixo horizontal. Trace a relação encontrada para: (i) $\alpha\gamma < 1$ e (ii) $\alpha\gamma > 1$. Discuta as condições para convergência/divergência em relação ao equilíbrio.

c) Considere a versão do modelo de Cagan para expectativas racionais (neste modelo, a hipótese significa que: $\pi^e(t) = \pi(t)$) apresentada a seguir e encontre a nova equação diferencial para dp/dt.

$$m(t) - p(t) = -\alpha \pi^e(t)$$
$$\frac{d\pi^e(t)}{dt} = \pi(t)$$

d) Discuta o que acontece com a trajetória do preço no caso em que o governo aumenta a oferta de moeda. Dê a intuição econômica.

3. Considere o seguinte sistema de equações diferenciais

$$\dot{K} = I(q,s) - \delta K$$
$$\dot{q} = (r+\delta)q - F_K(K)$$

Temos: $r > 0, \delta > 0, I_q > 0, I_s > 0, F_K > 0, F_{KK} < 0$.

Em um diagrama, coloque "q" no eixo vertical e "K" no horizontal. Faça o esboço das curvas $\dot{K} = 0, \dot{q} = 0$. Ache os valores no equilíbrio estacionário e mostre como se dá a dinâmica em torno do equilíbrio (converge? Não converge? Ponto de sela?, etc).

4. Considere o seguinte modelo:

$$\dot{P} = rP - R(h)$$
$$\dot{h} = g(P) - (d+n)h$$

Em que: P = preço real de um imóvel padrão, rP = custo operacional de se possuir um imóvel (r é suposto constante), R = preço do aluguel , h = aluguel *per capita*, d = taxa de depreciação (d > 0), n = taxa de crescimento populacional (n > 0). As derivadas: $R' < 0$, $g' > 0$.

a) Em um diagrama, coloque "P" no eixo vertical e "h" no horizontal. Encontre as duas curvas relevantes, os valores de equilíbrio estacionário e ilustre a dinâmica em torno do mesmo.

b) Suponha que ocorra um *baby boom* (no caso, suponha que a mudança seja não-antecipada e permanente) que se traduz em um aumento de "n". Mostre o que acontece no gráfico (muito cuidado ao fazer a mudança) e explique em palavras (no máximo, 5 (cinco) linhas) o ocorrido.

c) Discuta graficamente e em palavras – em relação ao item anterior - qual seria a diferença na trajetória das variáveis se o *baby boom* permanente fosse anunciado para a sociedade, ou seja, fosse antecipado? (Faça um novo gráfico para não gerar confusão na leitura de sua resposta).

5. No modelo de Ramsey-Cass-Koopmans visto no curso, utilizamos a função de utilidade CRRA: $u(C_t) = \frac{C(t)^{1-\theta}}{1-\theta}$. Para esta questão, use a função CARA (*constant absolute risk aversion*): $u(C_t) = -\frac{1}{\gamma}\mathrm{e}^{-\gamma C(t)}$, em que $\gamma > 0$.

Encontre a equação de Euler do consumo (as duas equações do sistema podem ser estabelecidas *a priori*, mas o estudante que deduzi-las corretamente por meio do Hamiltoniano ganhará um ponto extra). Qual a diferença do que você encontrou para o caso em que usamos a função CRRA?

6. [Questão extra] Para Snower (1982), faça o desenvolvimento algébrico do artigo e encontre a solução e mostre que o diagrama de fase do autor está correto. [SNOWER, D. J. Macroeconomic Policy and the Optimal Destruction of Vampires Author. **Journal of Political Economy**, v. 90, n. 3, p. 647–655, 1982].