

Universidade Federal de Pelotas
Departamento de Matemática e Estatística
Cálculo a várias variáveis
Limites da funções da várias variáveis reais

Introdução

Definição e exemplos

Definição 1 Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função, com $a \in \mathbb{R}^m$ um ponto de acumulação do conjunto Ω . Dizemos que $\ell \in \mathbb{R}^n$ é o limite de $f(x)$ quando x tende para a , e escrevemos $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$, se, e somente se,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que, } \forall x \in B_\delta(a) \setminus \{a\} \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(\ell).$$

Naturalmente, estas bolas dependerão das métricas que serão usadas em $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 01. Considere uma função $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$f(x_1, x_2) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2), f_3(x_1, x_2)),$$

sendo $\mathbb{R}^2$ equipado com a métrica da soma d_1 e $\mathbb{R}^3$ equipado com a métrica euclidiana d_2 .

Nestas condições, sendo $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ um ponto de acumulação de Ω , $x = (x_1, x_2) \in \Omega$ e $\ell = (\ell_1, \ell_2, \ell_3) \in \mathbb{R}^3$, então $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ se, e só se,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } , \forall x \in \Omega : 0 < d_1(x, a) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), \ell) < \varepsilon,$$

ou seja, se, e somente se,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } , \forall x = (x_1, x_2) \in \Omega,$$

tal que

$$0 < |x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| < \delta,$$

implica em

$$\sqrt{[f_1(x_1, x_2) - \ell_1]^2 + [f_2(x_1, x_2) - \ell_2]^2 + [f_3(x_1, x_2) - \ell_3]^2} < \varepsilon.$$

Exemplo 02. Considere uma função escalar

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto f(x, y).$$

Então, sendo (a, b) ponto de acumulação de Ω , teremos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L \in \mathbb{R},$$

se, e somente se, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que,

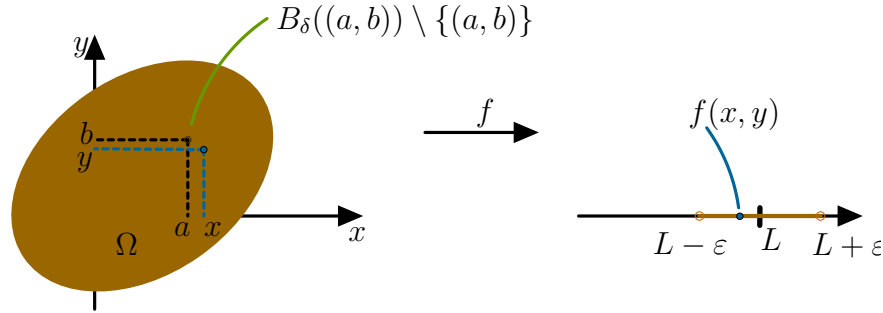
$$\forall (x, y) \in \Omega : (x, y) \in B_\delta((a, b)) \setminus \{(a, b)\} \implies f(x, y) \in B_\varepsilon(L).$$

Em particular, usando $(\mathbb{R}^2, d_2)$ e $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, teremos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L \in \mathbb{R}$$

se, e somente se, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que,

$$\forall (x,y) \in \Omega : 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \implies |f(x,y) - L| < \varepsilon.$$



Exemplo 03. Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma função vetorial, dada por

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t)).$$

Considerando os espaços métricos $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ e $(\mathbb{R}^2, d_2)$, sendo $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação para Ω , então teremos

$$\lim_{t \rightarrow a} f(t) = \ell = (\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{R}^2$$

se, e somente se,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall t \in \Omega : 0 < |t - a| < \delta \implies d_2(f(t) - \ell) < \varepsilon;$$

ou seja,

$$\sqrt{(f_1(t) - \ell_1)^2 + (f_2(t) - \ell_2)^2} < \varepsilon, \text{ sempre que } 0 < |t - a| < \delta.$$

Obs. Neste livro vamos padronizar que sempre que não estiver indicada a métrica em $\mathbb{R}^m$, a métrica a ser usada será a euclidiana. No caso em $\mathbb{R}$, a métrica será a induzida pelo módulo: $d(x, y) = |x - y|$.

No que segue, apresentamos alguns exemplos.

Exemplo 01. Prove que $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-2)} 2x + 3y = -4$.

Solução. Dado $\varepsilon > 0$, precisamos encontrar $\delta > 0$ tal que, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$0 < d((x,y), (1,-2)) < \delta,$$

implique em $|f(x,y) - (-4)| < \varepsilon$.

Ou seja, para o $\varepsilon > 0$ dado, precisamos determinar $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$0 < \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} < \delta \implies |f(x,y) + 4| < \varepsilon \quad (1)$$

Avaliando $|f(x,y) + 4|$, teremos

$$\begin{aligned} |f(x,y) + 4| &= |2x + 3y + 4| = |2x - 2 + 2 + 3y + 4| = |2(x-1) + 3(y+2)| \leq \\ &\leq 2|x-1| + 3|y+2|. \end{aligned}$$

Note que

- $|x - 1| = \sqrt{(x - 1)^2} \leq \sqrt{(x - 1)^2 + (y + 2)^2} < \delta,$
- $|y + 2| = \sqrt{(y + 2)^2} \leq \sqrt{(y + 2)^2 + (x - 1)^2} < \delta.$

Disso, segue que

$$|f(x, y) + 4| \leq 2|x - 1| + 3|y + 2| < 2\delta + 3\delta = 5\delta,$$

e então denotando $5\delta = \varepsilon$, segue que $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$, o que prova o limite dado, pois acabamos de encontrar um $\delta > 0$ dependente de ε , como precisávamos.

Exemplo 02. Prove que $\lim_{t \rightarrow 1} \left(2t + 1, \frac{1}{t} \right) = (3, 1).$

Solução. Note que $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$

Dado $\varepsilon > 0$, precisamos achar $\delta > 0$, com a exigência de que $0 < \delta < 1$ (devido ao domínio de f), tal que, $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, tal que $0 < |t - 1| < \delta$, implique em $d_2(f(t); (3, 1)) < \varepsilon.$

Vamos avaliar $d_2(f(t); (3, 1)).$

$$\begin{aligned} d_2(f(t); (3, 1)) &= \sqrt{(2t + 1 - 3)^2 + \left(\frac{1}{t} - 1 \right)^2} = \sqrt{2(t - 1)^2 + \frac{(t - 1)^2}{t^2}} = \\ &= \sqrt{(t - 1)^2 \left[2 + \frac{1}{t^2} \right]^2} \end{aligned}$$

Agora, note que como devemos ter $0 < |t - 1| < \delta$, então $-\delta < t - 1 < \delta$, $t \neq 1$, e com isso $t - 1 > -\delta$, donde segue que $t > 1 - \delta > 0.$

Disso, $t^2 > (1 - \delta)^2$, e tomando os inversos, $\frac{1}{t^2} < \frac{1}{(1 - \delta)^2}$, e disso, podemos efetuar a estimativa

$$\begin{aligned} d_2(f(t); (3, 1)) &= \sqrt{(t - 1)^2 \left[2 + \frac{1}{t^2} \right]^2} < \sqrt{(t - 1)^2} \cdot \sqrt{2 + \frac{1}{(1 - \delta)^2}} < \\ &< \delta \sqrt{2 + \frac{1}{(1 - \delta)^2}} = \delta \sqrt{\frac{2(1 - \delta)^2 + 1}{(1 - \delta)^2}} = \frac{\delta}{1 - \delta} \sqrt{3 + 2\delta(2 + \delta)}, \end{aligned}$$

e como $\delta < 1$, segue que $2 + \delta < 3$ e $2\delta < 2$, donde segue que

$$\begin{aligned} d_2(f(t); (3, 1)) &< \frac{\delta}{1 - \delta} \sqrt{3 + 2\delta(2 + \delta)} < \frac{\delta}{1 - \delta} \sqrt{3 + 2 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{\delta \sqrt{15}}{1 - \delta} < \\ &< \frac{\delta \sqrt{16}}{1 - \delta} = \frac{4\delta}{1 - \delta}. \end{aligned}$$

Assim, chamando $\frac{4\delta}{1 - \delta} = \varepsilon$, isolando o δ vamos encontrar $\delta = \frac{\varepsilon}{4 - \varepsilon}$, donde segue a prova do limite.

Exemplo 03. Seja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y, z) = (x + 2y, yz).$ Mostre que

$$\lim_{(x, y, z) \rightarrow (1, 2, 1)} f(x, y, z) = (5, 2),$$

usando as métricas d_1 para $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2.$

Solução. Dado $\varepsilon > 0$. Precisamos achar $\delta > 0$ tal que, $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $0 < d_1((x, y, z); (1, 2, 1)) < \delta$, implique em

$$d_1((x + 2y, yz); (5, 2)) < \varepsilon.$$

Vamos avaliar $d_1((x + 2y, yz); (5, 2))$, observando que

$$d_1((x, y, z); (1, 2, 1)) = |x - 1| + |y - 2| + |z - 1|.$$

A ideia consistirá em escrever $d_1((x + 2y, yz); (5, 2))$ em termos de $|x - 1|$, $|y - 2|$ e $|z - 1|$. Assim,

$$\begin{aligned} d_1((x + 2y, yz); (5, 2)) &= |x + 2y - 5| + |yz - 2| = |x - 1 + 2y - 4| + |yz - y + y - 2| = \\ &= |x - 1 + 2(y - 2)| + |y(z - 1) + (y - 2)| \leq |x - 1| + 2|y - 2| + |y| \cdot |z - 1| + |y - 2|, \end{aligned}$$

e como $|y| = |y - 2 + 2| \leq |y - 2| + 2$, obtemos a estimativa

$$\begin{aligned} d_1((x + 2y, yz); (5, 2)) &\leq |x - 1| + 2|y - 2| + (|y - 2| + 2)|z - 1| + |y - 2| = \\ &= |x - 1| + 3|y - 2| + |y - 2| \cdot |z - 1| + 2|z - 1|, \end{aligned}$$

ou seja, obtemos a estimativa

$$d_1((x + 2y, yz); (5, 2)) \leq |x - 1| + 3|y - 2| + |y - 2| \cdot |z - 1| + 2|z - 1|. \quad (2)$$

Como devemos ter

$$0 < d_1((x, y, z); (1, 2, 1)) = |x - 1| + |y - 2| + |z - 1| < \delta,$$

então, em particular tem-se que $|x - 1| < \delta$, $|y - 2| < \delta$ e $|z - 1| < \delta$ (pois se a soma de números não negativos é menor do que δ , então cada aditivo deverá ser menor do que δ). Assim, (2) fica:

$$\begin{aligned} d_1((x + 2y, yz); (5, 2)) &= |x - 1| + 3|y - 2| + |y - 2| \cdot |z - 1| + 2|z - 1| < \\ &< \delta + 3\delta + \delta \cdot \delta + 2\delta = 6\delta + \delta^2. \end{aligned}$$

Assim, escrevendo $6\delta + \delta^2 = \varepsilon$, completando um quadrado perfeito poderemos isolar o δ em termos do ε como segue:

$$\delta^2 + 6\delta + 9 - 9 = \varepsilon \Leftrightarrow (\delta + 3)^2 = \varepsilon + 9 \Leftrightarrow \delta = \sqrt{9 + \varepsilon} - 3 > 0,$$

ou seja, dado $\varepsilon > 0$, basta tomar

$$\delta = \sqrt{9 + \varepsilon} - 3 > 0.$$

Isto mostra que

$$\lim_{(x, y, z) \rightarrow (1, 2, 1)} (x + 2y, yz) = (5, 2),$$

como queríamos mostrar.

1 Propriedades dos limites

Proposição 1 *O limite de uma função $f : A \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, se existir, é único. Mais precisamente, se $f : A \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^m$ um ponto de acumulação do conjunto A , se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell_1$ e $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell_2$, então $\ell_1 = \ell_2$.*

Demonstração. Sejam $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell_1$ e $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell_2$, com $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}^n$. Vamos mostrar que $\ell_1 = \ell_2$. Por absurdo, suponha que $\ell_1 \neq \ell_2$.

Tome $\varepsilon = d(\ell_1, \ell_2) > 0$.

Como $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell_1$, então $\exists \delta_1 > 0$ tal que,

$$\forall x \in B_{\delta_1}(a) \setminus \{a\} \Rightarrow d(f(x), \ell_1) < \frac{\varepsilon}{2} \quad (3)$$

Do mesmo modo, como $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell_2$, então $\exists \delta_2 > 0$ tal que,

$$\forall x \in B_{\delta_2}(a) \setminus \{a\} \Rightarrow d(f(x), \ell_2) < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4)$$

Tome $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Então, $\forall x \in B_\delta(a) \setminus \{a\}$, valem (3) e (4). Assim, teremos

$$\varepsilon = d(\ell_1, \ell_2) \leq d(\ell_1, f(x)) + d(f(x), \ell_2) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ou seja, concluiríamos que $\varepsilon < \varepsilon$, um absurdo!. Portanto, $\ell_1 = \ell_2$.

Teorema 1 (Teorema do Sanduíche) *Sejam $f, g, h : A \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ funções escalares, $a \in \mathbb{R}^m$ um ponto de acumulação do conjunto A . Suponha que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, $\forall x \in A$, e que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$. Então, existe $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$.*

Demonstração. Sejam $f, g, h : A \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ nas hipóteses do teorema. Dado $\varepsilon > 0$.

Como $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, então $\exists \delta > 0$ tal que, $\forall x \in A$ tal que,

$$\forall x \in A : x \in B_\delta(a) \setminus \{a\} \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon. \quad (5)$$

Ainda, como $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$, então $\exists \delta_2 > 0$ tal que,

$$\forall x \in B_{\delta_2}(a) \setminus \{a\} \Rightarrow |h(x) - L| < \varepsilon. \quad (6)$$

Tome $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Assim, $\forall x \in A \subset \mathbb{R}^m$ tal que $x \in B_\delta(a) \setminus \{a\}$, valem (5) e (6). Ou seja, valem

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon \quad \text{e} \quad L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon.$$

Como por hipótese $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, $\forall x$, então

$$L - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \varepsilon,$$

ou seja,

$$|g(x) - L| < \varepsilon, \quad \text{sempre que } x \in B_\delta(a) \setminus \{a\},$$

isto é,

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$$

Exemplo. Assumindo válida a seguinte cadeia de desigualdades,

$$1 - \frac{x^2 y^2}{3} < \frac{\arctan xy}{xy} < 1,$$

o que se pode dizer sobre $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\arctan xy}{xy}$?

Solução. Usaremos o Teorema do sanduíche do seguinte modo: denotando por $f(x, y) = 1 - \frac{x^2 y^2}{3}$, $g(x, y) = \frac{\arctan xy}{xy}$ e $h(x, y) = 1$, observamos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} h(x, y) = 1,$$

e como $f(x, y) < g(x, y) < h(x, y)$, pelo Teorema do Sanduíche segue que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y) = 1.$$

No que segue apresentaremos as propriedades aritméticas dos limites para funções escalares.

Proposição 2 *Sejam $f, g : \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ funções, $a \in \mathbb{R}^m$ um ponto de acumulação do conjunto Ω . Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$, então*

$$(i) \lim_{x \rightarrow a} f(x) + g(x) = L_1 + L_2;$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow a} f(x) - g(x) = L_1 - L_2;$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = L_1 \cdot L_2;$$

$$(iv) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}, \text{ desde que } L_2 \neq 0.$$

Demonstração. Provaremos o item (i). Dado $\varepsilon > 0$.

Como $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1 \in \mathbb{R}$, então $\exists \delta_1 > 0$ tal que,

$$\forall x \in B_{\delta_1}(a) \setminus \{a\} \Rightarrow |f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (7)$$

Como $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2 \in \mathbb{R}$, então $\exists \delta_2 > 0$ tal que,

$$\forall x \in B_{\delta_2}(a) \setminus \{a\} \Rightarrow |g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (8)$$

Tome $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Assim, $\forall x \in \Omega$ tal que $x \in B_\delta(a) \setminus \{a\}$, valem (7) e (8). Assim, avaliando $|f(x) + g(x) - (L_1 + L_2)|$:

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x) - (L_1 + L_2)| &= |f(x) - L_1 + g(x) - L_2| \leq \\ &\leq |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ou seja, mostramos que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) + g(x) = L_1 + L_2$$

Exercícios

1. Sabendo que $2|xy| - \frac{x^2 y^2}{6} < 4 - 4 \cos \sqrt{|xy|} < 2|xy|$, calcule

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4 - 4 \cos \sqrt{|xy|}}{|xy|}.$$

2. Calcule, se existir, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \cos \frac{1}{y}$, lembrando que $|\cos \alpha| < 1, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

3. Mostre que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin xy}{\sin x \sin y} = 1$. Repare que a função só é definida para $x \neq 0$ e $y \neq 0$.

1.1 Limites de funções vetoriais de uma variável real

Seja $\vec{f} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função vetorial de uma variável real definida em $[a, b] \subset \mathbb{R}$. O exemplo 03 da Seção 3.1.1 já apresentou a definição de limite no caso quando $n = 2$. Vejamos novamente aqui, para o caso geral n . Se t_0 for um ponto de acumulação de $[a, b]$, então, temos que $\vec{\ell} = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n) \in \mathbb{R}^n$ é o limite de $\vec{f}(t)$ quando t tende para t_0 , e escrevemos

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{f}(t) = \vec{\ell},$$

se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, tal que, $\forall t \in [a, b]$ tal que $0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow d_2(\vec{f}(t) - \vec{\ell}) < \varepsilon$, e, sendo $\vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$, então teremos que, para o $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que

$$\sqrt{[f_1(t) - \ell_1]^2 + [f_2(t) - \ell_2]^2 + \dots + [f_n(t) - \ell_n]^2} < \varepsilon,$$

sempre que $0 < |t - t_0| < \delta$.

Um fato interessante que observaremos a seguir consiste na propriedade de que, o cálculo do limite de uma função vetorial de uma variável real resume-se ao cálculo do limite de cada função coordenada. Ou seja, temos o seguinte resultado:

Proposição 3 *Seja $\vec{f} : \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$ uma função vetorial e $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação do conjunto Ω . Então*

$$\lim_{t \rightarrow a} \vec{f}(t) = \left(\lim_{t \rightarrow a} f_1(t), \lim_{t \rightarrow a} f_2(t), \dots, \lim_{t \rightarrow a} f_n(t) \right),$$

ou seja, o limite de uma função vetorial resume-se ao cálculo do limite de cada função coordenada.

Demonstração. Seja $\lim_{t \rightarrow a} \vec{f}(t) = \vec{\ell} = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n)$.

Dado $\varepsilon > 0$. Como admitimos que vale o limite acima, segue que $\exists \delta > 0$ tal que, $\forall t \in \Omega$ tal que

$$0 < |t - a| < \delta \Rightarrow d_1(\vec{f}(t) - \vec{\ell}) < \varepsilon,$$

i.e., (e estamos usando a métrica da soma d_1 , para simplificar os cálculos)

$$|f_1(t) - \ell_1| + |f_2(t) - \ell_2| + \dots + |f_n(t) - \ell_n| < \varepsilon,$$

e então, sendo tal soma de termos não negativos menor do que ε , então cada um dos aditivos também o será, ou seja

$$|f_1(t) - \ell_1| < \varepsilon; |f_2(t) - \ell_2| < \varepsilon; \dots, |f_n(t) - \ell_n| < \varepsilon,$$

sempre que $0 < |t - a| < \delta$.

Ou seja, para o $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que, $\forall t$ tal que $0 < |t - a| < \delta$, implica em

- $|f_1(t) - \ell_1| < \varepsilon$; e disso $\lim_{t \rightarrow a} f_1(t) = \ell_1$.

- $|f_2(t) - \ell_2| < \varepsilon$; e disso $\lim_{t \rightarrow a} f_2(t) = \ell_2$.

$\vdots$

- $|f_n(t) - \ell_n| < \varepsilon$; e disso $\lim_{t \rightarrow a} f_n(t) = \ell_n$.

Ou seja, sendo $\lim_{t \rightarrow a} \vec{f}(t) = \vec{\ell}$, segue que

$$\lim_{t \rightarrow a} \vec{f}(t) = \vec{\ell} = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n) = \left(\lim_{t \rightarrow a} f_1(t), \lim_{t \rightarrow a} f_2(t) \dots, \lim_{t \rightarrow a} f_n(t) \right),$$

donde segue o resultado.

Veamos um exemplo de aplicação desse resultado.

Exemplo. Calcule o limite

$$\lim_{t \rightarrow 1} \left(\frac{t^2 - 1}{t^2 + 2t - 3}, \frac{\sqrt{t+3} - 2}{t - 1}, \frac{\sin(t^2 - 1)}{t - 1} \right).$$

Solução. Basta calcular os limites separadamente, de cada função coordenada, conforme o cálculo de limite de função de uma variável real:

- $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^2 - 1}{t^2 + 2t - 3} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t+1)(t-1)}{(t-1)(t+3)} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t+1}{t+3} = \frac{1}{2};$

- $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{\sqrt{t+3} - 2}{t - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\sqrt{t+3} - 2}{t - 1} \cdot \frac{\sqrt{t+3} + 2}{\sqrt{t+3} + 2} =$
 $= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t+3-4}{(t-1)(\sqrt{t+3}+2)} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t-1}{(t-1)(\sqrt{t+3}+2)} = \frac{1}{4};$

- $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{\sin(t^2 - 1)}{t - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\sin(t^2 - 1)}{t - 1} \cdot \frac{(t+1)}{(t+1)} =$
 $= \lim_{t \rightarrow 1} (t+1) \frac{\sin(t^2 - 1)}{t^2 - 1} = (1+1) \cdot 1 = 2.$

Portanto, concluímos que, para a $\vec{f}(t)$ dada,

$$\lim_{t \rightarrow 1} \left(\frac{t^2 - 1}{t^2 + 2t - 3}, \frac{\sqrt{t+3} - 2}{t - 1}, \frac{\sin(t^2 - 1)}{t - 1} \right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 2 \right).$$

Exercícios

1. Calcule o limite de cada função vetorial a seguir:

(a) $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{\sqrt{t} - 1}{1 - t^2} \vec{i} + \ln(t) \vec{j} + \frac{3t^4 - t^2 - 2}{1 - t^3} \vec{k}$

(b) $\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{2^t - 1}{t}, \frac{\sin 3t}{2t}, \frac{t^2 - t}{\sqrt{t+1} - 1} \right)$

2. Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ função vetorial dada por $g(t) = (t^2, t^3)$. Calcule

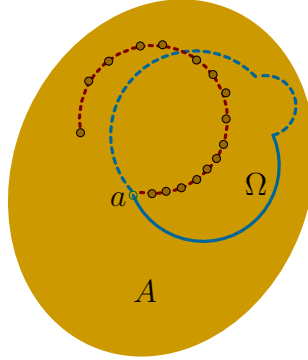
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h}.$$

1.2 Limites por caminhos

No que segue, vamos procurar, para o caso de funções do $\mathbb{R}^m$ no $\mathbb{R}^n$, uma forma de generalizar e/ou adaptar o conceito que possa equivaler ao conceito de limites laterais que temos para funções de uma variável real.

Teorema 2 *Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função, $a \in A'$ (ou seja, $a \in \mathbb{R}^m$ um ponto de acumulação do conjunto A) e $\Omega \subset A$, com $a \in \Omega'$ (ou seja, a também é ponto de acumulação do conjunto Ω). Se existir o limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}^n$, então¹*

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in \Omega}} f(x) = \ell.$$



Uma ilustração geométrica: $\Omega \subset A$, com $a \in A' \cap \Omega'$. Vemos uma sequência de pontos em A convergindo para a . Como $a \in \Omega'$, podemos ver que tem-se também uma sequência de pontos de Ω convergindo para a , ou seja, um caminho.

Demonstração. Seja $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$. Então, dado $\varepsilon > 0$, segue que $\exists \delta > 0$ tal que, $\forall x \in A$ tal que $x \in B_\delta(a) \setminus \{a\}$, implica em $f(x) \in B_\varepsilon(\ell)$.

Em particular, como $\Omega \subset A$ e $a \in A' \cap \Omega'$, então para $x \in \Omega \cap (B_\delta(a) \setminus \{a\})$, teremos $f(x) \in B_\varepsilon(\ell)$, ou seja, concluímos que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in \Omega}} f(x) = \ell.$$

Corolário 1 *Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^m$ um ponto de acumulação do conjunto A , e sejam os conjuntos $\Omega, \Lambda \subset A$, com $a \in \Omega' \cap \Lambda'$ (i.e., a é também ponto de acumulação dos conjuntos Ω e Λ). Se*

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in \Omega}} f(x) \neq \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in \Lambda}} f(x),$$

então

$$\nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

Obs.: O equivalente para este resultado na reta é:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

Demonstração. Por absurdo, suponha que $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}^n$.

¹É salutar explicar a notação: $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in \Omega}} f(x) = \ell$ significa que vamos calcular o limite da f por pontos sobre o conjunto Ω .

Então, sendo $\Omega, \Lambda \subset A$, com $a \in \Omega'$ e $a \in \Lambda'$, segue do Teorema anterior que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in \Omega}} f(x) = \ell \text{ e } \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in \Lambda}} f(x) = \ell;$$

uma contradição com a hipótese do Corolário. Absurdo!

Portanto, $\nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

No que segue, apresentaremos alguns exemplos de aplicação.

Exemplo 01. Verifique se existe o limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^3 + y^3}.$$

Existindo, determine-o.

Solução. Considere *caminhos* diferentes (de fato, cada caminho será um conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, sendo $(0,0) \in \Omega'$).

- $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} : y = 0\}$. Neste caso, temos:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in \Omega}} \frac{xy^2}{x^3 + y^3} &= \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=0}} \frac{xy^2}{x^3 + y^3} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=0}} \frac{x \cdot 0^2}{x^3 + 0^3} = \\ &= \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=0}} \frac{0}{x^3} = 0. \end{aligned}$$

- $\Lambda = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} : y = x\}$. Neste caso, temos:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in \Lambda}} \frac{xy^2}{x^3 + y^3} &= \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x}} \frac{xy^2}{x^3 + y^3} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x}} \frac{x \cdot x^2}{x^3 + x^3} = \\ &= \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x}} \frac{x^3}{2x^3} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, obtemos

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in \Omega}} f(x, y) = 0 \neq \frac{1}{2} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in \Lambda}} f(x, y),$$

ou seja, à luz do Corolário acima concluímos que $\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$.

Exemplo 02. Verifique se existe o limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2y^2}{x^2 + y^2}.$$

Existindo, determine-o.

Solução. Note que $D(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ Tomemos os caminhos seguintes:

- $\Omega_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} : x = 0\}$. Neste caso, teremos

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in \Omega_1}} \frac{3x^2y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=0}} \frac{3x^2 \cdot 0}{x^2 + 0} = 0.$$

- $\Omega_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} : y = x\}$. Neste caso, teremos

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in \Omega_2}} \frac{3x^2y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x}} \frac{3x^4}{x^2 + x^2} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x}} \frac{3x^4}{2x^2} = 0.$$

- $\Omega_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} : y = x^2\}$. Neste caso, teremos

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in \Omega_3}} \frac{3x^2y^2}{x^2 + y^2} &= \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x^2}} \frac{3x^6}{x^2 + x^4} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x^2}} \frac{3x^6}{x^2(1 + x^2)} = \\ &= \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x^2}} \frac{3x^4}{1 + x^2} = 0. \end{aligned}$$

Ou seja, observamos que, por três caminhos diferentes obtemos sempre o mesmo limite, o que sugere (mas não garante de forma nenhuma!) que o limite possa existir. De fato, mostraremos que existe através da seguinte afirmação:

Afirmação. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$.

Dado $\varepsilon > 0$. Precisamos achar $\delta > 0$ tal que, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, tal que $(x, y) \in B_\delta((0, 0)) \setminus \{(0, 0)\}$, implique em $f(x, y) \in B_\varepsilon(0)$, ou seja, $\forall (x, y)$ tal que

$$0 < \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} < \delta \Rightarrow |f(x, y) - 0| < \varepsilon.$$

Note que

$$|f(x, y) - 0| = \left| \frac{3x^2y^2}{x^2 + y^2} \right| = \frac{3x^2y^2}{x^2 + y^2},$$

e como

$$x^2 \leq x^2 + y^2 \quad \text{e} \quad y^2 \leq x^2 + y^2,$$

segue que

$$\begin{aligned} |f(x, y) - 0| &= \frac{3x^2y^2}{x^2 + y^2} \leq \frac{3(x^2 + y^2)(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \\ &= 3(x^2 + y^2) = 3\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) < 3\delta^2, \end{aligned}$$

e então denotando $3\delta^2 = \varepsilon$, isolando o δ vamos encontrar

$$\delta = \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}},$$

o que prova que o limite existe e é zero, ou seja, a Afirmação que fora feita acima é de fato verdadeira.

Exemplo 03. Verifique se existe o limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

existe, e em caso afirmativo, determine-o.

Solução. O domínio de f é dado por $D(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Vamos calcular o limite por caminhos diferentes que passem pela origem $(0, 0)$, pois se resultar em limites diferentes concluiremos que o limite não existe, ao passo que se forem resultando sempre no mesmo valor, isto sugere (e apenas sugere!) que o limite possa vir a existir. Vejamos:

- $\Omega_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$. Então

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in \Omega_1}} f(x, y) &= \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=0}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=0}} \frac{x^2}{\sqrt{x^2}} = \\ &= \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=0}} \frac{x^2}{\sqrt{x^2}} \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2}} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=0}} \sqrt{x^2} = 0. \end{aligned}$$

- $\Omega_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} : y = x\}$. Então

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in \Omega_2}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x}} \frac{2x^2}{\sqrt{2x^2}} = \\ &= \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x}} \frac{2x^2}{\sqrt{2}|x|} = \begin{cases} \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x, x \geq 0}} \frac{2x^2}{\sqrt{2}x} \\ \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x, x < 0}} \frac{2x^2}{\sqrt{2}(-x)} \end{cases} = 0 \end{aligned}$$

Ou seja, por dois caminhos diferentes obtemos o mesmo limite, isto sugere que o limite possa existir. De fato ele existe, ou seja, vale a seguinte afirmação:

Afirmação. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$.

Dado $\varepsilon > 0$, precisamos encontrar $\delta > 0$ tal que, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tal que $0 < d_2((x, y); (0, 0)) < \delta$, implique em $|f(x, y) - 0| < \varepsilon$, ou seja, devemos ter

$$|f(x, y) - 0| < \varepsilon \text{ sempre que } 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta.$$

Avaliando $|f(x, y) - 0|$:

$$\begin{aligned} |f(x, y) - 0| &= \left| \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 0 \right| = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \\ &= \sqrt{x^2 + y^2} < \delta = \varepsilon, \end{aligned}$$

ou seja, basta tomar $\delta = \varepsilon$, o que prova a Afirmação.

Exercícios

1. Em cada exercício a seguir, mostre que não existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$.

$$(a) f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad (b) f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \quad (c) f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}$$

2. Mostre que o limite

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^4 + yx^3 + z^2x^2}{x^4 + y^4 + z^4}$$

não existe.

3. Prove que o limite

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xy + xz + yz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

existe.

4. Em cada exercício a seguir, mostre que existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$.

$$(a) f(x,y) = \frac{x^2y + xy^2}{x^2 + y^2} \qquad (b) f(x,y) = \frac{2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$(c) f(x,y) = \frac{x^2 + 2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$