Universidade Federal de Pelotas
Departamento de Matemática e Estatística
Cálculo a várias variáveis
Diferenciabilidade no $\mathbb{R}^m$

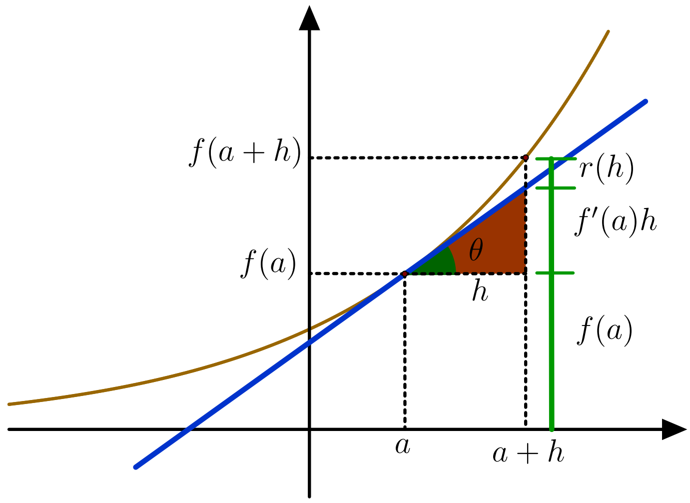
Introdução

Recordando do Cálculo a uma variável real, sendo $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $a \in A'$, dizemos que f é diferenciável em a se existir $L \in \mathbb{R}$ tal que, $\forall h \in \mathbb{R}$ tal que $a + h \in A$, tivermos

$$f(a+h) = f(a) + L \cdot h + r(h),$$

onde $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{r(h)}{h} = 0$.

Ou seja, no ponto $a \in A$ estamos aproximando a função f por uma função afim $L \cdot h + f(a)$, na variável h.



Ou seja,

$$f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + r(h),$$

onde $\dfrac{r(h)}{h} \to 0$ quando $h \to 0$.

Então, a diferencial de f em a, denotada por $d_a f$, será

$$d_a f = f'(a) \cdot h.$$

Recordamos isso pois precisamos encontrar um conceito de diferenciabilidade para funções $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ que seja equivalente ao conceito recordado acima.

Além disso, lembre que, para uma função de uma variável real, tínhamos o resultado de que, *se $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ for derivável em $x_0 \in (a,b)$, então f é contínua em x_0*. Será que ese resultado continuará válido no caso de várias variáveis? Por exemplo, considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Deixamos a encargo do leitor verificar que $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. Logo, segue que f não é contínua na origem. No entanto, observamos que as derivadas parciais na origem existem e serão iguais. De fato,

- $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{\Delta x \cdot 0}{\Delta x^2 + 0^2} - 0}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0;$$

- $$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, 0+\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\dfrac{0 \cdot \Delta y}{0^2 + \Delta y^2} - 0}{\Delta y} =$$
$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0}{\Delta y} = 0.$$

Ou seja, temos que f não é contínua na origem, **mas** possui derivadas parciais na origem e valem 0.

No entanto, embora o que foi feito acima pareça paradoxal, estamos relacionando continuidade com derivação parcial, e não continuidade com diferenciação, motivo no qual precisamos definir/estender esse conceito para mais variáveis.

Veremos que a ideia da diferenciabilidade em um ponto $a \in \mathbb{R}^m$ consistirá em obter uma função afim $A(x) = L(x) + b$, onde $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ será uma transformação linear.

1 Diferenciabilidade

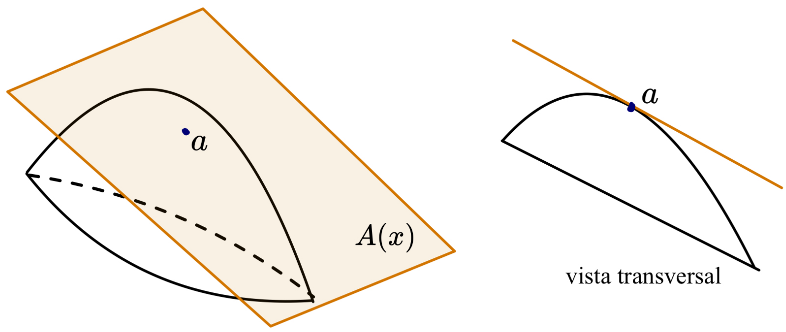
Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma função e $a \in \mathbb{R}^m$. A ideia da diferenciabilidade no $\mathbb{R}^m$ será análoga à idéia na reta lembrada na seção anterior, ou seja, vamos aproximar a função f, numa vizinhança do ponto $a \in \mathbb{R}^m$, por uma função afim $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$,

$$A(x) = L(x) + b,$$

onde $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é uma transformação linear (i.e., vamos aproximar $f(x)$ numa vizinhança do ponto a por um hiperplano descrito pela função afim $A(x)$).

Para tanto, para $A(x)$ representar uma aproximação de f no ponto a, precisamos impor a condição

$$A(a) = f(a).$$



Escreva $A(x) - A(a)$:

$$A(x) - A(a) = L(x) + b - (L(a) + b) = L(x) - L(a),$$

Assim,

$$A(x) - A(a) = L(x) - L(a).$$

Como impomos que $A(a) = f(a)$, e observando que L é uma transformação linear, temos que $L(x) - L(a) = L(x - a)$, e disso,

$$A(x) - f(a) = L(x - a),$$

e então

$$A(x) = f(a) + L(x - a).$$

Para que A seja uma aproximação para f devemos impor que

$$\lim_{x \to a}(f(x) - A(x)) = 0.$$

Ou seja,

$$\lim_{x \to a} f(x) - f(a) - L(x - a) = 0.$$

Como L é transformação linear, então L é contínua, e disso

$$0 = \lim_{x \to a}(f(x) - A(x)) = \lim_{x \to a} f(x) - f(a) - L(x - a),$$

então

$$0 = \lim_{x \to a} f(x) - f(a) - \lim_{x \to a} L(x - a),$$

ou seja,

$$0 = \lim_{x \to a}(f(x) - f(a)) - L(0),$$

e como L deve ser transformação linear, devemos impor que $L(0) = 0$, e com isso, obtemos

$$\lim_{x \to 0}(f(x) - f(a)) = 0,$$

ou seja, f fica contínua em $x = a$.

Redefina a f escrevendo[1]

$$f(x) = f(a) + L(x - a) + ||x - a|| \cdot r(x - a), \tag{1}$$

onde $r(x - a) \to 0$ mais rápido que $||x - a||$, ou seja,

$$\lim_{x \to a} \frac{r(x - a)}{||x - a||} = 0.$$

Assim, de (1), temos

$$f(x) - f(a) - L(x - a) = ||x - a|| r(x - a),$$

e então

$$f(x) - (f(a) + L(x - a)) = ||x - a|| r(x - a),$$

ou seja,

$$f(x) - A(x) = ||x - a|| r(x - a).$$

Dividindo por $||x - a||$, vem

$$r(x - a) = \frac{f(x) - A(x)}{||x - a||},$$

e disso,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - A(x)}{||x - a||} = \lim_{x \to a} r(x - a) = 0.$$

Ou seja, acabamos de mostrar que se $A(x)$ é uma aproximação para f em $x = a$, então

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - L(x - a)}{||x - a||} = 0.$$

Isso vai dar origem à seguinte definição:

[1] Isto para imitarmos as mesmas ideia e notação usadas na reta real, recordadas na introdução.

Definição 1 Dizemos que $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é *diferenciável* em $a \in \mathbb{R}^m$ se

(i) $a \in \text{int}(D(f))$;

(ii) $\exists L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ transformação linear tal que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - L(x-a)}{||x-a||} = 0.$$

Neste caso, dizemos que L é a diferencial de f no ponto a, e denotamos por $L = d_a f$.

Note então que a diferencial L de uma função $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ em um ponto é uma transformação linear $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Logo, conforme a Álgebra linear, vai existir uma matriz $[L]_{n \times m}$ da transformação. No que segue, vamos determiná-la.

Seja $\{e_1, e_2, ..., e_m\}$ a base canônica do $\mathbb{R}^m$, onde

$$e_j = (0, 0, 0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$$

é o vetor que assume o valor 1 na posição j e zero nas demais.

Suponha $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma função e seja $a \in \text{int}\,\Omega \subset \mathbb{R}^m$. Dado $t > 0$ suficientemente pequeno tal que $x_i = a + t \cdot e_i \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$.

Suponha f diferenciável em a. Aplicando a definição de diferenciabilidade no ponto x_i, obtemos

$$0 = \lim_{x_i \to a} \frac{f(x_i) - f(a) - L(x_i - a)}{||x_i - a||}.$$

Como $x_i = a + t \cdot e_i$, então temos que $t \to 0$ quando $x_i \to a$. Assim,

$$0 = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t \cdot e_i) - f(a) - L(a + t \cdot e_i - a)}{||a + t \cdot e_i - a||},$$

ou seja,

$$0 = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t \cdot e_i) - f(a) - L(t \cdot e_i)}{||t \cdot e_i||},$$

e como

$$||t \cdot e_i|| = |t| \cdot ||e_i|| = |t| = t \quad \text{e} \quad L(t \cdot e_i) = t \cdot L(e_i), \ \text{ pois } L \text{ é linear},$$

segue que

$$0 = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t \cdot e_i) - f(a)}{t} - \frac{t \cdot L(e_i)}{t},$$

e então

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + t \cdot e_i) - f(a)}{t} = L(e_i).$$

Denotando por $L(e_i) = d_a f(e_i)$, a igualdade acima ficará:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = (d_a f)(e_i),$$

que vai corresponder à coluna i de uma matriz que representa $d_a f = L$. De fato, sendo $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, f_2, f_3, ..., f_n)$, então teremos que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_i}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(a) \end{bmatrix}.$$

Logo, a diferencial de f no ponto a, denotada por $d_a f$, possui, nas bases canônicas de $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$, a seguinte representação matricial:

$$d_a f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(a) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_3}{\partial x_m}(a) \\ & & \vdots & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(a) \end{bmatrix}_{n\times m},$$

e é chamada de *matriz Jacobiana* de f no ponto a. O que fizemos acima constitui a prova do seguinte teorema:

Teorema 1 *Se $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ for uma função diferenciável em um ponto $a \in \operatorname{int}(D(f))$, então existe uma representação única do seu diferencial $d_a f$, nas bases canônicas, dada pela matriz Jacobiana de f no ponto a.*

Observação. A unicidade dessa representação fica garantida pela unicidade da representação de uma transformação linear, matricialmente.

Exemplo. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a função dada por

$$f(x, y, z) = (x^2 \operatorname{sen} y, xy^2z^3).$$

Determine a matriz Jacobiana $d_a f$.

Solução. Como $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, então teremos $d_a f = [L]_{2\times 3}$. As funções coordenadas em questão são $f_1 = x^2 \operatorname{sen} y$ e $f_2 = xy^2z^3$. Então

$$d_a f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{bmatrix}_{2\times 3} (a) = \begin{bmatrix} 2x \operatorname{sen} y & x^2 \cos y & 0 \\ y^2z^3 & 2xyz^3 & 3xy^2z^2 \end{bmatrix} (a)$$

Não foi dado em qual ponto aplicaríamos a matriz Jacobiana. Se por exemplo, for em $a = (2, 0, -3)$, basta substituir na matriz acima:

$$d_a f = \begin{bmatrix} 2x \operatorname{sen} y & x^2 \cos y & 0 \\ y^2z^3 & 2xyz^3 & 3xy^2z^2 \end{bmatrix} (2, 0, -3) =$$

$$= \begin{bmatrix} 4 \operatorname{sen} 0 & (2)^2 \cos 0 & 0 \\ (0)^2(-3)^3 & 2(2)(0)(-3)^3 & 3(2)(0)^2(-3)^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Voltando ao problema apresentado ao final da seção anterior, no qual mencionamos parecer "paradoxal", de posse do estudo feito acima sobre a diferenciabilidade a várias variáveis, podemos, finalmente, responder:

Proposição 1 *Se $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ for diferenciável em um ponto a, então f é contínua nesse ponto.*

Demonstração. Note que, sendo f diferenciável em um ponto a, então

$$f(x) = f(a) + L(x - a) + ||x - a||r(x - a),$$

onde L é uma transformação linear de $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}^n$ e $r(x-a)$ tende a zero mais rápido do que $||x - a||$. Assim,

$$f(x) - f(a) = L(x - a) + ||x - a||r(x - a).$$

Passando o limite com $x \to a$, e lembrando que $L(0) = 0$, pois L é linear, obtemos

$$\lim_{x\to a} f(x) - f(a) = \lim_{x\to a} L(x-a) + ||x-a||r(x-a) = L(0) + 0 \cdot 0 = 0,$$

donde segue que

$$\lim_{x\to a} f(x) - f(a) = 0,$$

ou seja,

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a),$$

provando que f é contínua no ponto a.

Exercícios

1. Nos itens a seguir, mostre que f é diferenciável em todos os pontos do seu domínio. Em seguida, obtenha a matriz Jacobiana $d_a f$ de cada uma delas.

   (a) $f(x,y) = x^2y - 2xy$

   (b) $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2$

   (c) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y}$

   (d) $f(x,y) = \dfrac{y}{x}$

2. De cada função vetorial a seguir, obtenha a matriz Jacobiana:

   (a) $f(x,y) = (e^{x^2+y^2}, 2x^2y + 3y^2, \sqrt{x^2+y^2})$

   (b) $f(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2, xyz, \cos xy, x^2 - yz)$